Anderson Paiva Cruz

Fundamentos de Sistemas Fuzzy Baseados em Dados Intervalares à Luz de uma Teoria de Representação Intervalar

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Natal/RN - Julho de 2006

Anderson Paiva Cruz

Fundamentos de Sistemas Fuzzy Baseados em Dados Intervalares à Luz de uma Teoria de Representação Intervalar

Trabalho de graduação apresentado ao curso de Engenharia de Computação do Departamento de Engenharia de Computação e Automação e do Departamento de Informática e Mátemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos necessários para obtenção de grau de Engenheiro de Computação.

Orientador:
Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Informática e Mátemática Aplicada
Natal/RN - Julho de 2006

Agradecimentos

A Deus, por Ele tornar possível o despertar de um novo dia. Por ter me dado discernimento e sabedoria; por muitas vezes tranqüilizar-me e me fazer sentir alegrias nos momentos mais difícieis.

Ao meu orientador, Professor Dr. Benjamin, pela construção do conhecimento, fazendo com que fosse possível concluir este trabalho. Pelas vezes que precisei e ele me socorreu, com muita paciência e boa vontade. E principalmente por ser um dos poucos professores que acreditou na minha capacidade e me deu uma chance de trabalhar consigo.

À minha mãe, Professora Dra. Ângela, que me iniciou e me encorajou a continuar nesse campo científico maravilhoso que é a lógica. Pela sua paciência e compreensão. E pela orientação auxiliar no presente trabalho.

Ao meu pai e à minha irmã, por me incentivarem a trabalhar mais arduamente neste projeto, ao perguntar se eu ainda não tinha acabado.

À Dolores, pelo seu amor para comigo e por ter sido um instrumento Divino, me acalmando e me dando forças. Aos meus colegas de turma, em especial, Hiroshi e Pedro, que tanto me ajudaram na vida acadêmica e na vida particular.

Aos professores do DCA e do DIMAp que me ensinaram durante o período de graduação. E aos professores de colégio, pois sem eles não teria conseguido cursar engenharia de computação.

Por fim, aos que me ajudaram de alguma forma, mas que por impossibilidade de lembrar de todos, não foram mencionados.

Resumo

A necessidade crescente de modelar e desenvolver sistemas relativos aos diferentes campos da ciência aliado à carência de tecnologia mais avançadas refletem a relevância de se desenvolver novas ferramentas (teóricas e aplicativas), que venham suprir deficiências referentes à capacidade computacional da atualidade ou futura. Pensando nisso, propõe-se uma nova perspectiva de desenvolvimento de sistemas. Esta perspectiva se delineia pela criação de um modelo de representação fuzzy intervalar, se configurando em uma extensão do modelo fuzzy, por meio da elaboração de um modelo fuzzy intervalar que se fundamenta nas teorias intervalar, fuzzy intervalar e de representação intervalar. Em outras palavras, o trabalho apresenta uma teoria de representação fuzzy intervalar capaz de tratar um problema complexo e ambíguo (pois é fundamentado sob a teoria fuzzy), de forma segura (uma vez que usa a aritmética intervalar assegurando a corretude dos valores) e ótima (porque aplica a teoria de representação intervalar garantindo aspectos de corretude e optimalidade). E a partir da nova teoria fuzzy intervalar, este trabalho contribui para viábilizar a implementação de novos sistemas.

Abstract

The increasing necessity of shape and developing systems to different scientific areas allied to the lack of advanced technology reflect the relevance of developing new tools (applicatory and theoretical), which come to supply deficiencies of the computational capacity of the future or the present time. Thinking about this, a new perspective of development of systems must be considered. This perspective delineates itself for the creation of a representation's model of intervals fuzzy, configuring itself in an extension of the fuzzy model to a interval fuzzy model, it bases on the intervals theory, intervals fuzzy theory and interval representation theory. In other words, this work presents a representation's theory of the interval fuzzy capable to treat with ambiguous and complex problems (because it is based under the fuzzy theory), in a reliable form (since the intervals arithmetic assure the correctness of the values) and optimality (because it applies the intervals representation's theory guaranteeing aspects of correctness and optimality).

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A lógica Fuzzy, foi desenvolvida pelo engenheiro e cientista de sistemas Lofti A. Zadeh, durante a década de 60, mais especificamente a partir do artigo "*Fuzzy Sets*" ([Zadeh, 1965]), publicado em 1965 pela Universidade da Califórnia. Este artigo, trata da teoria dos conjuntos Fuzzy. Tal teoria se fundamenta em determinar um grau (chamado grau de pertinência ou grau de verdade) que indicará quanto um determinado elemento pertence a um determinado conjunto. O grau de pertinência é definido para valores reais do intervalo [0,1]. Ou seja, caso um elemento pertença totalmente a um determinado conjunto fuzzy, tem-se o valor do grau de pertinência igual a 1, caso o elemento não pertença totalmente ao conjunto então o valor do grau de pertinência será um valor real do intervalo]0,1[(dependendo do quanto ele pertença ou não) e se o elemento definitivamente não pertence ao conjunto, o valor do grau é igual a 0. Diferentemente de como é definido na teoria clássica que determina o valor 1 caso o elemento pertença ao conjunto (clássico) e 0 caso contrário.

