UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

UMA GENERALIZAÇÃO DOS CONECTIVOS PROPOSICIONAIS CLÁSSICOS, FUZZY E FUZZY INTERVALAR BASEADA EM RETICULADOS.

Hélida Salles Santos

Natal / RN
2005

HÉLIDA SALLES SANTOS

UMA GENERALIZAÇÃO DOS CONECTIVOS PROPOSICIONAIS CLÁSSICOS, FUZZY E FUZZY INTERVALAR BASEADA EM RETICULADOS.

Projeto apresentado à disciplina Relatório de Graduação, ministrada pela Prof$^{a.}$ Anne Magaly de Paula Canuto.

Benjamín René Callejas Bedregal Orientador

Natal / RN
2005

Aos meus pais e amigos, que sempre me motivaram a seguir em frente, e principalmente, ao meu orientador, pelo empenho, paciência e tempo dedicados à conclusão deste trabalho.

RESUMO

Os conectivos lógicos clássicos, as t-normas e as t-normas intervalares, assim como as versões triangulares dos outros conectivos, são funções sobre reticulados específicos satisfazendo certas propriedades. A idéia deste trabalho é se abstrair do reticulado particular, e trabalhar com reticulados arbitrários generalizando todos esses conectivos. Assim, introduziremos aqui uma extensão das t-normas para reticulados completos arbitrários, na qual a generalização não seja necessariamente a operação $\wedge$ inerente ao reticulado (como em [KEHAGIAS & KONSTANTINIDOU, 2001]) e que para o caso dos reticulados completos $([0,1], \leq, 0, 1)$ e $(\mathbf{I}[0,1], \leq_{KM}, [0,0], [1,1])$ coincida com as t-normas e t-normas intervalares, respectivamente (como não ocorre com as BL álgebras).

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A lógica Fuzzy ou difusa foi modelada por Dr. Lofti A. Zadeh em [ZADEH, 1965] para tratar de incertezas, uma vez que o pensamento humano não se restringe apenas a fatos absolutamente verdadeiros ou falsos. A lógica difusa tem como característica principal considerar um grau de crença, um valor real entre o intervalo [0,1], para identificar o quanto se pode acreditar que um elemento pertence a um determinado conjunto. Neste contexto, as normas triangulares (t-normas), introduzidas por [SCHWEIZER & SKLAR, 1961], modelam a intersecção de conjuntos Fuzzy e, consequentemente, a conjunção de proposições Fuzzy. Outros conectivos são estendidos pelas t-conormas, implicações Fuzzy e complemento Fuzzy [BUSTINCE et al., 2003], onde t-conormas são usadas para representar o operador clássico de união e disjunção.

Podemos entender um reticulado como uma estrutura $L = < R; \wedge ; \vee >$, sendo:

1. R um conjunto não vazio;
2. $\wedge$ e $\vee$ operações binárias sobre R;
3. Para todos x, y e z de R as propriedades de comutatividade, associatividade, idempotência e absorção são satisfeitas.

Desta forma, obtemos uma definição que estabelece um reticulado como uma estrutura algébrica, ou seja, como certo conjunto dotado de operações e relações entre seus elementos satisfazendo determinadas propriedades. No entanto, um reticulado é uma estrutura tão peculiar que também pode ser visto como uma estrutura de ordem. Assim, um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado R tal que qualquer subconjunto de R que tenha apenas dois elementos tem supremo e ínfimo [COSTA & KRAUSE, 2005]. Em particular, $(\{0,1\}, \leq)$, $([0,1], \leq)$ e $(\mathbf{I}[0,1], \leq_{KM})$

são reticulados, onde $I[0,1]=\{[a,b]: 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ e $[a,b] \leq_{KM} [c,d]$ se, e somente se, $a \leq c$ e $b \leq d$. A ordem $\leq_{KM}$ é chamada de Kulisch-Miranker por ter sido introduzida por eles em [KULISCH & MIRANKER, 1981]

Os conectivos lógicos clássicos, as t-normas e as t-normas intervalares, assim como as versões triangulares dos outros conectivos, são funções sobre esses reticulados satisfazendo certas propriedades.

A idéia deste trabalho é se abstrair do reticulado particular, e trabalhar com reticulados arbitrários generalizando todos esses conectivos.

2. BACKGROUND

A utilização de reticulados para representar conectivos proposicionais clássicos, fuzzy e fuzzy intervalar permite simplificar teorias que, na realidade, podem ser entendidas como uma só. Consegue-se desta forma uma visão mais geral facilitando a compreensão e o estudo das áreas envolvidas, que serão brevemente discutidas a seguir.

2.1. Lógica Proposicional Clássica

A lógica foi criada por Aristóteles, no século IV a.C. como uma ciência autônoma que se dedicava ao estudo dos atos do pensamento do ponto de vista da sua estrutura ou forma lógica, sem ter em conta qualquer conteúdo material. É por esta razão que esta lógica aristotélica se designa também por lógica formal.

Em contraposição a este conceito de lógica formal, surgiu um outro (o de lógica material) para designar o estudo do raciocínio no que ele depende quanto ao seu conteúdo ou matéria. Costuma-se dividir a história da lógica em três períodos: clássico, moderno e contemporâneo.

No período clássico, a lógica exprimia-se numa linguagem natural. Dava-se uma enorme importância ao estudo dos raciocínios dedutivos. Os estudos enfatizavam a análise de enunciados que continham exatamente dois termos, dos quais se extraia uma dada conclusão.

No período moderno, tomou-se a matemática como modelo, lógicos como George Boole, Frege e Bertrand Russell construíram uma linguagem artificial (simbólica) para a expressão do conteúdo do pensamento lógico. O raciocínio era visto como cálculo matemático.

No período contemporâneo, assiste-se à expansão e diversificação da lógica matemática, o que se traduz no aparecimento de novos ramos no estudo da lógica.

Há certa dificuldade em se obter um consenso quanto à definição da lógica. Alguns autores a definem como o estudo dos processos válidos e gerais pelos quais atingimos a verdade, outros como a ciência das leis do pensamento, ou somente como o estudo dos princípios da inferência válida.

Um sistema lógico pode ser entendido como um conjunto de regras para raciocínio independentemente do conteúdo. Muitos sistemas de lógica foram construídos ao longo do tempo e esses sistemas artificiais de raciocínio têm encontrado atualmente muitas aplicações práticas na computação, como por exemplo, nas aplicações de Inteligência artificial.

Esta pluralidade de definições, disponível em [FONTES, 2005], evidencia a diversidade de estudos que são abrangidos pela lógica.

A lógica proposicional clássica (LPC) caracteriza-se pelo seu aspecto formal e rigor dedutivo que condiciona o seu exercício e garante a sua validade. Para tanto, deve-se obedecer a certos princípios, dentre os quais, os quatro mais conhecidos são:

(i) Princípio da Identidade: $x = x$. Todo objeto é idêntico a si mesmo;

(ii) Princípio do Terceiro Excluído: $p \vee \neg p$. De duas proposições contraditórias, uma delas é verdadeira;

(iii) Princípio da Contradição: $\neg(p \vee \neg p)$. Entre duas proposições contraditórias, uma delas é falsa;

(iv) Princípio da Identidade Proposicional: p → p.

Assim, uma afirmação pode ser falsa ou verdadeira, no entanto, de maneira alguma, ela pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Alguns conceitos também são importantes, pois é a partir deles que se formaliza a LPC [CONIGLIO, 2005], assim, tem-se:

- As tautologias, que são as fórmulas que são verdadeiras para qualquer interpretação;
- A teoria formal proposicional, que permite a partir de certos axiomas (um subconjunto das tautologias) e de regras derivar as outras tautologias (teoremas) sem necessidade de recorrer a interpretações; e
- As conseqüências lógicas, que definem quando é possível concluir uma certa fórmula de modo seguro, desde um conjunto de premissas. E esta noção pode ser obtida usando interpretação (conseqüência semântica) ou dedução na teoria formal (conseqüência sintática).

Na definição da LPC utiliza-se o universo matemático da Álgebra Booleana e se tem como conectivos lógicos os operadores de: Negação (¬), Disjunção (∨), Conjunção (∧) e Implicação (→).

2.2. Ordens parciais

A teoria da ordem é um ramo da matemática que estuda vários tipos de relações binárias que possuem a noção intuitiva da ordem matemática [ZUO, 1995]. Computacionalmente é interessante porque certas classes de ordens parciais (domínios semânticos) são usadas para dar semântica denotacional à linguagem de programação [GUNTER, 1992; STOLTENBERG-HANSEN et al., 1994]. Devido à ampla praticidade de se utilizar noções de ordem, vários tipos especiais de conjuntos ordenados foram definidos. Além disso, a teoria de ordem não se restringe às várias classes de relações de ordem, mas também considera apropriadas as funções entre elas.

Seja P um conjunto, dizemos que uma relação binária $\leq$ é uma ordem parcial se, $\forall x, y, z \in P$:

(i) $x \leq x$ (reflexividade)

(ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$ (antisimetria)

(iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$ (transitividade)

A relação que satisfaz as propriedades de reflexividade e transitividade é chamada pré-ordem.

Um conjunto P munido de uma relação de ordem parcial, $\leq$, diz-se conjunto parcialmente ordenado (poset).

Definições 1:

Seja $\langle P, \leq \rangle$ um poset.

1. Seja $A \subseteq P$. Um elemento $x \in P$ é chamado um ***majorante*** de A se x está acima de qualquer elemento de A. Usaremos a notação $A \leq x$, para este caso e denotaremos UB(A) o conjunto de todos os majorantes de A. Dualmente, LB(A) denotará o conjunto de todos os ***minorantes*** de A.
2. Se todos os elementos de P estão abaixo de um único elemento $x \in P$, dizemos que x é o ***maior elemento*** ou ***topo*** e denotado por 1. O conceito dual é o de ***menor elemento*** de um poset, também chamado ***bottom***, denotado por 0.

3. Se num subconjunto $A \subseteq P$, UB(A) tem um menor elemento, ele é chamado ***supremo*** de A e denotado por sup A. Em outra direção, falamos de ***ínfimo*** e escrevemos inf A.

2.3. Reticulados completos

Em [COSTA & KRAUSE, 2005] define-se reticulado, algebricamente, como uma estrutura $L = < R; \wedge ; \vee >$, onde:

(i) R é um conjunto não vazio;

(ii) $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias sobre R;

(iii) Para todos x, y e z de R tem-se:

(1) $x \wedge y = y \wedge x$ e $x \vee y = y \vee x$ (comutatividade)

(2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ e $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (associatividade)

(3) $x \wedge x = x$ e $x \vee x = x$ (idempotência)

(4) $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorção)

No entanto, um reticulado é uma estrutura tão peculiar que também pode ser visto como uma estrutura de ordem. Assim, um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado R tal que qualquer subconjunto de R que tenha apenas dois elementos tem supremo e ínfimo [COSTA & KRAUSE, 2005]. Formalmente temos: Seja $L = < R, \leq >$ um poset. Se sup{x ,y} e inf{x, y} existem em L $\forall x, y \in R$, então L é um ord-reticulado.