Por se basear em gerar valores verdade diferentes dos valores clássicos (podendo assim determinar graus de incerteza), percebe-se desde já, que a lógica que é fundamentada na teoria dos conjuntos fuzzy (lógica fuzzy) se torna uma ferramenta bastante útil para representar o conhecimento incerto (o raciocínio aproximado) e que consequentemente é perfeitamente cabível na representação de situações cotidianas.

O próprio autor admite que o artigo [Zadeh, 1965] foi motivado pela convicção de que os métodos tradicionais de análise de sistemas não serviam para lidar com sistemas em que há diferenciação ou equações diferenciais. Tais sistemas são o padrão em biologia, sociologia, economia e, usualmente, nos campos cujos sistemas são humanistas, ao invés de maquinistas, em sua natureza (palavras registradas por Zadeh no prefácio de [Cox, 1999] - parafraseado da tradução de Camargos em [Camargos, 2002]). Zadeh quis dizer que problemas onde as situações ambíguas são inerentes, os recursos tecnológicos disponíveis são incapazes de automatizar, já que o processamento era implementado através da lógica booleana.

Segundo [Fernandes, 2002], a lógica desenvolvida por Zadeh combina lógica multivalorada, teoria probabilística, inteligência artificial e redes neurais para que possa representar o pensamento humano, ou seja, ligar a lingüística e a inteligência humana, pois muitos conceitos são melhores definidos por palavras do que pela matemática ([Camargos, 2002]).

Atualmente já se tem inúmeros exemplos de aplicação da lógica Fuzzy nos mais diversos sistemas, porém, segundo [Cox, 1999], o que tornou essa lógica realmente reconhecida pela imprensa técnica, foi a sua aplicação no sistema de controle automático de partida e chegada dos trens do Metrô Sendai, em Tókio, entre os anos de 1986 e 1987. Este sistema proporciona a operação de trens, que funcionava melhor do que qualquer operador humano. O mesmo tinha um histórico de pontualidade melhor, usando menos energia e sendo mais suave do que quando operado por um homem. Foi a partir deste sistema de controle, desenvolvido pela Hitachi, que muitas outras empresas começaram a utilizar a lógica Fuzzy como base para concretização dos seus produtos (por exemplo: mecanismo de foco automático - Cânon; sistema de tracking subjetivo (Maxxum 7xi) - Minolta; estabilizador eletrônico de imagens - Panasonic; máquina de lavar roupa - Sanyo; geladeiras - Sharp; condicionador de ar - Mitsubishi, Hitachi e Sharp; injeção eletrônica NOK/Nissan; elevadores - Fujitec; no golfe (escolha de tacos) - Maruman Golf Club; e forno de aço - Nippon Steel)

Todavia, alguns problemas têm de ser enfrentados quando se implementa algum sistema computacional que necessite de resultados bastante precisos; são problemas de ponto flutuante (representação digital aproximada), ou problemas conhecidos pela própria computação numérica como os erros de arredondamento e de truncamento. Para maiores detalhes veja [Forsythe, 1970].

Para ilustrar, ver-se-á agora o exemplo de Rump [Rump, 1988]:

Computemos y $= 333,75\beta^6 + \alpha^2(11\alpha^2\beta^2 - \beta^6 - 121\beta^4 - 2) + 5,5\beta^8 + \frac{\alpha}{2\mathrm{b}\beta}$

(equação 1)

Rump computou a função acima em um main frame IBM S/370 usando os tipos de variáveis *single*, *double* e *extended* e obteve os seguintes resultados:

1. *single precision: y = 1,172603...*;
2. *double precision: y = 1,1726039400531...*;
3. *extended precision: y = 1,172603940053178...*;

Estando todos os resultados incorretos. O resultado correto está compreendido dentro do intervalo $-0,827396059946821 35 \pm 5 \times 10^{-17}$.

Pode ser observável que até mesmo o sinal está incorreto. A equação 1 foi revisada por Loh e Walster em [Loh, 2002] e se chegou a resultados ainda mais incorretos. Isso mostra que trabalhar com ponto flutuante pode ser incerto, e até mesmo perigoso dependendo do sistema que venha ser implementado.

Então para lidar com problemas gerados pela computação numérica, Moore, em [Moore, 1959] e [Moore, 1962], elabora análises intervalares onde cada valor real é tratado como um intervalo real fechado (equação 2), obtendo a partir daí, topologias, uma aritmética (chamada aritmética intervalar), relações entre seus elementos, etc.

$[a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$

(equação 2)

A importância da matemática intervalar na ciência da computação se concretiza em centenas de trabalhos envolvendo diversos campos da ciência de computação, entre eles: redes neurais [Patiño-Escarcina, 2004], fluxo de carga de potência [Barboza, 2004], processamento digital de imagens [Lyra, 2004], etc.. Além de vários outros trabalhos aplicados em diferentes campos da ciência, tais como: na física ([Korlyukov, 1992]); na química [Schnepper, 1993]; na biometria ([Golubkova, 1994]); estatística ([Orlov, 1992]); em circuitos ([Garczarczyk, 1994], [Mysovskikh, 1994]); e em movimento de satélites ([Vakhidov, 1994]).

Neste trabalho, apresentar-se-á um modelo que une esses dois conceitos, para que deste modo possa ser implementado um número ainda maior de sistemas seguros e competentes (competente no sentido de tratar ou representar fielmente a aplicação ou a situação). É importante mencionar então que esses dois conceitos já foram unidos anteriormente na tese de mestrado de Silveira ([Silveira, 2002]) e em outros trabalhos de diversos autores (por exemplo: [Kreinovich, 1999], [Rocha, 1996], [Turksen, 1986], [Yam, 1999], etc.). Porém, a linha de pensamento que será desenvolvida no presente trabalho difere em alguns pontos da tese de Silveira. Primeiramente, desenvolve-se aqui, uma teoria de representação fuzzy intervalar onde são intervalizadas canônicamente as entidades fuzzy (conjuntos, relações, etc.). Tal teoria deve vir a ser usada como uma nova perspectiva para o dessenvolvimento de sistemas. Outra diferença é a forma com que as entidades fuzzy intervalar são definidas, pois neste trabalho, tanto a entrada quanto a função de pertinência estam sob a forma de intervalo. Tais mudanças implicam numa gama de diferenças entre as duas teorias e essas diferenças puderam ser observadas ao longo do trabalho e serão mais evidenciadas na conclusão do mesmo.

Os capítulos a seguir apresentaram uma breve explanação sobre a teoria fuzzy proposta por Zadeh e sobre a teoria intervalar proposta por Moore. Falar-se-á também sobre representações intervalar e seus aspectos de corretude e optimalidade. E posteriormente desenvolver-se-á a criação de um modelo de um sistema de representação fuzzy intervalar que é o objetivo deste trabalho.

Capítulo 2

Teoria Fuzzy

2.1 Introdução

A lógica fuzzy foi criada por Zadeh em 1965 e seu estudo foi continuado por Cox, Kasabov, Kandel, Terano, Kosko, Tsoukalas, Watannabe, Alcyoli, Bedregal, Hájek, entre vários outros; implodindo em duas vertentes: a lógica fuzzy no "*Broad Sense*" que tem por objetivo principal o desenvolvimento de sistemas baseados em raciocínios nebulosos (tais como os controladores fuzzy); e a lógica fuzzy no "*Narrow Sense*" que trata a lógica fuzzy como uma lógica simbólica e portanto estuda aspectos da lógicas fuzzy tais como suas teorias formais, formas normais, etc.. Recentemente, consideráveis progressos têm sido alcançados em relação aos aspectos matemáticos (formal, simbólico) da lógica fuzzy como uma lógica com uma noção comparativa da verdade.

Neste capítulo mostrar-se-á apenas os conceitos que envolvem, a teoria dos conjuntos fuzzy e a lógica fuzzy, que são importantes exclusivamente para constução do modelo que será exposto no capítulo 5.

2.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

A lógica Fuzzy foi fundamentada na teoria dos conjuntos fuzzy que tem por distinção a forma de definir a pertinência de um elemento em um conjunto através de um valor dentro do intervalo real [0,1], ou seja, além da atribuição clássica dos valores 0 e 1, que indicam se um determinado elemento pertence (valor 1) ou não (valor 0) a um determinado conjunto, essa teoria determina em que medida um elemento pode ou não pertencer a um determinado conjunto através de um grau chamado de grau de pertinência de um elemento. Então, seja o conjunto fuzzy A, o elemento x e $\mu_A(x)$ o grau de pertinência de x no conjunto A; então tem-se que: se $\mu_A(x) = 1$, então é porque **x é um elemento do conjunto** A, se $\mu_A(x) = 0$, então x **não é um elemento do conjunto** A; e se $1 > \mu_A(x) > 0$ então é porque **o elemento não está claramente definido como um elemento do conjunto**.

Por isso as teorias dos conjuntos fuzzy e conseqüentemente as lógicas fuzzy, isto é, as lógicas que tenham como modelos uma teoria dos conjuntos fuzzy, tornam-se uma ferramenta bastante útil para representar o conhecimento incerto (raciocínio aproximado) o qual pode ser mais adequadamente aplicado na representação de situações da nossa realidade. Ver-se-á agora um exemplo demonstrando como conjuntos clássicos e fuzzy seriam usados para determinar se uma temperatura é fria.