Proposição 1: Seja $L = < R, \leq >$ um ord-reticulado. Então $L = < R, \wedge, \vee >$, onde $x \wedge y = \inf\{x,y\}$ e $x \vee y = \sup\{x,y\}$ é um reticulado.

Demonstração: Ver [JOHNSTONE, 1982].

Em particular, $B=(\{0,1\}, \leq)$, $F=([0,1], \leq)$ e $IF=(I[0,1], \leq_{KM})$) são reticulados, onde $I[0,1] = \{[a,b]: 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ e $[a,b] \leq_{KM} [c,d]$ se, e somente se, $a \leq c$ e $b \leq d$. Os reticulados algébricos associados a B, F e IF são $(\{0,1\}, \wedge_B, \vee_B)$, $([0,1], \wedge_F, \vee_F)$ e $(I[0,1], \wedge_{IF}, \vee_{IF})$, respectivamente, onde $\wedge_B$ é a conjunção clássica, $\wedge_F$ é o mínimo e $\wedge_{IF}$ é definido por: $[a,b] \wedge_{IF} [c,d] = [a \wedge_F c, b \wedge_F d]$.

Seja $L = < R, \wedge, \vee >$ um reticulado, podemos definir $x \leq_L y$ se, e somente se, $x \wedge y = x$. Ou, analogamente, $x \leq_L y$ se, e somente se, $x \vee y = y$. Esta ordem será chamada de ordem inerente ao reticulado.

Proposição 2: Se $L = < R, \wedge, \vee >$ é um reticulado, então $< R, \leq_L >$ é um ord-reticulado, onde $x \leq_L y$, se, e somente se, $x = x \wedge y$ (ou $y = x \vee y$). Se $< R, \leq >$ é um reticulado, então $L = < R, \wedge, \vee >$ também é, onde $x \wedge y = \inf\{x,y\}$ e $x \vee y = \sup\{x,y\}$

Demonstração: Ver [JOHNSTONE, 1982].

Note que se $L = < R, \leq >$ é um ord-reticulado então o reticulado obtido como na proposição 1 tem como ordem inerente ($\leq_L$) a própria $\leq$. Ou seja, se aplicarmos a proposição 1 a um ord-reticulado $L = < R, \leq >$ e em seguida ao reticulado assim obtido aplicamos a proposição 2, obteremos novamente o ord-reticulado original $L = < R, \leq >$. Analogamente, se $L = < R, \wedge, \vee >$ é um reticulado então, ao aplicar a proposição 2, obteremos um ord-reticulado $< R, \leq_L >$, e se aplicamos a proposição 1 a este ord-reticulado obteremos novamente o reticulado original. Assim, podemos dizer que há uma correspondência biunívoca entre reticulado e ord-reticulados e que, portanto, podemos dizer que um ord-reticulado e seu associado reticulado são a mesma estrutura. Portanto, de agora em diante, chamaremos ambos simplesmente de reticulados.

Um reticulado $<R, \wedge, \vee >$ diz-se completo se todo subconjunto não-vazio e majorado (minorado) admitir supremo (ínfimo). Ou seja, reticulados completos sempre têm um menor e um maior elemento. Observe que, em reticulados completos, o supremo do conjunto vazio é o menor elemento de R. Observe ainda que o supremo de R teria que existir e, portanto, o reticulado para ser completo teria que possuir um máximo. Desta forma, usualmente, em reticulados completos, o ínfimo e o máximo são explicitamente colocados na estrutura. Por exemplo, ([0,1], $\wedge_F$, $\vee_F$, 0, 1) é um reticulado completo tendo o maior elemento 1 e o menor elemento 0.

Um reticulado completo <R, $\wedge$, $\vee$, 0, 1> é complementado se satisfaz a condição de que $\forall x \in R$, existe $y \in R$ tal que $x \vee y = 1$ e $x \wedge y = 0$. Neste caso, y é chamado de complemento de x. Usualmente utiliza-se uma operação unitária para denotar a forma de obter o complemento de um valor. Assim, x' indica o complemento de x. Essa operação é também introduzida na estrutura do reticulado. Por fim, < R, $\wedge$, $\vee$ > diz-se reticulado distributivo se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\forall x, y, z \in R$, tem-se que $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(ii) $\forall x, y, z \in R$, tem-se que $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Um reticulado complementado e distributivo denomina-se álgebra booleana (álgebra de Boole). Portanto uma álgebra de Boole é uma estrutura <R, $\wedge$, $\vee$, ' , 0, 1> tal que $\forall x, y, z \in R$:

1. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ e $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
2. $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$
3. $x \vee x = x$ e $x \wedge x = x$
4. $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \wedge y) = x$.
5. $\forall x \subseteq R$, sup x existe.

6. $\forall x \in R$, existe $x' \in R$, tal que $x \vee x' = 1$ e $x \wedge x' = 0$.

7. $\forall x, y, z \in R$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

8. $\forall x, y, z \in R$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Note que as quatro primeiras condições indicam que $< R, \wedge, \vee >$ é um reticulado. A condição 5 indica que $(R, \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado completo. A condição 6 indica que $<R, \wedge, \vee, ', 0, 1>$ é um reticulado complementado e as condições 7 e 8, que é distributivo.

Um reticulado distributivo complementado $L = < R, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 >$ é uma álgebra De Morgan se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ e $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ são identidades.

(ii) $\neg(\neg x) = x$ é uma identidade.

A operação unária $\neg$ numa álgebra De Morgan é chamada de negação [GEHRKE et al., 2003].

2.4. Um construtor intervalar sobre reticulados

Um conjunto de intervalos reais depende da ordem usual nos números reais, tanto na visão algébrica quanto na visão de ordem. A teoria de Moore garante que todas as construções interessantes sobre intervalos podem ser obtidas através de seus extremos [CALLEJAS-BEDREGAL & BEDREGAL, 2001]. Assim, podemos formalizar a idéia de um construtor intervalar sobre reticulados considerando qualquer conjunto parcialmente ordenado como veremos a seguir.

Definição 2: Seja $L = <R, \wedge, \vee, 0, 1>$ um reticulado; um construtor intervalar sobre reticulados é definido por $I_L = < I(R), \sqcap, \sqcup, [0,0], [1,1] >$ onde:

- $I(R) = \{[a,b] \in RxR \ / \ 0 \leq a \leq b \leq 1\}$;

- $[a_1,b_1] \sqcap [a_2,b_2] = [a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2]$
- $[a_1,b_1] \sqcup [a_2,b_2] = [a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2]$

Proposição 3: Seja L um reticulado completo, então I_L também é um reticulado completo.

Demonstração: Devemos mostrar que I_L satisfaz as propriedades de comutatividade, associatividade, idempotência, absorção e que todo subconjunto tem supremo. Assim, seja a, b, c, d, e, f $\in$ [0,1] temos:

- Comutatividade:

$$\begin{aligned}[a,b] \sqcap [c,d] &= [a \wedge c, b \wedge d] \\ &= [c \wedge a, d \wedge b] \\ &= [c,d] \sqcap [a,b]\end{aligned} \qquad \begin{aligned}[a,b] \sqcup [c,d] &= [a \vee c, b \vee d] \\ &= [c \vee a, d \vee b] \\ &= [c,d] \sqcup [a,b]\end{aligned}$$

- Associatividade:

$$\begin{aligned}[a,b] \sqcap ([c,d] \sqcap [e,f]) &= [a,b] \sqcap [c \wedge e, d \wedge f] \\ &= [a \wedge (c \wedge e), b \wedge (d \wedge f)] \\ &= [(a \wedge c) \wedge e, (b \wedge d) \wedge f] \\ &= [a \wedge c, b \wedge d] \sqcap [e \wedge f] \\ &= ([a,b] \sqcap [c,d]) \sqcap [e,f]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a,b] \sqcup ([c,d] \sqcup [e,f]) &= [a,b] \sqcup [c \vee e, d \vee f] \\ &= [a \vee (c \vee e), b \vee (d \vee f)] \\ &= [(a \vee c) \vee e, (b \vee d) \vee f] \\ &= [a \vee c, b \vee d] \sqcup [e \vee f] \\ &= ([a,b] \sqcup [c,d]) \sqcup [e,f]\end{aligned}$$

- Idempotência:

$[a,b] \sqcap [a,b] = [a \wedge a, b \wedge b]$ $\qquad$ $[a,b] \sqcup [a,b] = [a \vee a, b \vee b]$

$= [a,b]$ $\qquad$ $= [a,b]$

- Absorção:

$[a,b] \sqcap ([a,b] \sqcup [c,d]) = [a,b] \sqcap ([a \vee c, b \vee d])$

$= [a \wedge (a \vee c), b \wedge (b \vee d)]$

$= [a,b]$; pela propriedade de absorção em L.

$[a,b] \sqcup ([a,b] \sqcap [c,d]) = [a,b] \sqcup ([a \wedge c, b \wedge d])$

$= [a \vee (a \wedge c), b \vee (b \wedge d)]$

$= [a,b]$; pela propriedade de absorção em L.

- Todo subconjunto tem supremo:

Seja $X \subseteq I(R)$. Defina os subconjuntos $\underline{X} \subseteq R$ e $\overline{X} \subseteq R$, por:

$\underline{X} = \{\underline{x} \ / \ [\underline{x}, \overline{x}] \in X\}$,

$\overline{X} = \{\overline{x} \ / \ [\underline{x}, \overline{x}] \in X\}$,

Como L é completo, então o supremo de $\underline{X}$ e o supremo de $\overline{X}$ existem. Claramente, $[\sup \underline{X}, \sup \overline{X}]$ é supremo de X.

Proposição 4: Seja $L=(R, \leq_L, 0, 1)$ um reticulado completo e I_L o reticulado completo obtido como na proposição anterior. Então para todo $[a,b], [c,d] \in I(R)$,

$[a,b] \leq_{IL} [c,d]$ se, e somente se, $a \leq_L c$ e $b \leq_L d$.

Demonstração:

$[a,b] \leq_{IL} [c,d]$ se, e somente se,

$[a,b] \sqcap [c,d] = [a,b]$ se, e somente se,

$[a \wedge c, b \wedge d] = [a,b]$ se, e somente se,

$a \wedge c=a$ e $b \wedge d=b$ se, e somente se,

$a \leq_L c$ e $b \leq_L d$.

Note que $\leq_{IL}$ é uma extensão de $\leq_{KM}$, ou seja, quando o reticulado for ([0,1], $\leq$), então $\leq_{IL} = \leq_{KM}$.

2.5. Lógica Fuzzy e Fuzzy Intervalar

A lógica fuzzy ou difusa é uma generalização da lógica clássica que admite valores lógicos fracionários na tentativa de implementar níveis intermediários de verdade, ao contrário da lógica tradicional que admite apenas o par oposto verdadeiro-falso.