O conjunto clássico trataria o problema da seguinte forma:

- T é o conjunto de todas as temperaturas
- F é o conjunto das temperaturas que são frias e é definido desta forma:

$$Q = \{x \in T \mid 0 \leq x \leq 10\}.$$

(equação 3)

Podendo também ser representado por plano cartesiano (figura 2.1).

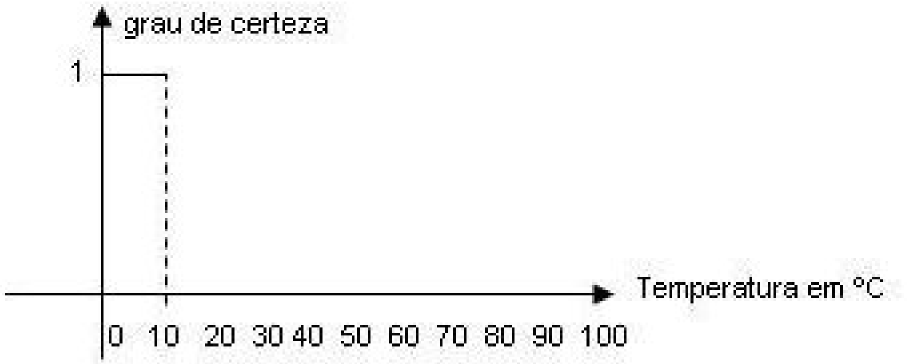

Figura 2.1: Conceito clássico de frio

Já com conjuntos fuzzy o problema pode ser tratado da seguinte forma: a função de pertinência é definida por $\mu_F(x) : U \rightarrow [0, 1]$, onde U é o universo de discurso de F o conjunto fuzzy e $\mu_F(x)$ o grau de pertinência definido no intervalo [0,1]. Podendo ser representado pelo gráfico na figura 2.2:

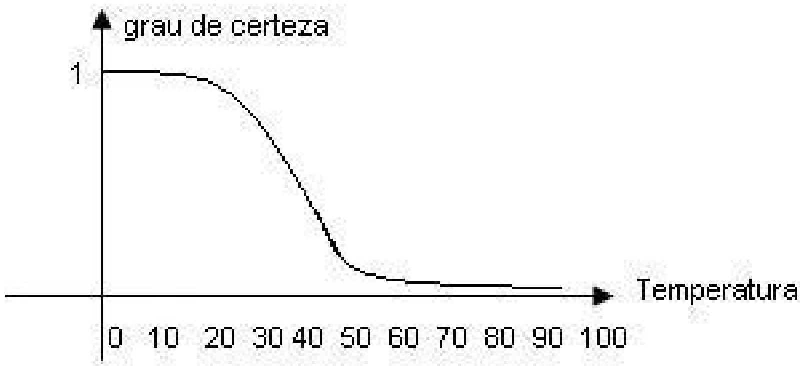

Figura 2.2: Conceito fuzzy de frio

Dessa forma podemos observar porque os conjuntos fuzzy são mais indicados para representar o raciocínio aproximado. No gráfico anterior observa-se que cada valor de temperatura está ligado a um valor do grau de pertinência (ou grau de certeza) que determina quanto tal temperatura é considerada fria.

2.3 Propriedades Básicas

2.3.1 Universo de Discurso

É o espaço fuzzy completo de variação de um modelo de variável. No caso do conjunto Frio tratado anteriormente, seriam as temperaturas de $0^o C a 100^o C$. Portanto, o universo de discurso é um conjunto clássico.

2.3.2 Normalização de um Conjunto Fuzzy

Um conjunto fuzzy está normalizado quando há pelo menos um elemento do universo de discurso que atinge altura igual a 1. Sendo a altura (ou supremo) o maior grau admitido pela função de pertinência. No caso apresentado seriam os valores entre $0^o C e 8^o C$.

Caso se deseje um bom desempenho o conjunto deve ser normal, pois deve se saber quando se tem o grau de pertinência igual a 1.

Há outras propriedades na teoria dos conjuntos fuzzy tais como "suporte dos conjuntos fuzzy" e "conjuntos $\alpha - cuts$", porém essas propriedades não são muito importantes para a construção do nosso modelo e portanto não serão conceituadas.

2.4 Representação dos Conjuntos Fuzzy

Há varias formas de se representar um conjunto fuzzy. Ele pode ser escrito como:

1. uma coleção de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}.$$

(equação 4)

U é o universo de discurso,x um elemento em U e A é o conjunto fuzzy definido em U. Por exemplo: se o conjunto A é o conjunto das pessoas mais bonitas da UFRN, então

$$A = \{(Dolores, 0, 99), (Michelle, 0, 81), (Anderson, 0, 66), ...\};$$

2. ou como um somatório, no caso do conjunto fuzzy ser definido em um universo discreto:

$$A = \sum \mu_A(x_i)/x_i;$$

(equação 5)

3. ou ainda como integral, no caso do universo de discurso ser contínuo:

$$A = \int_U \mu_A(x)/x.$$

(equação 6)

2.5 Função de Pertinência

A função de pertinência fuzzy é uma função que estabelece uma ligação entre um elemento do domínio e um valor verdade que indica o grau de pertinência do elemento no conjunto. E o valor deste grau pertence ao intervalo real [0,1] ([Silveira, 2002]).

2.5.1 Tipos de Funçõs de Pertinência

Para se determinar o grau de pertinência de um determinado elemento é extremamente necessário que o especialista responsável por tal tarefa conheça bem o conjunto e seu significado. E analise qual será o melhor formato da função e quais os limiares das correntes. Pois a partir dos tipos de funções de pertinência, o conjunto fuzzy é representado, já que o tipo de função determina o formato da mesma no plano cartesiano; e é o engenheiro ou especialista que deverá escolher o tipo de curva que melhor se aproxima do problema em questão. Dentre as representações tem-se:

1. Representação Linear;
2. Representação em curva-S ou curva-Z;
3. Representação em curvas tipo sino;
4. Representação Trapezoidal;
5. Representação Triangular.

Para maiores informações acerca dos tipos de funções de pertinência, há várias fontes, entre elas: [Silveira, 2002] da página 34 a 37, explica esse assunto de forma simples, fácil e direta.

2.6 Lógica Fuzzy

Após tratar da teoria dos conjuntos fuzzy, esta seção tem por objetivo falar da lógica que se baseia em tal teoria, apresentando os principais pontos que serão a base para construção do novo modelo. Ver-se-á nesta seção, uma lógica que permite modelar sistemas bastante complexos usando um alto nível de abstração, proveniente do conhecimento do engenheiro ou especialista, e uma linguagem simplificada baseada em variáveis lingüísticas, modificadores lingüísticos, proposições e ragras de inferência; assuntos que serão abordados a seguir.

2.6.1 Variáveis Lingüístcas e Modificadores Lingüísticos

Um conceito relacionado a conjuntos nebulosos (fuzzy) é o de variável lingüística. Entende-se por variável um identificador que pode assumir um dentre vários valores, ou melhor, as variáveis assumem valores e, no contexto da lógica fuzzy, esses valores são palavras ou sentenças, ou ainda, nomes de conjuntos fuzzy. Deste modo, uma variável lingüística pode assumir um valor lingüístico dentre vários outros valores lingüísticos, dentro de um conjunto de termos lingüísticos.

Pode-se ilustrar o conceito de variáveis lingüísticas trabalhando com a palavra Temperatura - em linguagem natural. Assuma que Temperatura é uma variável lingüística definida no universo $U = [-270, 1000]$ e cuja caracterização não pode ser precisa (determinada apenas pelos valores 0 e 1). Portanto Temperatura é uma variável lingüística constituída por vários conjuntos fuzzy, tais como: Quente, Frio, muito Quente, Congelado... As expressões citadas (quente, frio, congelado, etc.), são definidas como termos da variável lingüística Temperatura e cada termo é um conjunto fuzzy que deve ser definido por uma função de pertinência adequada.

Variáveis lingüísticas podem conter também modificadores (também lingüísticos) que alteram o valor da entidade fuzzy à qual ele é aplicado. Exemplos de modificadores válidos são: muito, pouco, não muito, mais ou menos.

Então seja A um conjunto fuzzy e $\mu_A(x)$ a função de pertinência que determina o grau de certeza de x em A. Defini-se o modificador lingüístico 'm' atuando em A (mA) através da modificação da função de pertinência $\mu_A(x)$ para $\mu_{mA}(x)$. Onde $\mu_{mA}(x)$, é a composição de uma função f(x) com a função $\mu_A(x)$; em outras palavras:

$$\mu_{mA}(x) = f(\mu_A(x))$$

(equação 7)

Como exemplo, pode-se citar os modificadores *não* e *muito* aplicados ao conjunto fuzzy "Frio", já descrito na seção anterior:

- **não**:

  Sendo $f(x) = 1 - x$

  (equação 8)

Então $\mu_{mF}(x) = 1 - \mu_F(x)$

(equação 9)

- **muito**:

  Sendo $f(x) = x^2$

  (equação 10)

  Então $\mu_{mF}(x) = (\mu_F(x))^2$

  (equação 11)

Conclui-se que, uma variável lingüística é uma variável cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy e possui um significado lingüístico podendo ser representado por palavras ou sentenças. Além da possibilidade de possuir ou não modificadores lingüísticos cuja função é alterar de alguma forma o significado ou a intensidade da variável lingüística.

2.6.2 Proposições e Conectivos da Lógica Fuzzy

Na lógica clássica uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, já na lógica fuzzy, uma proposição tem um certo grau de verdade ou um certo grau de falsidade. As proposições podem ainda ser quantificadas dando noção de frenqüência ou quantidade, tais como normalmente, frequntemente, mais, menos...