A lógica fuzzy foi modelada por Dr. Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em [ZADEH, 1965], violando o princípio da contradição, ou seja, é possível termos uma proposição que não seja absolutamente verdadeira ou absolutamente falsa. Valores reais entre 0 e 1 identificam o grau de pertinência de uma proposição a um certo conjunto. Os conjuntos fuzzy se mostram mais adequados para retratar incertezas, e consequentemente, o pensamento humano que não se restringe ao conceito binário (verdadeiro-falso). É um instrumento que suporta informações vagas, imprecisas ou aproximadas, em geral descritas em uma linguagem natural e as converte num formato numérico e de fácil manipulação.

Pode-se distinguir a lógica fuzzy em duas direções principais, cujo sentido mais amplo serve, por exemplo, como aparato para análise de noções imprecisas em linguagens naturais e controle. E no sentido mais estreito, é uma lógica simbólica com uma noção comparativa da verdade, desenvolvida tendo como base a lógica clássica, pois os conectivos devem-se comportar como na lógica clássica nos extremos 0 e 1.

Em [CRUZ & BEGREGAL, 2005] provou-se que conectivos fuzzy podem modelar a lógica clássica quando vista como um conjunto de tautologias. A importância desses resultados é tornar possível a aplicação de todas as ferramentas matemáticas e computacionais desenvolvidas para a lógica proposicional clássica (como teorias formais, provadores automáticos de teoremas, linguagens de programação lógicas, etc.) para as lógicas proposicionais fuzzy baseadas em t-normas fracas como visto em [CRUZ & BEGREGAL, 2005].

A teoria fuzzy intervalar surgiu da necessidade de se trabalhar com valores mais genéricos, ou seja, há situações em que os valores não são pontos no intervalo [0,1]. Como a lógica fuzzy descreve incertezas, um especialista ao descrever algo incerto, também pode estar incerto sobre a sua crença no grau de pertinência não sabendo descrevê-lo exatamente. Como mostrado em [SILVEIRA & BEDREGAL, 2001] uma pessoa pode distinguir entre o grau de pertinência 0.6 e 0.7, no entanto, é difícil a distinção entre 0.6 e 0.601. Assim, uma representação mais adequada de graus de pertinência pode não ser um simples número real, mas sim um intervalo ou um conjunto de números reais possíveis. Isso ocorre frequentemente em sistemas que tratam com aproximações ou arredondamentos. E se nessas situações o conhecimento for impreciso, pode-se aplicar conjuntos fuzzy intervalar, controlando desta forma o erro do especialista.

2.5.1 Representação de intervalos

Um intervalo possui uma natureza dual, ou seja, pode ser visto como um conjunto de números reais ou como um par ordenado dos números reais. Seja IR = {[x,y] tal que r,s ∈ IR e x ≤ y}, IR é o conjunto de intervalos com números reais nas extremidades. IR também é associado com duas projeções: π_1: IR → IR e π_2: IR → IR definidas por $\pi_1([\underline{x}, \overline{x}]) = \underline{x}$ e $\pi_2([\underline{x}, \overline{x}]) = \overline{x}$ [BEDREGAL & TAKAHASHI, 2005b]. Algumas ordens parciais nos reais podem ser definidas considerando diferentes naturezas de intervalos.

Quando um intervalo é visto como um conjunto dos números reais, a ordem parcial natural é a inclusão, introduzida em [SUNAGA, 1958]. Formalmente, para cada X,Y∈ IR:

- $X \subseteq Y \Leftrightarrow \underline{y} \leq \underline{x} \leq \overline{x} \leq \overline{y}$.

Quando um intervalo é visto como um par ordenado dos números reais, a ordem natural é a ordem herdada da ordem do produto cartesiano introduzido em [KULISCH & MIRANKER, 1981]. Formalmente, para cada X,Y∈ IR:

- $X \leq Y \Leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y}$ e $\overline{x} \leq \overline{y}$.

Quando um intervalo é considerado como uma informação ou uma representação de um número real desconhecido, a ordem natural é a introduzida por Scott em [SCOTT, 1970] e amplamente usada em [ACIÓLY, 1991] para proporcionar uma base computacional à matemática intervalar. Formalmente, para cada X,Y∈ IR:

- $X \sqsubseteq Y \Leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y} \leq \overline{y} \leq \overline{x}$.

2.5.2. T-normas e t-normas intervalares

No intuito de modelar a distância em espaços métricos probabilísticos Menger, em [MENGER, 1942] introduziu a noção de normas triangulares (t-normas). Em [SCHWEIZER & SKLAR, 1961], Schweizer e Sklar propuseram uma axiomática para t-normas e, em [ALSINA et al., 1980], a t-norma e sua noção dual, t-conorma, foi usada para modelar os conectivos de conjunção e disjunção nas lógicas fuzzy, generalizando várias interpretações fuzzy anteriores para a conjunção. Também é possível obter uma interpretação fuzzy canônica para os conectivos de implicação e negação a partir de uma t-norma. Desta forma, cada t-norma determina um conjunto diferente de fórmulas verdadeiras (tautologias) e fórmulas falsas (contradições), e, consequentemente, diferentes lógicas fuzzy [BAAZ & HÁJEK, 2001; TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005].

Uma t-norma é uma operação binária utilizada geralmente para representar o operador and, ou a intersecção. Definimos como uma função T: $[0;1]^2 \rightarrow [0;1]$ que é [TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005]:

- Simétrica ($T(x,y) = T(y,x)$, $\forall x, y \in [0,1]$);
- Associativa ($T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$);
- Monotônica (se $x \leq x'$ e $y \leq y'$ então $T(x,y) \leq T(x',y')$, $\forall x, x', y, y' \in [0,1]$);
- e 1 é o elemento neutro ($T(x,1) = x$, $\forall x \in [0,1]$).

Existe uma infinidade de t-normas, dentre as quais temos:

- T-norma de Gödel (G), definida por $G(x,y) = \min (x,y)$;
- T-norma de Lukasiewicz, que é definida por $L = \max(0, x+y-1)$;

- T-norma fraca (W) onde: $W(x,y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{se } \max\{x, y\} = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- T-norma produto: $P(x,y) = xy$

Proposição 5: Seja T uma t-norma qualquer, então:

$$W(x,y) \leq T(x,y) \leq G(x,y),\ \forall x, y \in [0,1].$$

Demonstração: Pela monotonicidade, simetria e a condição extrema; temos: $T(x,y) \leq T(x,1) \leq x$, $T(x,y) = T(y,x) \leq T(y,1) \leq y$. E isso significa que $T(x,y) \leq \min\{x,y\}$. Portanto, $T \leq G$. Por outro lado, se $\max(x,y) \neq 1$, então $W(x,y) = 0$ e, assim, $W(x,y) \leq T(x,y)$. Se $\max(x,y) = 1$, então $x = 1$ ou $y = 1$. Suponha que $x = 1$ (análogo para o caso de $y = 1$); logo $W(x,y) = \min(x,y) = y = T(y,1) = T(y,x) = T(x,y)$. Portanto, $W(x,y) \leq T(x,y)$.

Quando se descrevem incertezas com graus de pertinências imprecisos, o mais correto seria utilizar intervalos como graus de pertinências. Portanto, a noção de t-norma deve ser estendida para intervalos. Assim, a idéia de t-norma intervalar, definida em [BEDREGAL & TAKAHASHI[1], 2005; TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005], propôs que dado o conjunto $I = \{[a,b] \ / \ 0 \leq a \leq b \leq 1\} : X \subseteq [0,1]\}$; $IT = I^2 \rightarrow I$ é uma t-norma intervalar, ou it-norma, se IT satisfaz as propriedades de simetria, associatividade, monotonicidade (com respeito a ordem $\leq_{KM}$ e a ordem de inclusão) e 1 é o elemento neutro.

Proposição 6: Se $T: [0;1]^2 \rightarrow [0;1]$ é uma t-norma real, então $I[T]: I[0;1]^2 \rightarrow I[0;1]$ definida por $I[T](X;Y) = [T(\underline{x}, \underline{y});\ T(\overline{x}, \overline{y})]$ é uma t-norma intervalar, denominada de t-norma intervalar derivada de T (ver demonstração em [TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005]).

2.5.3. Classes de T-normas

Como já citado anteriormente, uma t-norma satisfaz as propriedades de simetria, associatividade, monotonicidade e um identidade.

Proposição 7: Seja T uma t-norma, então $T(0,y) = 0$ para cada $y \subset [0,1]$.

Demonstração: Uma vez que $T_G(0,y) = \min\{0,y\} = 0$ e pela proposição 5 $T \leq T_G$, $T(0,y) = 0$.

Um elemento $x \neq 0$ é chamado divisor de zero se existe $y \neq 0$ tal que $T(x,y) = 0$. E seja T uma t-norma sem divisores de zero, então $T(x,y) = 0$ se e somente se $x = 0$ ou $y = 0$

Chamamos uma t-norma T de Arquimediana se para todo $x,y \in (0,1)$ existe um número inteiro positivo tal que $T^n(x) < y$, onde $T^1(x) = T(x,x)$ e $T^{i+1}(x) = T(x,T^i(x))$. T é uma t-norma contínua se ela é contínua na topologia usual de [0,1] (e [0,1]x[0,1]). Uma t-norma contínua T é Arquimediana se e somente se para cada $x \in (0,1)$, $T(x,x) < x$. Uma t-norma contínua e Arquimediana que tem pelo menos um divisor de zero é chamada nilpotente. T-normas contínuas, Arquimedianas e sem divisores de zero são chamadas estritas. Ou seja, a t-norma T é estrita se e somente se para cada $x,y,z \in [0,1]$ tal que $x < y$ e $0 < z$, $T(x,z) < T(y,z)$. [KLEMENT & NAVARA, 1999; NAVARA, 1999]. Assim, podemos notar claramente que T_L, T_G e T_W não são estritas. Uma t-norma é idempotente se e somente se $T(x,x) = x$ para cada $x \in [0,1]$. T_G é idempotente, por exemplo. Uma t-norma T é GWW-convexa se $T(x,y) \leq c \leq T(x',y')$ então existe um u e v entre x e x' e entre y e y', respectivamente, tal que $T(u,v) = c$. [GEHRKE et al., 1998]

2.5.4. T-conormas e t-conormas intervalares

A conorma triangular (t-conorma ou co-norma) é utilizada em conjuntos fuzzy para representar o operador clássico de união e disjunção [BEDREGAL & TAKAHASHI, 2005a]. Uma t-conorma é uma função S: $[0;1]^2 \rightarrow [0;1]$ que é: simétrica, associativa, monotônica e 0 é o elemento neutro. Seja T uma t-norma, então, $S_T(x; y) = 1\text{-}T(1\text{-}x; 1\text{-}y)$; é uma t-conorma, denominada de t-conorma derivada de T. As t-conormas mais comuns são:

- Máximo: max(x,y) = max {x,y}
- Lukasiewicz: $S_L(x,y) = \min\{x+y,1\}$
- Probabilística: $S_P(x,y) = x + y - xy$
- Forte: $\text{STRONG}(x,y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{se } \min\{x, y\} = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Proposição 8: Seja S uma t-conorma, então:

$$\max\{x,y\} \leq S(x,y) \leq \text{STRONG}(x,y), \forall x, y \in [0,1].$$

Demonstração: Pela monotonicidade, simetria e a condição extrema; temos: $S(x,y) \geq S(x,0) \geq x$, $S(x,y) = S(y,x) \geq S(y,0) \geq y$. Isso significa que $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$. Portanto, $\max\{x,y\} \leq S(x,y)$. Por outro lado, se $\min(x,y) \neq 0$, então STRONG(x,y) = 1 e, assim, $\text{STRONG}(x,y) \geq S(x,y)$. Se min(x,y) = 0, então x = 0 ou y = 0. Suponha que x = 0 (análogo para o caso de y = 0); logo STRONG(x,y) = max(x,y) = y = S(y,0) = S(y,x) = S(x,y). Portanto, $S(x,y) \leq \text{STRONG}(x,y)$.