Para fazer a composição de duas proposições usa-se os operadores ou conectivos lógicos. E tanto os operadores quanto os conectivos lógicos podem ser aplicados em proposições fuzzy, em variáveis lingüísticas e em elementos de um conjunto fuzzy.

Os conectivos são: Conjunção, Disjunção, Negação e Implicação; representados por $\wedge, \vee, \neg e \rightarrow$ respectivamente. A disjunção e a conjunção saõ definidos a partir dos operadores max e min respectivamente (como foi definido em [Nguyen, 1999] e a implicação é construída através dos operadores de negação e conjunção como pode ser visto a seguir:

$x \wedge y = min(x, y)$

(equação 12)

$x \vee y = max(x, y)$

(equação 13)

$\neg x = 1 - x$

(equação 14)

$x \rightarrow y = \neg x \vee y$

(equação 15)

Sendo o valor verdade definido pelas equações 16, 17, 18 e 19:

$tr(p \wedge q) = \mu_{AxB}(x, y) = min(\mu_A(x), \mu_B(y)/(x, y) \in AxB)$

(equação 16)

$tr(p \vee q) = \mu_{AxB}(x, y) = max(\mu_A(x), \mu_B(y)/(x, y) \in AxB)$

(equação 17)

$tr(\neg p) = 1 - \mu_A(x)$

(equação 18)

$$tr(p \rightarrow q) = \mu_{AxB}(x, y) = min(1, 1 - \mu_A(x), \mu_B(y)/(x, y) \in AxB)$$

(equação 19)

Os operadores min e max são traduzidos como "o menor entre" e "o maior entre" respectivamente (por exemplo: $min(0.6, 0, 9) = 0.6$ e $max(0.2, 0.8) = 0.8$).

Há várias outras definições para implicação, sendo a apresentada aqui uma baseada na equivalência da lógica clássica: $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$; assim como também há outras formas de se definir uma conjunção e uma disjunção (e implicação também) através da utilização de T-normas e T-conormas respectivamente ([Hájek, 1998a] e [Hájek, 1998b]). Recentemente em [**?**], foi apresentada uma teoria formal de uma lógica fuzzy proposicional que ultiliza a T-norma Fraca para construção dos conectivos que compõem a teoria formal. Essa lógica fuzzy proposicional determina que uma tautologia na lógica proposicional clássica é tautologia se, e somente se, for tautologia na lógica fuzy proposicional, levando ao pensamento de se utilizar das inúmeras ferramentas e propriedades da lógica clássica com a vantagem do raciocínio aproximado através dessa lógica fuzzy proposicional. Para mais detalhes veja [Bedregal, 2006c].

2.7 Raciocínio Fuzzy

2.7.1 Inferência

Mesmo trabalhando com o raciocínio aproximado onde há a utilização da lógica fuzzy para modelar sistemas. Esses sistemas precisam de regras, de mecanismos de inferência para gerar meios pelos quais a partir de alguma entrada poder chegar em alguma saída (em alguma conclusão).

A inferência fuzzy que será mostrada aqui usará o *modus ponens*, o *modus tollens*, o *modus ponens* generalizado, implicação fuzzy e uma regra de inferência composicional.

Modus Ponens

O *modus ponens* é o conhecido da teoria formal clássica onde se tem duas premissas iniciais e uma conseqüência:

PREMISSA 1: *x está em A*

PREMISSA 2: *Se x está em A então y está em B*

CONSEQÜÊNCIA: *Logo y está em B*

Podendo ser sintetizada pela fórmula: $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$.

Onde p e q são proposições fuzzy.

Modus Tollens

Pode-se dizer que o *modus tollens* é o inverso do *modus ponens* no sentido de que (no *modus tollens*)tendo se os conseqüêntes deseja-se encontrar os antecedentes. Ou seja:

PREMISSA 1: *x não está em A*

PREMISSA 2: *Se x está em A então y está em B*

CONSEQÜÊNCIA: *Logo y não está em B*

De outra forma tem-se que $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q)$

Modus Ponens Generalizado

Existem generalizações para todas as regras de inferência fuzzy, porém será apresentada aqui apenas o *modus ponens generalizado* para a lógica fuzzy que e o seguinte:

PREMISSA 1: *x está em A'*

PREMISSA 2: *Se x está em A então y está em B*

CONSEQÜÊNCIA: *Logo y está em B'*

A pode ser ou não o mesmo conjunto A' do mesmo modo que B pode ser ou não igual a B', porém A e A' e B e B' devem ter um certo grau de similaridade; conceito este que não foi apresentado, mas que é intuitivamente entendível.