A t-conorma intervalar é uma extensão da t-conorma e é definida por: IS: $I[0;1]^2 \rightarrow I[0;1]$ que é simétrica, associativa, monotônica e 0 é o elemento neutro.

Proposição 9: Se $S : [0;1]^2 \rightarrow [0;1]$ é uma t-conorma, então $I[S] : I[0;1]^2 \rightarrow I[0;1]$ definida por $I[S](X;Y) = [S(\underline{x}, \underline{y}); S(\overline{x}, \overline{y})]$ é uma t-conorma intervalar, denominada de t-conorma intervalar derivada da t-conorma S.

Proposição 10: Seja IT uma t-norma intervalar. Então SIT: $I[0;1]^2 \rightarrow I[0;1]$ definida por SIT (X;Y) = [1;1] - IT([1;1] - X; [1;1] - Y) é uma t-conorma intervalar, denominada de t-conorma intervalar derivada de IT.

Demonstrações: Ver [TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005].

2.5.5. Implicação e implicação intervalar

Entendendo o operador de implicação como uma forma de modelar regras de inferência do tipo se <premissa> então <conclusão>, temos que uma função P: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ é uma função de implicação se satisfaz as seguintes propriedades:

P1: Se $x \leq z$ implica que $P(x,y) \geq P(z,y)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$.

P2: Se $y \leq z$ implica que $P(x,y) \leq P(x,z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$.

P3: $P(0,y) = 1$, $\forall y \in [0,1]$.

P4: $P(x,1) = 1$, $\forall y \in [0,1]$.

P5: $P(1,0) = 0$.

Seja T uma t-norma, então a função $P_T(x,y) = \sup\{z \mid T(x,z) \leq y\}$, $\forall x, y, z \in [0,1]$ é uma implicação chamada de R-implicação associada a T.

Em [TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005], definiu-se implicação intervalar como uma função IP: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ se $\forall X, Y, Z \in I[0,1]$, fossem satisfeitas as seguintes propriedades:

IP1a) Se $X \leq Z$ então $IP(X,Y) \geq IP(Z,Y)$;

IP1b) Se $X \subseteq Z$ então $IP(X,Y) \supseteq IP(Z,Y)$;

IP2a) Se $Y \leq Z$ então $IP(X,Y) \geq IP(X,Z)$;

IP2b) Se $Y \subseteq Z$ então $IP(X,Y) \supseteq IP(X,Z)$;

IP3) $IP([0,0],Y) = [1,1]$;

IP4) $IP(X,[1,1]) = X$; e

IP5) $IP([1,1],[0,0]) = [0,0]$;

Além disso, seja IT uma t-norma intervalar, então $IP_{IT}: I[0,1]^2 \rightarrow I[0,1]$, definida por $IP_{IT}(X,Y) = \sup\{Z \in I[0,1] \mid IT(X,Z) \leq_{KM} Y\}$ é ima implicação intervalar. Também foi provado por Takahashi e Bedregal que a construção de uma implicação intervalar a partir da implicação derivada de uma t-norma, corresponde com a de implicação intervalar derivada da t-norma intervalar obtida a partir da t-norma.

2.5.6. Complemento e complemento intervalar

A complementação interpreta o operador lógico de negação. Assim, uma função $C: [0,1] \rightarrow [0,1]$ é um complemento se satisfaz:

- $C(0) = 1$ e $C(1) = 0$;
- Se $x \geq y$ então $C(x) \leq C(y)$, $\forall x, y \in [0,1]$;

C é chamado complemento forte se também satisfaz a propriedade a seguir: $C(C(x)) = x$, $\forall x \in [0,1]$.

O complemento intervalar deriva da idéia do complemento dos conjuntos fuzzy, satisfazendo suas propriedades e também as propriedades da teoria intervalar. Desta maneira, uma função $IC: I[0,1] \rightarrow I[0,1]$ é um complemento intervalar se:

- $IC([0,0]) =[1,1]$ e $IC([1,1]) = [0,0]$;

- Se $X \geq Y$ então $IC(X) \leq IC(Y)$, $\forall X,Y \in \mathbb{I}[0,1]$;
- Se $X \subseteq Y$ então $IC(X) \subseteq IC(Y)$, $\forall X,Y \in \mathbb{I}[0,1]$;

IC é chamado complemento intervalar forte se $IC(IC(X)) = X$, $\forall X \in \mathbb{I}[0,1]$.

Proposição 11: Se C: [0;1] → [0;1] é um complemento, então IC : I[0;1] → I[0;1] definido por $I[C](X) = [C(\overline{x}); C(\underline{x})]$ é um complemento intervalar, denominado de complemento intervalar derivado do complemento C. Se C é um complemento forte então I[C] é um complemento intervalar forte (ver demonstração em [TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005]).

3. ESTADO DA ARTE

A seguir veremos três trabalhos relacionados com o nosso trabalho.

3.1 T-Normas, T-Conormas, Complementos e Implicações Intervalares

Em [BEDREGAL & TAKAHASHI, 2005a; TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005], Takahashi e Bedregal apresentaram uma extensão intervalar dos modelos fuzzy para os operadores lógicos de conjunção, disjunção, implicação e negação. Também mostraram como são preservadas pela construção intervalar as formas canônicas de alguns desses operadores obtidas a partir da t-norma. A extensão que foi proposta no trabalho deles difere de outras generalizações, como a definida em [ZUO, 1995], onde se exige que a função seja contínua e estritamente monotônica com respeito à ordem de Kulisch-Miranker, com o qual nem toda t-norma real teria uma t-norma intervalar que estendesse a ela.

As generalizações apresentadas por eles demarcaram o início de um estudo sobre a lógica fuzzy intervalar nas quais, construções e conceitos usuais para o caso pontual fossem estendidos, mas que preservassem as relações entre eles dentro do possível. A proposta deste trabalho tem, como um dos objetivos, dar continuidade ao estudo de [BEDREGAL & TAKAHASHI, 2005a; TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005], no sentido de se estender os conectivos fuzzy, mas agora não só para um reticulado mais genérico ($\mathbb{I}[0,1]$, $\leq_{KM}$) senão para um reticulado completo arbitrário.

3.2. L-Fuzzy Valued Inclusion Measure, L-Fuzzy Similarity and L-Fuzzy Distance

Em [KEHAGIAS & KONSTANTINIDOU, 2001], Kehagias e Konstantinidou introduziram uma medida de inclusão, denotada por I(A,B), ou seja, o grau que o subconjunto fuzzy A está incluído no conjunto fuzzy B; uma medida de similaridade, denotada por S(A,B) e definida por: $S(A,B) = I(A,B) \wedge I(B,A)$; e a distância entre conjuntos fuzzy D(A,B), definida por: $D(A,B) = S'(A,B)$, onde a negação é denotada por " ' " . A diferença entre o trabalho deles e de outros autores é o fato de que tradicionalmente, medidas de inclusão, similaridade e distância consideram valores entre o intervalo [0,1] ou outro subconjunto totalmente ordenado do intervalo real $[0, \infty)$, enquanto que Kehagias e Konstantinidou consideram reticulados. De fato, I(.,.), S(.,.) e D(.,.) são funções sobre reticulados Booleanos arbitrários. Uma vez que B é um conjunto parcialmente (e não totalmente) ordenado, segue-se que a inclusão, similaridade e distância propostas são L-fuzzy relações valoradas entre conjuntos fuzzy.

3.3. A classification of BL-algebras

BL-álgebras surgem naturalmente na análise da prova da teoria das lógicas fuzzy proposicionais [LASKOWSKI & SHASHOUA, 2002]. De fato, em [HÁJEK, 1998], introduziu-se o sistema de axiomas da lógica básica (BL) para lógicas proposicionais e definiu-se a classe das BL-álgebras. Ele mostra que uma fórmula proposicional φ é provável de axiomas BL se, e somente se, a fórmula φ é uma *M*-tautologia para cada BL-álgebra *M*.

Definição 3: Uma BL-álgebra é uma estrutura M = (M, *, $\Rightarrow$, $\leq$, $\cap$, $\cup$, 0, 1) que satisfaz:

i) (M, $\leq$, $\cap$, $\cup$, 0, 1) é um reticulado onde 0 é o menor elemento e 1, o maior (com respeito à ordem dos reticulados $\leq$)

ii) (M, *, 1) é um semi-grupo Abeliano, com 1 sendo o elemento neutro de *.

iii) Para todo x, y, z $\in$ M, z $\leq$ (x $\Rightarrow$ y) se, e somente se, x*z $\leq$ y.

iv) Para todo x, y $\in$ M, x*(x $\Rightarrow$ y) = x $\cap$ y.

v) Para todo x, y $\in$ M, (x $\Rightarrow$ y) $\cup$ (y $\Rightarrow$ x) = 1.

4. CONTRIBUIÇÕES

4.1. L-T-normas

Nossa visão difere das apresentadas por [KEHAGIAS & KONSTANTINIDOU, 2001] e [HÁJEK, 1998] como veremos a seguir.

A proposta de Kehagias e Konstantinidou não estende os conectivos fuzzy para reticulados, pois usam os próprios operadores dos reticulados como conectivos, mas para o caso de [0,1] o operador $\wedge$ do reticulado não necessariamente teria de ser uma t-norma (analogamente com os outros) e a ordem adjacente ao reticulado não necessariamente seria a usual.

As BL-álgebras em [HÁJEK, 1998] generalizam as lógicas fuzzy para esta classe de reticulados estendidos, porém eles não generalizam os conceitos de t-normas e seus correlatos. De fato podemos ter uma BL álgebra cujo conjunto base seja [0,1] e * não seja uma t-norma.

A seguir, introduziremos uma extensão das t-normas para reticulados completos, na qual a t-norma não seja necessariamente a operação $\wedge$ inerente ao reticulado e que para o caso dos reticulados completos ([0,1], $\leq$,0,1) e (**I**[0,1], $\leq_{KM}$,[0,0],[1,1]) coincidam com as t-normas e t-normas intervalares, respectivamente.

Definição 4: Seja L = $\langle R, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ um reticulado completo. Uma L-T-norma é uma operação onde LT: $R^2 \rightarrow R$ que é simétrica, associativa, monotônica com respeito à ordem $\leq_L$ e LT (x,1) = x.