A primeira vista acha-se que não é possível chegar em B', todavia o que acontece é que para a obtenção de B' é necessário usar uma inferência composicional que unirá o conjunto A' á implicação fuzzy e á uma relação fuzzy (conceitos que serão apresentados na subseção seguinte). Tendo-se então que se:

PREMISSA 1: *x está em A'*

PREMISSA 2: *Se x está em A então y está em B*

CONSEQÜÊNCIA: *y está em B'*

Portanto $B' = A' \circ (A \rightarrow B) = A' \circ R(x, y)$.

2.7.2 Relações Fuzzy

A partir do instante em que houve a criação da teoria dos conjuntos, houve também a necessidade de relacionar os elementos de dois conjuntos para variados fins. Daí houve a necessidade imediata de se determinar um grau a essas relações para quantificar, por exemplo, o grau de veracidade que há numa determinada relação. Em relações clássicas como já se é ciente, o grau de uma relação é estabelecido pelos valores 0 ou 1. Já na Lógica fuzzy, os valores se encontram dentro do intervalo real [0,1].

As relações fuzzy são generalizações de relações clássicas, ou ainda, associações entre elementos de dois conjuntos fuzzy onde se deve retornar um grau de pertinência, isto é, um grau de verdade (cujo valor está no intervalo real [0,1]). Em alguns casos, os graus de verdade só podem assumir valores clássicos, como pode ser observados em relações do tipo "*é dividido por*" ou "*é múltiplo de*", mas há também infinitos casos de estender o grau de veracidade para valores reais de [0,1]; principalmente quando as relações se submetem a propôr comparações onde o fator *Interpretação do Especialista* é inerente ao problema.

As relações fuzzy são conjuntos definidos em Produtos Cartesianos e portanto definidos num universo multidimensional de discussão (tal como X x X, ou X x Y x Z). Supondo a relação binária R definida em X x Y, então os pares podem ser listados seguindo a equação 20:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y))|x \in X\, e\, y \in Y\}$$

(equação 20)

A relação pode ainda ser definida sob duas formas: conforme a equação 21 (caso a mesma seja definida em um universo contínuo); ou conforme a equação 22 (caso seja definida em um universo discreto).

$$R(x, y) = \int_{(x,y)} \mu_R(x, y)/(x, y)$$

(equação 21)

$$R(x_i, y_j) = \sum_{(x_i,y_j)} \mu_R(x_i, y_j)/(x_i, y_j)$$

(equação 22)

Representação de Relações Fuzzy

Há diversas formas de se representar um conjunto fuzzy discreto; pode-se ver, em seguida, 5 formas de representação.

Lingüísticamente:

"x é dividido por y", $\mu_R(x, y)$

Listando todas as relações e seus respectivos graus (segundo a equação 20):

$R = \{((x_1, y_1), \mu_R(x_1, y_1)), ((x_1, y_2), \mu_R(x_1, y_2)), ((x_1, y_3), \mu_R(x_1, y_3)), ((x_2, y_1), \mu_R(x_2, y_1)), ...\}$

Através de Grafos:

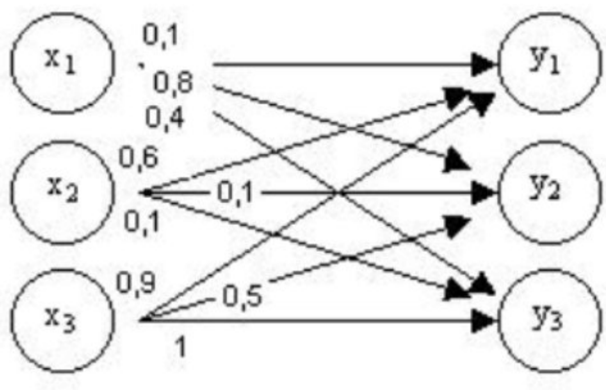

Figura 2.3: Representação de relação fuzzy utilizando grafo

Por meio de uma Tabela:

x \ y	1	2	3
1	0,1	1	0,9
2	0	0,6	0,8
3	0,3	0,4	0,5

Figura 2.4: Representação de uma relação fuzzy utilizando tabela

Ou por meio de uma Matriz:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Enfim qualquer forma de representação de relações fuzzy é válida, quando na representação pode ser visto o grau de pertinência (grau de verdade) e a associação entre os elementos que deu origem a esse grau.

2.7.3 Composição de Relações Fuzzy

Quando se deseja combinar duas relações fuzzy, faz-se então uma composição de relações fuzzy. Ou melhor, tendo-se duas relações fuzzy, uma definida dentro do Produto X x Y e outra definida no Produto Cartesiano Y x Z; e é desejado uma relação direta entre os elementos de X com os elementos de Z. Então, faz-se uma composição das duas relações; transformando o conjunto Y numa ponte para obtenção da composição. É importante aqui, determinar como será essa nova relação e como deve ser determinado o grau de pertinência para essa nova composição. Visto que existem vários tipos de composição fuzzy.