Podemos generalizar algumas das t-normas vistas anteriormente para reticulados arbitrários. Por exemplo:

- Para Gödel: $G_L : RxR \rightarrow R$ é definido por $G_L(x,y) = x \wedge y$. Assim, o operador $\wedge$ é uma L-T-norma.

- Para a L-T-norma fraca (W_L) temos:

$$W_L(x,y) = \begin{cases} x \wedge y, & \text{se } x \vee y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Para Lukasiewicz: não é possível, pois utiliza elementos externos aos reticulados (álgebra maior) e, portanto, não pode ser generalizada.

- Para a t-norma produto: analogamente a Lukasiewicz, não pode ser generalizada.

Podemos definir uma ordem entre as L T normas:

Definição 5: $LT_1 \leq_L LT_2$ se, e somente se, para todo $x,y \in R$, $LT_1(x,y) \leq_L LT_2(x,y)$.

Proposição 12: Seja LT uma L-T-norma qualquer. Então:

$$W_L(x,y) \leq_L LT(x,y) \leq_L G_L(x,y), \forall x, y \in [0,1].$$

Demonstração: Considerando as propriedades de monotonicidade, simetria e a condição extrema; temos: $LT(x,y) \leq_L LT(x,1) = x$, $LT(x,y) = LT(y,x) \leq_L LT(y,1) = y$. E isso significa que $LT(x,y) \leq_L x \wedge y$. Portanto, $TL \leq_L G_L$. Por outro lado, se $x \vee y \neq 1$, então $W_L(x,y) = 0$ e, assim, $W_L(x,y) \leq_L TL(x,y)$. Se $x \vee y = 1$, então $x = 1$ ou $y = 1$. Suponha que $x = 1$ (análogo para o caso de $y = 1$); logo $W_L(x,y) = x \wedge y = y = LT(y,1) = LT(y,x) = LT(x,y)$. Portanto, $W_L(x,y) \leq_L LT(x,y)$.

Definições 6:

Um elemento $x \neq 0$ é chamado zero divisor se existe $y \neq 0$ tal que $LT(x,y) = 0$. E seja LT uma L-T-norma sem divisores de zero, então $LT(x,y) = 0$ se e somente se $x = 0$ ou $y = 0$.

Chamamos uma L-T-norma LT de L-T-norma Arquimediana se para todo x,y $\in$ (0,1) existe um número inteiro positivo n tal que $LT^n(x) <_L y$, onde $LT^1(x) = LT(x,x)$ e $LT^{i+1}(x) = LT(x,LT^i(x))$. LT é uma L-T-norma contínua se ela é contínua na topologia usual de [0,1] (e [0,1]x[0,1]), além disso é uma L-T-norma contínua e Arquimediana se e somente se para cada x $\in$ (0,1), $LT(x,x) <_L x$. Uma L-T-norma contínua e Arquimediana que tem pelo menos um divisor de zero é chamada nilpotente. L-T-normas contínuas, Arquimedianas e sem divisores de zero são chamadas estritas. Daí, podemos notar que LT_G e LT_W não são estritas. Uma LT é idempotente se e somente se LT(x,x) = x para cada x $\in$ [0,1]. LT_G é idempotente, por exemplo. E uma LT é GWW-convexa se $LT(x,y) \leq_L c \leq_L L(x',y')$ então existe um u e v entre x e x' e entre y e y', respectivamente, tal que LT(u,v) = c

Proposição 13: Sejam LT_1 e LT_2 L-T-normas tais que $LT_1 \leq_L LT_2$, então $I_L[LT_1, LT_2]([\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}]) = [LT_1(\underline{x}, \underline{y}), LT_2(\overline{x}, \overline{y})]$ é uma I_L-T-norma.

Demonstração: $I_L[LT_1,LT_2]$ é uma I_L-T-norma se for simétrica, associativa, monotônica com respeito à ordem $\leq_{IL}$ e $I_L[LT_1,LT_2]$ (X, [1,1]) = X.

Assim, sejam X, Y $\in$ I(R), pela definição de intervalos, $\underline{x} \leq \overline{x}$ e $\underline{y} \leq \overline{y}$, e pela monotonicidade das L-T-normas, $LT_1(\underline{x}, \underline{y}) \leq_L LT_1(\overline{x}, \overline{y})$. Uma vez que $LT_1 \leq_L LT_2$, $LT_1(\overline{x}, \overline{y}) \leq_L LT_2(\overline{x}, \overline{y})$. Assim, $LT_1(\underline{x}, \underline{y}) \leq_L LT_2(\overline{x}, \overline{y})$. Logo, $I_L[LT_1, LT_2]$ está bem definida.

- Simetria: $\forall$X, Y $\in$ R

$$\begin{aligned} I_L[LT_1, LT_2](X, Y) &= [LT_1(\underline{x}, \underline{y}), LT_2(\overline{x}, \overline{y})] \\ &= [LT_1(\underline{y}, \underline{x}), LT_2(\overline{y}, \overline{x})] \\ &= I_L[LT_1, LT_2](Y, X). \end{aligned}$$

- Associatividade: $\forall X, Y, Z \in R$

$$I_L[LT_1, LT_2]\,(X, I_L[LT_1, LT_2]\,(Y, Z)) =$$

$$I_L[LT_1, LT_2]\,(X, [LT_1(\underline{y}, \underline{z}), LT_2(\overline{y}, \overline{z})]) =$$

$$[LT_1(\underline{x}, LT_1(\underline{y}, \underline{z})), LT_2(\overline{x}, LT_2(\overline{y}, \overline{z}))] =$$

$$[LT_1(LT_1(\underline{x}, \underline{y}), \underline{z}), LT_2(LT_2(\overline{x}, \overline{y}), \overline{z})] =$$

$$I_L[LT_1, LT_2]([LT_1(\underline{x}, \underline{y}), LT_2(\overline{x}, \overline{y})], Z) =$$

$$I_L[LT_1, LT_2](\, I_L[LT_1, LT_2](X, Y), Z).$$

- Monotonicidade: $\forall X, Y, Z, W \in R$

Se $X \leq_L Z$ e $Y \leq_L W$ então $\underline{x} \leq_L \underline{z}$, $\overline{x} \leq_L \overline{z}$, $\underline{y} \leq_L \underline{w}$, $\overline{y} \leq_L \overline{w}$. Assim, $LT_1(\underline{x}, \underline{y}) \leq_L LT_1(\underline{z}, \underline{w})$ e $LT_2(\overline{x}, \overline{y}) \leq_L LT_2(\overline{z}, \overline{w})$. Desta forma, $[LT_1(\underline{x}, \underline{y}), LT_2(\overline{x}, \overline{y})] \leq_{IL} [LT_1(\underline{z}, \underline{w}), LT_2(\overline{z}, \overline{w})]$ e, portanto, $I_L[LT_1, LT_2](X,Y) \leq_{IL} I_L[LT_1, LT_2](Z,W)$.

- Identidade: $\forall X \in R$

$$\begin{aligned} I_L[LT_1, LT_2]\,(X, [1,1]) &= [LT_1(\underline{x},1), LT_2(\overline{x},1)] \\ &= [\underline{x}, \overline{x}] \\ &= X. \end{aligned}$$

Obtemos, desta forma, a idéia de I_L-T-norma para um reticulado completo, onde I_L é o construtor intervalar sobre reticulados. Além disso, a I_L-T-norma satisfaz as propriedades de simetria, associatividade, monotonicidade (com respeito à ordem $\leq_{IL}$) e [1,1] é o elemento neutro.

4.2. L-T-conormas

Analogamente, podemos definir L-T-conorma como uma operação onde LS: $R^2 \to R$ que é simétrica, associativa, monotônica com respeito à ordem $\leq_L$ e LS (x,0) = x.

Generalizando algumas das t-conormas vistas anteriormente para reticulados arbitrários temos, por exemplo:

- $sup_{LS}(x,y) = x \vee y$. Assim o operador $\vee$ é uma L-T-conorma.
- Para a t-conorma forte (STRONG) temos:

$$STRONG_{LS}(x,y) = \begin{cases} x \vee y, & \text{se } x \wedge y = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Para Lukasiewicz: não é possível, pois utiliza elementos externos aos reticulados (álgebra maior) e, portanto, não pode ser generalizada.
- Para a t-norma probabilística: não pode ser generalizada, análoga a Lukasiewicz.

Proposição 14: Seja LS um L-T-conorma qualquer, então:

$$max_{LS}(x,y) \leq_L LS(x,y) \leq_L STRONG_{LS}(x,y),\ \forall x, y \in [0,1].$$

Demonstração: Considerando as propriedades de monotonicidade, simetria e a condição extrema; temos: $LS(x,y) \geq_L LS(x,0) = x$, $LS(x,y) = LS(y,x) \geq_L LS(y,0) = y$. E isso significa que $LS(x,y) \geq_L x \vee y$. Portanto, $sup_{LS}\{x,y\} \leq_L LS(x,y)$. Por outro lado, se $x \wedge y \neq 0$, então $STRONG_{LS}(x,y) = 1$ e, assim, $STRONG_{LS}(x,y) \geq_L LS(x,y)$. Se $x \wedge y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$. Suponha que $x = 0$ (análogo para o caso de $y = 0$); logo $STRONG_{LS}(x,y) = x \vee y = y = LS(y,0) = LS(y,x) = LS(x,y)$. Portanto, $LS(x,y) \leq_L STRONG_{LS}(x,y)$.

Proposição 15: Sejam LS_1 e LS_2 L-T-conormas então $I_L[LS_1,LS_2]([\underline{x},\overline{x}], [\underline{y},\overline{y}]) = [LS_1(\underline{x},\underline{y}), LS_2(\overline{x},\overline{y})]$ é uma I_L-T-conorma.

A I_L-T-conorma é uma extensão da L-T-conorma e é simétrica, associativa, monotônica e [0,0] é o elemento neutro.

Demonstração: Pela definição de intervalos, $\underline{x} \leq \overline{x}$ e $\underline{y} \leq \overline{y}$, e pela monotonicidade das L-T-conormas, $LS_1(\underline{x},\underline{y}) \leq_L LS_1(\overline{x},\overline{y})$. Uma vez que $LS_1 \leq_L LS_2$, $LS_1(\overline{x},\overline{y}) \leq_L LS_2(\overline{x},\overline{y})$. Assim, $LS_1(\underline{x},\underline{y}) \leq_L LS_2(\overline{x},\overline{y})$. Logo, $I_L[LS_1, LS_2]$ está bem definida.

- Simetria: $\forall X, Y \in R$

$$\begin{aligned} I_L[LS_1, LS_2](X, Y) &= [LS_1(\underline{x},\underline{y}), LS_2(\overline{x},\overline{y})] \\ &= [LS_1(\underline{y},\underline{x}), LS_2(\overline{y},\overline{x})] \\ &= I_L[LS_1, LS_2](Y, X). \end{aligned}$$

- Associatividade: $\forall X, Y, Z \in R$

$$\begin{aligned} & I_L[LS_1, LS_2](X, I_L[LS_1, LS_2](Y, Z)) = \\ & I_L[LS_1, LS_2](X, [LS_1(\underline{y},\underline{z}), LS_2(\overline{y},\overline{z})]) = \\ & [LS_1(\underline{x}, LS_1(\underline{y},\underline{z})), LS_2(\overline{x}, LS_2(\overline{y},\overline{z}))] = \\ & [LS_1(LS_1(\underline{x},\underline{y}),\underline{z}), LS_2(LS_2(\overline{x},\overline{y}),\overline{z})] = \\ & I_L[LS_1, LS_2]([LS_1(\underline{x},\underline{y}), LS_2(\overline{x},\overline{y})], Z) = \\ & I_L[LS_1, LS_2](I_L[LS_1, LS_2](X, Y), Z). \end{aligned}$$

- Monotonicidade: $\forall X, Y, Z, W \in R$.

  Se $X \leq_L Z$ e $Y \leq_L W$ então $\underline{x} \leq_L \underline{z}$, $\overline{x} \leq_L \overline{z}$, $\underline{y} \leq_L \underline{w}$, $\overline{y} \leq_L \overline{w}$. Assim, $LS_1(\underline{x},\underline{y}) \leq_L LS_1(\underline{z},\underline{w})$ e $LS_2(\overline{x},\overline{y}) \leq_L LS_2(\overline{z},\overline{w})$. Desta forma,

$[LS_1(\underline{x}, \underline{y}),\ LS_2(\overline{x}, \overline{y})] \leq_{IL} [LS_1(\underline{z}, \underline{w}),\ LS_2(\overline{z}, \overline{w})]$ e, portanto, $I_L[LS_1, LS_2](X,Y) \leq_{IL} I_L[LS_1, LS_2](Z,W)$.

- Identidade: $\forall X \in R$

$$
\begin{aligned}
I_L[LS_1, LS_2]\,(X, [0,0]) &= [LS_1(\underline{x},0),\ LS_2(\overline{x},0)] \\
&= [\underline{x},\ \overline{x}] \\
&= X.
\end{aligned}
$$

4.3. L-complemento

Na teoria dos conjuntos fuzzy, o complemento interpreta o operador lógico de negação ($\neg$). Assim, seja L = <R, $\wedge$, $\vee$, 0, 1> um reticulado completo, chamaremos de L-complemento uma operação unária N_L sobre R, isto é, N_L: R $\rightarrow$ R onde:

- $N_L(0) = 1$ e $N_L(1) = 0$.
- Se $x \geq_L y$ então $N_L(x) \leq_L N_L(y)$, $\forall x, y \in R$;

N_L é chamada L-complemento forte se satisfaz a propriedade: $N_L(N_L(x)) = x$, $\forall x \in R$.

Proposição 16: Seja L= <R, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0, 1> uma álgebra de Morgan, então o complemento $\neg$ é um L-complemento forte.

Demonstração:

- Como $\vee$ é uma L-T-conorma, então $0 \vee \neg 0 = \neg 0$. Mas, por definição de complemento $0 \vee \neg 0 = 1$. Logo, $\neg 0 = 1$.
- Como $\wedge$ é uma L-T-norma, então $1 \wedge \neg 1 = \neg 1$. Mas, por definição de complemento $1 \wedge \neg 1 = 0$. Logo, $\neg 1 = 0$.

- Seja $x \geq_L y$ então $x \vee y = x$ e, portanto, $\neg(x \vee y) = \neg x$. Logo como $\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$ então $\neg x \wedge \neg y = \neg x$. Conseqüentemente, $\neg x \leq_L \neg y$.
- $\neg\neg x = x$; direto da definição da álgebra de Morgan.

A noção de complemento intervalar também deriva da idéia do complemento dos conjuntos fuzzy, satisfazendo suas propriedades e também as propriedades da teoria intervalar.

Proposição 17: Seja N_L um L-complemento. Então $I[N_L]([x,y]) = [N_L(y), N_L(x)]$ é um I_L-complemento

Demonstração:

- $I[N_L]([0,0]) = [N_L(0), N_L(0)] = [1,1]$.
- $[\underline{x}, \overline{x}] \geq_{IL} [\underline{y}, \overline{y}]$ se, e somente se, $[\underline{x}, \overline{x}] \sqcap [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{y}, \overline{y}]$

  se, e somente se, $[\underline{x} \wedge \underline{y},\ \overline{x} \wedge \overline{y}] = [\underline{y}, \overline{y}]$

  se, e somente se, $\underline{x} \wedge \underline{y} = \underline{y}$ e $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$

  se, e somente se, $\underline{x} \geq_L \underline{y}$ e $\overline{x} \geq_L \overline{y}$

  se, e somente se, $N_L(\underline{x}) \leq_L N_L(\underline{y})$ e $N_L(\overline{x}) \leq_L N_L(\overline{y})$

  se, e somente se, $I[N_L](X) \leq_{I_L} I[N_L](Y)$.

Proposição 18: Seja N_L um L-complemento forte então $I[N_L]$ é um I_L-complemento forte.

Demonstração: Pela proposição anterior, sabemos que $I[N_L]$ é um I_L-complemento. Assim só resta provar que é forte.

- Como $\vee$ é uma L-T-conorma, então $[0,0] \vee \neg[0,0] = \neg[0,0]$. Mas, por definição de complemento $[0,0] \vee \neg[0,0] = [1,1]$. Logo, $\neg[0,0] = [1,1]$.

- Como $\wedge$ é uma L-T-norma, então $[1,1] \wedge \neg[1,1] = \neg[1,1]$. Mas, por definição de complemento $[1,1] \wedge \neg[1,1] = [0,0]$. Logo, $\neg[1,1] = [0,0]$.
- Seja $X \geq_L Y$ então $X \vee Y = X$ e, portanto, $\neg(X \vee Y) = \neg X$. Logo como $\neg X \wedge \neg Y = \neg(X \vee Y)$ então $\neg X \wedge \neg X = \neg X$. Conseqüentemente, $\neg X \leq_L \neg Y$.
- $\neg\neg X = X$; direto da definição da álgebra de Morgan.

4.4. L-T-conormas obtidas canonicamente

Proposição 19: Podemos obter uma L-T-conorma de uma L-T-norma e de L-complementos fortes como mostra a igualdade: $LS(x,y) = N_L(LT(N_L(x),N_L(y)))$, daí podemos dizer que LS é derivada de LT e N_L.

Demonstração:

- Simetria: $\forall x, y \in R$

$$\begin{aligned} LS(x,y) &= N_L(LT(N_L(x), N_L(y))) \\ &= N_L(LT(N_L(y), N_L(x))) \\ &= LS(y,x). \end{aligned}$$

- Associatividade: $\forall x, y, z \in R$

$$\begin{aligned} LS(x,LS(y,z)) &= N_L(LT(N_L(x), N_L(SL(y,z)))) \\ &= N_L(LT(N_L(x), N_L(N_L(LT(N_L(y), N_L(z)))))) \\ &= N_L(LT(N_L(x), LT(N_L(y), N_L(z)))) \\ &= N_L(LT(LT(N_L(x), (N_L(y), N_L(z))))) \\ &= N_L(LT(LT((N_L(x), N_L(y)), N_L(z)))) \\ &= N_L(LT(N_L(N_L(LT((N_L(x), N_L(y)), N_L(z)))))) \\ &= LS(N_L(LT(N_L(x), N_L(y))), z) \\ &= LS(LS(x,y),z). \end{aligned}$$

- Monotonicidade: $\forall x, y, z, w \in R$ tais que $x \leq_L z$ e $y \leq_L w$.

  Sabendo que $LS(x,y) = N_L(LT(N_L(x), N_L(y)))$ e $LS(z,w) = N_L(LT(N_L(z), N_L(w)))$, e pela monotonicidade de LT, podemos concluir que $N_L(LT(N_L(x), N_L(y))) \leq_L N_L(LT(N_L(z), N_L(w)))$, ou seja, $LS(x,y) \leq_L LS(z,w)$.

- Identidade: $\forall x \in R$

$$\begin{aligned} LS(x,0) &= N_L(LT(N_L(x), N_L(0))) \\ &= N_L(LT(N_L(x),1)) \\ &= N_L(N_L(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

4.5 L-implicação, L-Bi-implicação

Definiremos a seguir L-implicações/L-residuum e L-Bi-implicações que interpretam os operadores lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Definição 7: Seja $L = \langle R, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ um reticulado completo e P_L uma operação binária em R, dizemos que P_L é uma L-implicação se as seguintes propriedades são satisfeitas, $\forall x, y, z \in R$:

- Se $x \leq_L z$, então $P_L(x,y) \geq_L P_L(z,y)$;
- Se $y \leq_L z$, então $P_L(x,y) \leq_L P_L(x,z)$;
- $P_L(0,y) = 1$;
- $P_L(x,1) = 1$;
- $P_L(1,0) = 0$.

Ainda, para qualquer L-T-norma (LT) chamaremos L-residuum (R_{LT}) de LT a operação R_{LT}: $RxR \rightarrow R$, definida por $R_{LT}(x,y) = \sup\{z \in R \ / \ LT(x,z) \leq_L y\}$

Proposição 20: $R_{LT}(x,y) = 1$ se, e somente se $x \leq_L y$.

Demonstração:

Se $R_{LT}(x,y) = 1$ então $\sup\{z / LT(x,z) \leq_L y\} = 1$ e, portanto, para todo $z \leq_L 1$, $LT(x,z) \leq_L y$. Logo, em particular, $LT(x,1) \leq_L y$. Por tanto, $x \leq_L y$.

Se $x \leq_L y$ então $LT(x,1) \leq_L y$ e, por tanto, $\sup\{z / LT(x,z) \leq_L y\} = 1$, ou seja $R_{LT}(x,y) = 1$.

Proposição 21: O L-residuum de uma L-T-norma é uma L-implicação.

Demonstração:

- Se $x \leq_L z$, então para todo w em R, $LT(x,w) \leq_L LT(z,w)$. Logo, $\{w / LT(z,w) \leq_L y\} \subseteq \{w / LT(x,w) \leq_L y\}$. Portanto, $\sup\{w / LT(z,w) \leq_L y\} \leq_L \sup\{w / LT(x,w) \leq_L y\}$, isto é, $R_{LT}(x,y) \geq_L R_{LT}(z,y)$;
- Se $y \leq_L z$, então para todo x em R, $\{w / LT(x,w) \leq_L y\} \subseteq \{w / LT(x,w) \leq_L z\}$. Portanto, $\sup\{w / LT(x,w) \leq_L y\} \leq_L \sup\{w / LT(x,w) \leq_L z\}$, isto é, $R_{LT}(x,y) \leq_L R_{LT}(x,z)$;
- $R_{LT}(0,y) = 1$, direto da proposição 20;
- $R_{LT}(x,1) = 1$, direto da proposição 20;
- $R_{LT}(1,0) = 0$. Como $\{z / LT(1,z) \leq_L 0\} = \{0\}$ então $R_{LT}(1,0) = \sup\{0\} = 0$.

Proposição 22: Seja P_L uma L-implicação então $I_L[P_L]([\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}]) = [P_L(\underline{x}, \underline{y}), P_L(\overline{x}, \overline{y})]$ é uma I_L-implicação .

Demonstração:

Seja $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ e $Z = [\underline{z}, \overline{z}]$;

- $X \leq_{IL} Z$ se, e somente se, $X \sqcap Z = X$

  se, e somente se, $[\underline{x} \wedge \underline{z}, \overline{x} \wedge \overline{z}] = [\underline{x}, \overline{x}]$

  se, e somente se, $\underline{x} \wedge \underline{z} = \underline{x}$ e $\overline{x} \wedge \overline{z} = \overline{x}$

se, e somente se, $\underline{x} \leq_L \underline{z}$ e $\overline{x} \leq_L \overline{z}$

implica que, $P_L(\underline{x},\underline{y}) \geq_L P_L(\underline{z},\underline{y})$ e $P_L(\overline{x},\overline{y}) \geq_L P_L(\overline{z},\overline{y})$

se, e somente se, $[P_L(\underline{x},\underline{y}), P_L(\overline{x},\overline{y})] \geq_{IL} [P_L(\underline{z},\underline{y}), P_L(\overline{z},\overline{y})]$

se, e somente se, $I[P_L](X,Y) \geq_{IL} I[P_L](Z,Y)$;

- $Y \leq_{IL} Z$ se, e somente se, $Y \sqcap Z = Y$

  se, e somente se, $[\underline{y} \wedge \underline{z}, \overline{y} \wedge \overline{z}] = [\underline{y},\overline{y}]$

  se, e somente se, $\underline{y} \wedge \underline{z} = \underline{y}$ e $\overline{y} \wedge \overline{z} = \overline{y}$

  se, e somente se, $\underline{y} \leq_L \underline{z}$ e $\overline{y} \leq_L \overline{z}$

  implica que, $P_L(\underline{x},\underline{y}) \leq_L P_L(\underline{x},\underline{z})$ e $P_L(\overline{x},\overline{y}) \leq_L P_L(\overline{x},\overline{z})$

  se, e somente se, $[P_L(\underline{x},\underline{y}),P_L(\overline{x},\overline{y})] \leq_L [P_L(\underline{x},\underline{z}),P_L(\overline{x},\overline{z})]$

  se, e somente se, $I[P_L](X,Y) \leq_{IL} I[P_L](X,Z)$;

- $I_L[P_L]([0,0], [\underline{y},\overline{y}]) = [P_L(0,\underline{y}), P_L(0_1,\overline{y})]$

  $= [1,1]$; direto da definição 7.

- $I_L[P_L]([\underline{x},\overline{x}], [1,1]) = [P_L(\underline{x},1), P_L(\overline{x},1)]$

  $= [1,1]$; direto da definição 7.

- Como $\{Z \,/\, I_L[LT_1,LT_2]([1,1],Z) \leq_{IL} [0,0]\} = \{[0,0]\}$ então $I_L[P_L]([1,1], [0,0]) = \sup\{[0,0]\} = [0,0]$.

Proposição 23: Seja ILT uma I_L-T-norma, então R_{ILT} é uma I_L-implicação.

Demonstração:

- Se $X \leq_{IL} Z$, então para todo W em I(R), $ILT(X,W) \leq_{IL} ILT(Z,W)$. Logo, $\{W \,/\, ILT(Z,W) \leq_{IL} Y\} \subseteq \{W \,/\, ILT(X,W) \leq_{IL} Y\}$. Portanto, $\sup\{W \,/\, ILT(Z,W) \leq_{IL} Y\} \leq_{IL} \sup\{W \,/\, ILT(X,W) \leq_{IL} Y\}$, isto é, $R_{ILT}(X,Y) \geq_{IL} R_{ILT}(Z,Y)$;

- Se $Y \leq_{IL} Z$, então para todo X em I(R) $\{W \mid ILT(X,W) \leq_{IL} Y\} \subseteq \{W \mid ILT(X,W) \leq_{IL} Z\}$. Portanto, $\sup\{W \mid ILT(X,W) \leq_{IL} Y\} \leq_{IL} \sup\{W \mid ILT(X,W) \leq_{L} Z\}$, isto é, $R_{ILT}(X,Y) \leq_{IL} R_{ILT}(X,Z)$;
- $R_{ILT}([0,0], Y) = \sup\{W \mid ILT([0,0],W) \leq_{IL} Y\} = \sup I(R) = [1,1]$;
- $R_{ILT}(X,[1,1]) = \sup\{W \mid ILT(X,W) \leq_{IL} [1,1]\} = \sup I(R) = [1,1]$;
- $R_{ILT}([1,1], [0,0]) = \sup\{W \mid ILT([1,1],W) \leq_{IL} [0,0]\} = \sup \{[0,0]\} = [0,0]$.

Definição 8: Seja L um reticulado completo e B_L uma operação binária sobre R, então B_L é uma L-Bi-implicação se as propriedades abaixo são satisfeitas, $\forall x, y, z \in R$:

- $B_L(x,y) = B_L(y,x)$;
- Se $x = y$ então $B_L(x,y) = 1$;
- $B_L(0,1) = 0$;
- Se $x \leq_L y \leq_L z$, então $B_L(x,y) \geq_L B_L(x,z)$;
- Se $x \leq_L y \leq_L z$, então $B_L(y,z) \leq_L B_L(x,z)$;

Proposição 24: Seja B_L uma L-Bi-implicação então $I_L[B_L]([\underline{x},\overline{x}], [\underline{y},\overline{y}])$ $([\underline{x},\underline{y}],[\overline{x},\overline{y}]) = [\min \{B_L(\underline{x},\underline{y}), B_L(\overline{x},\overline{y})\}, \max \{B_L(\underline{x},\underline{y}), B_L(\overline{x},\overline{y})\}]$ é uma I_L-Bi-implicação .

Demonstração:

- $I_L[B_L]([\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}]) = [\min \{B_L(\underline{x},\underline{y}),B_L(\overline{x},\overline{y})\}, \max \{B_L(\underline{x},\underline{y}),B_L(\overline{x},\overline{y})\}]$

  $= [\min \{B_L(\overline{x},\overline{y}),B_L(\underline{x},\underline{y})\}, \max \{B_L(\overline{x},\overline{y}),B_L(\underline{x},\underline{y})\}]$

  $= I_L[B_L]([\underline{y},\overline{y}] ,[\underline{x},\overline{x}])$

- Se $[\underline{x},\overline{x}] = [\underline{y},\overline{y}]$ então $I_L[B_L]([\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}]) = [1,1]$

  $I_L[B_L]([\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}]) =[\min \{B_L(\underline{x},\underline{y}), B_L(\overline{x},\overline{y})\}, \max \{B_L(\underline{x},\underline{y}), B_L(\overline{x},\overline{y})\}]$

$=[\min\{B_L(\underline{x},\underline{x}), B_L(\overline{x},\overline{x})\}, \max\{B_L(\underline{x},\underline{x}), B_L(\overline{x},\overline{x})\}]$

$=[\min\{1,1\}, \max\{1,1\}]$

$=[1,1]$

- $I_L[B_L]([0,0],[1,1]) = [\min\{B_L(0,1), B_L(0,1)\}, \max\{B_L(0,1), B_L(0,1)\}]$

  $= [B_L(0,1), B_L(0,1)]$

  $= [0,0]$

- $X \leq_{IL} Y \leq_{IL} Z$, se, e somente se, $\underline{x} \leq_L \underline{y} \leq_L \underline{z}$ e $\overline{x} \leq_L \overline{y} \leq_L \overline{z}$

  implica que, $B_L(\underline{x},\underline{y}) \geq_L B_L(\underline{x},\underline{z})$ e $B_L(\overline{x},\overline{y}) \geq_L B_L(\overline{x},\overline{z})$

  se, e somente se, $[\min\{B_L(\underline{x},\underline{y}),B_L(\overline{x},\overline{y})\}, \mathrm{Max}\{B_L(\underline{x},\underline{y}), B_L(\overline{x},\overline{y})\}] \geq_L [\min\{B_L(\underline{x},\underline{z}),B_L(\overline{x},\overline{z})\},\mathrm{Max}\{B_L(\underline{x},\underline{z}),B_L(\overline{x},\overline{z})\}]$

  se, e somente se, $I[B_L](X,Y) \geq_{IL} I[B_L](X,Z)$;

- $X \leq_{IL} Y \leq_{IL} Z$, se, e somente se $\underline{x} \leq_L \underline{y} \leq_L \underline{z}$ e $\overline{x} \leq_L \overline{y} \leq_L \overline{z}$

  implica que, $B_L(\underline{x},\underline{y}) \leq_L B_L(\underline{x},\underline{z})$ e $B_L(\overline{x},\overline{y}) \leq_L B_L(\overline{x},\overline{z})$

  se, e somente se, $[\min\{B_L(\underline{x},\underline{y}),B_L(\overline{x},\overline{y})\}, \mathrm{Max}\{B_L(\underline{x},\underline{y}), B_L(\overline{x},\overline{y})\}] \leq_{IL} [\min\{B_L(\underline{x},\underline{z}),B_L(\overline{x},\overline{z})\},\mathrm{Max}\{B_L(\underline{x},\underline{z}),B_L(\overline{x},\overline{z})\}]$

  se, e somente se, $I[B_L](X,Y) \leq_{IL} I[B_L](X,Z)$.

2.4. Lógicas L-fuzzy ($\boldsymbol{L_{LP}}$)

A partir das definições acima, podemos introduzir a generalização proposta neste trabalho tendo com base um reticulado completo. Assim, chamaremos a quíntupla T_L = <LT, LS, P_{LT}, B_{LT}, N_{LT}> uma generalização fuzzy dos conectivos proposicionais clássicos para o reticulado L, ou simplesmente uma L-interpretação, onde:

- LT é uma L-T-norma;
- LS é uma L-T-conorma;
- P_{LT} é uma L-implicação;
- B_{LT} é uma L-Bi-implicação;
- N_{LT} é um L-complemento;

Sendo L = < R, $\wedge$, $\vee$, 0, 1> um reticulado completo e T_L uma generalização fuzzy para o reticulado L, então para cada x, y $\in$ R temos a seguinte interpretação:

- LT modela a conjunção (intersecção);
- LS modela a disjunção (união);
- P_{LT} modela a implicação;
- N_{LT} modela a complementação (negação);
- B_{LT} modela a bi-implicação.

Dado uma linguagem proposicional dentro da abordagem de reticulados conseguimos uma L-interpretação dos conectivos proposicionais clássicos.

Lógicas proposicionais são definidas a partir de uma linguagem formal. Assim, seja PS um conjunto de símbolos proposicionais, onde PS = {p_j, tal que j pertence ao conjunto de índices J}, podemos definir L_{LP} como o menor conjunto contendo PS tal que se α, $\beta \in L_{LP}$ então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ e $\neg\alpha \in L_{LP}$.

Uma função de avaliação num reticulado completo L é qualquer função *e*: PS $\rightarrow$ R. E, seja T_L = <LT, LS, P_{LT}, B_{LT}, N_{LT}> uma L-interpretação dos conectivos proposicionais, podemos estender a função de avaliação *e* para a função T_{eL}: $L_{LP} \rightarrow$ R da seguinte forma:

i) $T_{eL}(p) = e(p)$ para cada p $\in$ PS,

ii) $T_{eL}(\neg\alpha) = N_{LT}(T_{eL}(\alpha))$,

iii) $T_{eL}((\alpha \wedge \beta)) = LT(T_{eL}(\alpha),T_{eL}(\beta))$,

iv) $T_{eL}((\alpha \vee \beta)) = LS(T_{eL}(\alpha),T_{eL}(\beta))$,

v) $T_{eL}((\alpha \rightarrow \beta)) = P_{LT}(T_{eL}(\alpha),T_{eL}(\beta))$, e

vi) $T_{eL}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = B_{LT}(T_{eL}(\alpha),T_{eL}(\beta))$,

Uma fórmula $\alpha \in L_{LP}$ é uma 1-tautologia com respeito à T_L, ou simplesmente T_L-tautologia, denotada por $\models_{TL} \alpha$, se para cada avaliação L-fuzzy *e*, $T_{eL}(\alpha) = 1$. Neste sentido, a lógica fuzzy modelada por T_L, ou simplesmente a lógica L-fuzzy é o conjunto $LP_{TL} = \{\alpha \in L_{LP} : \models_{TL} \alpha\}$.

Proposição 25: Seja $T_L = \langle LT, LS, P_{LT}, B_{LT}, N_{LT}\rangle$ uma L-interpretação dos conectivos proposicionais e $\alpha \in L_{LP}$. Se $\models_{TL} \alpha$ então $\models\alpha$ (tautologia clássica).

Demonstração: Basta considerar as avaliações que apenas consideram 0's e 1's. Temos uma tautologia sempre que 1 é obtido com resultado.

A lógica proposicional clássica (LPC) foi definida em [DAVIS, 1989] como um conjunto de tautologias. Assim, qualquer lógica fuzzy está contida na lógica clássica, pois comporta-se como a última nos valores extremos (0 e 1).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de reticulados para representar conectivos proposicionais clássicos, fuzzy e fuzzy intervalar permite simplificar diversas teorias que, na realidade, podem ser entendidas como uma só. Ao unificar os resultados, conseguimos uma visão mais geral que facilita a compreensão e o estudo das áreas envolvidas. Com a L-interpretação dos conectivos proposicionais clássicos definida neste trabalho, podemos estender ainda mais conceitos e propriedades que servirão de base para estudos futuros que necessitem de uma visão mais ampla.

Generalizar os conectivos proposicionais clássicos, Fuzzy e Fuzzy intervalar utilizando o conceito de reticulados como base constituiu o objetivo principal deste trabalho. Alguns fatos conhecidos em lógica fuzzy também foram estendidos para este universo matemático mais geral.

Assim, conseguimos uma generalização fuzzy dos conectivos proposicionais clássicos para um reticulado L com a interpretação de que a L-T-norma representa a conjunção ($\wedge$), a L-T-conorma modela a disjunção ($\vee$), a L-implicação e a L-Bi-implicação representam $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, respectivamente, e finalmente o L-complemtento que modela a negação ($\neg$).

Podemos ainda destacar que construir I_L-T-conormas, I_L-complementos, I_L-implicações e I_L-Bi-implicações a partir de uma LS, N_L, P_L, B_L (respectivamente), corresponde a construir I_L-T-normas, I_L-T-conormas, I_L-complementos, I_L-implicações e I_L-Bi-implicações derivadas de I_L-T-normas obtidas a partir da L-T-norma. Ou seja, que o exemplo (ver diagrama 1) a seguir comuta e é possível.

Diagrama 1:

$$\begin{tikzcd}
LT \arrow[r, "I_L"] \arrow[d] & I_L[LT] \arrow[d] \\
LS \arrow[r, "I_L"] & I_L[LS]
\end{tikzcd}$$

Exemplo: Correspondência entre a construção de uma I_L-T-conorma a partir de uma L-T-conorma derivada de uma L-T-norma e a construção de uma I_L-T-conorma derivada de da I_L-T-norma obtida a partir de uma L-T-norma.

Além disso, pode-se estender alguns conceitos de automorfismos onde, seja ρ um automorfismo e LT uma L-T-norma, a ação de ρ em LT, denotada por LT^{ρ} e definida por $LT^{\rho} = \rho^{-1}(LT(\rho(x), \rho(y)))$ também é uma L-T-norma.

No entanto, propor esses conceitos (entre outros) serve como sugestão para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

[ACIÓLY, 1991] ACIÓLY, B. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar**. PhD thesis, CPGCC of the UFRGS, Porto Alegre, 1991.

[ALSINA et al., 1980] ALSINA, C., TRILLAS, E. & VALVERDE, L. **On non-distributive logical connectives for fuzzy set theory**. Busefal, 3: 18-29, 1980.

[BAAZ & HÁJEK, 2001] BAAZ, M. & HÁJEK, P. **Complexity of t-Tautologies**. Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 113, pages 3-11, 2001.

[BEDREGAL & TAKAHASHI, 2005a] BEDREGAL, B. R. C. & TAKAHASHI, A. **Interval t-norms as interval representations of t-norms.** IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pages 909-914, Reno, Nevada, USA, 22-25 mai, 2005.

[BEDREGAL & TAKAHASHI, 2005b] BEDREGAL, B. R. C. & TAKAHASHI, A. **The Best Interval Representations of T-norms and Automorphisms.** Brazil, 2005.

[BUSTINCE et al., 2003] BUSTINCE, H., BURILO, P. & SORIA, F. **Automorphism, negations and implication operators.** Fuzzy Sets and Systems, 134:209-229, 2003.

[CALLEJAS-BEDREGAL & BEDREGAL, 2001] CALLEJAS-BEDREGAL, R. & BEDREGAL, B. R. C., **Intervals as a Categorical Constructor.** In: Proceedings of IV Workshop on Formal Methods, p. 139–150, Rio de Janeiro – RJ, 2001.

[CONIGLIO, 2005] CONIGLIO, M. E. **Lógica e aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia**. Disponível em <http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/LIVRO.pdf> acesso em: 05 jun. 2005.

[COSTA & KRAUSE, 2005] COSTA, N. & KRAUSE, D. **Notas de Lógica**. Apêndice A, Reticulados e Álgebra de Boole, páginas 115-119. Disponível em

<http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/LivroLogica/ApendiceA.pdf> acesso em: 11 mai. 2005.

[CRUZ & BEDREGAL, 2005] CRUZ, A. P. & BEGREGAL, B. R. C. **Propositional Logic as a Propositional Fuzzy Logic.** Electronic Notes in Theoretical Computer Sciences. A ser publicado, 2005.

[DAVIS, 1989] DAVIS, R. E. **Truth, Deduction, and Computation: Logic and Semantics for Computer Science.** Computer Science Press, 1989

[FONTES, 2005] FONTES, C. **Definição e Evolução da Lógica.** Disponível em <http://afilosofia.no.sapo.pt/pag2Def.htm> acesso em: 23 out. 2005.

[GEHRKE et al., 1996] GEHRKE, M., WALKER, C. & WALKER, E. **Some comments on interval valued fuzzy sets**. International Journal of Intelligent Systems, pages 751–759, 1996.

[GEHRKE et al., 1998] GEHRKE, M., WALKER, C. & WALKER, E. **Algebraic Aspects of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.** In: Proceedings of the Workshop on Current Trends and Developments in Fuzzy Logic. Thessaloniki, Greece, 1998.

[GEHRKE et al., 2003] GEHRKE, M., WALKER, C. & WALKER, E. **Fuzzy logics arising from strict De Morgan systems.** Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets. Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, Las Cruces, NM, 2003.

[GUNTER, 1992] GUNTER, C. **A Semantics of Programming Languages: Structures and Techniques**. MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1992.

[HÁJEK, 1998] HÁJEK, P. **Metamathematics of Fuzzy Logic.** Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.

[JOHNSTONE, 1982] JOHNSTONE, P. T. **Stone Space, volume 3 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics**. Cambridge University Press, Cambridge-UK, 1982.

[KEHAGIAS & KONSTANTINIDOU, 2001] KEHAGIAS, A. & KONSTANTINIDOU, M. **L-Fuzzy Valued Inclusion Measure, L-Fuzzy Similarity and L-Fuzzy Distance**. Dept. of Mathematics, Physical and Computational Sciences, Faculty of Engineering, Aristotle University of Thessaloniki. Greece, 2001.

[KLEMENT & NAVARA, 1999] KLEMENT, E. & NAVARA, M. **A survey on different triangular norm-based fuzzy logics**. Fuzzy sets and systems, 101:241-251, 1999.

[KULISCH & MIRANKER, 1981] KULISCH, U. W. & MIRANKER, W. L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice.** Academic Press, 1981.

[LASKOWSKI & SHASHOUA, 2002] LASKOWSKI, M.C. & SHASHOUA, Y.V. **A classification of BL-algebras.** Fuzzy Sets and Systems, pages 271-282. USA, 2002.

[MENGER, 1942] MENGER, K. **Statical metrics**. PNAS, 37:535-537, USA, 1942.

[NAVARA, 1999] NAVARA, M. **Characterization of measures based on strict triangular norms**. J. Math. Anal. Appl. 236:370-383, 1999.

[SCHWEIZER & SKLAR, 1961] SCHWEIZER, B. & SKLAR, A. **Associative functions and statistical triangle inequalities.** Publicationes Mathematicae Debrecen, pages 168-186, 1961.

[SCOTT, 1970] SCOTT, D. **Outline of a mathematical theory of computation**. In: 4th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, pages 169–176, 1970.

[SILVEIRA & BEDREGAL, 2001] SILVEIRA, M. M. M. T. & BEDREGAL, B. R. C. **Uma Inferência Fuzzy Min-Max Intervalar** In: Encontro Nacional de Inteligência

Artificial, 2001, Fortaleza. In: Proceeding of XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. Fortaleza: Sociedade Brasileira de Computação, 2001.

[STOLTENBERG-HANSEN et al.,1994] STOLTENBERG-HANSEN, V., LINDSTRÖN, I. & GRIFFOR, E. R. **Mathematical Theory of Domains.** Cambridge University Press, Cambridge-UK, 1994.

[SUNAGA, 1958] SUNAGA, T. **Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis**. RAAG Memoris 2, pages: 29–46, 1958.

[TAKAHASHI & BEDREGAL, 2005] TAKAHASHI, A. & BEDREGAL, B. R. C. **T-Normas, T-Conormas, Complementos e Implicações intervalares.** Submetido para: Tendências em matemática aplicada e computacional, 2005.

[ZADEH, 1965] ZADEH, L. A. **Fuzzy sets.** Information and Control, pages 338-353, 1965.

[ZUO, 1995] ZUO, Q. **Description of strictly monotonic interval and/or operations**. APIC'S Proceedings: International Workshop on Applications of Interval Computations, pages 232-235, 1995.