Será estudado aqui, as principais composições, são elas: a Max-Min, Max-Produto, Max-Average e Max-Star. Então, sejam as relações fuzzy R_1 e R_2 definidas nos planos X x Y e Y x Z, respectivamente; logo a composição $R_1{}^{o}R_2$, onde $^{o} \in \{\cdot, \star, \circ, \oplus\}$, é definida em XxZ como pode ser visto abaixo:

Nome da Composição	Defnição da Relação
Max-Min	$R_1 \circ R_2 = \int_{X\times Z} \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)]/(x,z)$
Max-Produto	$R_1 \cdot R_2 = \int_{X\times Z} \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)]/(x,z)$
Max-Average	$R_1 \oplus R_2 = \int_{X\times Z} \bigvee_y [\frac{1}{2}\mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(y,z)]/(x,z)$

Tabela 2.1: Definição das relações dos operadores de composição

E suas funções de pertinência são definidas como mostrada na tabela 2.2:

Nome da Composição	Função de Pertinência
Max-Min	$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)]$
Max-Produto	$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)]$
Max-Average	$\mu_{R_1 \oplus R_2}(x,z) = \bigvee_y [\frac{1}{2}\mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(y,z)]$

Tabela 2.2: Função de pertinência dos operadores de composição

2.7.4 Relação de Implicação

Segundo [Tsoukalas, 1997] existem quase 40 tipos de relações de implicação reportadas. Isso porque, as relações de implicação são obtidas a partir dos diversos tipos de operadores de implicação ϕ. Porém, uma propriedade que deve ser respeitada por qualquer relação de implicação é que se comporte como uma implicação clássica nos valores 0 e 1.

Seja a regra geral:

Se x **está** em A **então** y **está** em B.

De forma geral a regra acima pode ser definida conforme a equação 20, visto que a relação de implicação é uma relação fuzzy. E por conseqüência disso, também pode ser definida sob um universo contínuo (conforme a equação 21), ou caso a relação estja sendo definida num universo contínuo (conforme a equação 22).

Pode ser observado nas equações 20 e 21 as funções de pertinência $\mu_R(x, y)$ e $\mu_R(x_i, y_j)$. Elas são obtidas a partir das funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ e do operador ϕ. Ou seja:

$$\mu_R(x, y) = \phi[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

(equação 23)

Vê-se que o operador de implicação ϕ pega como estradas $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ e obtém a saída $\mu_R(x, y)$, mas qual operação é feita para se obter $\mu_R(x, y)$ é que faz com que haja tantos tipos de relações de implicação. Será explicitado então algumas relações de implicação e seus respectivos operadores de implicação.

Nome da Implicação	**Operador de Implicação** $\phi[\mu_A(x), \mu_B(y)] =$
ϕ_m, Zadeh Max-Min	$(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \vee (1 - \mu_A(x))$
ϕ_c, Mamdani min	$(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$
ϕ_p, Larsen Product	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$
ϕ_a, Arithmetic	$1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)$
ϕ_b, Boolean	$(1 - \mu_A(x)) \vee \mu_B(y)$
ϕ_b, Bounded Product	$\mu_A(x) + \mu_B(y) - 1$
ϕ_b, Standard Sequence	1, se $\mu_A(x) \leq \mu_B(y)$0, se $\mu_A(x)$ $\mu_B(y)$

Tabela 2.3: Operadores de implicação

É muito importante mencionar que todos os operadores satisfazem a inferência *modus ponens* clássica e o *modus tollens*.

2.7.5 Operadores de Ligação

Geralmente, dependendo da complexidade do problema, para que um sistema fuzzy possa ser implementado, é necessária a utilização de operadores de ligação, que são responsáveis por conectar uma coleção de regras. Esses operadores são os conectivos **ELSE** que podem ser interpretados como uma intersecção ou união dependendo do operador de implicação que foi usado (vide tabela 2.4).

Nome da Implicação	**Operador de Implicação** $\phi[\mu_A(x), \mu_B(y)] =$
ϕ_m, Zadeh Max-Min	AND($\wedge$)
ϕ_c, Mamdani min	OR($\vee$)
ϕ_p, Larsen Product	OR($\vee$)
ϕ_a, Arithmetic	AND($\wedge$)
ϕ_b, Boolean	AND($\wedge$)
ϕ_b, Bounded Product	OR($\vee$)
ϕ_b, Standard Sequence	1, se AND($\wedge$)

Tabela 2.4: Interpretação dos operadores ELSE segundo os operadores de implicação

Na tabela pode ser visto que a interpretaçao do conector ELSE depende do operador de implicação que foi usado. Um método de inferêmcia fuzzy pode ser visto em [Kasabov, 1996] onde é definido como uma tripla:

$F_i = (I, C, L)$, onde I é a relação de implicação, C um possível operador de composição e L é um operador de ligação.

2.8 Sistemas de Inferência Fuzzy

Será apresentada nesta seção uma explanação simples de como um sistema de inferência fuzzy funciona, não se tendo a preocupação de explicar cada método de Fuzzificação e Defuzzificação.

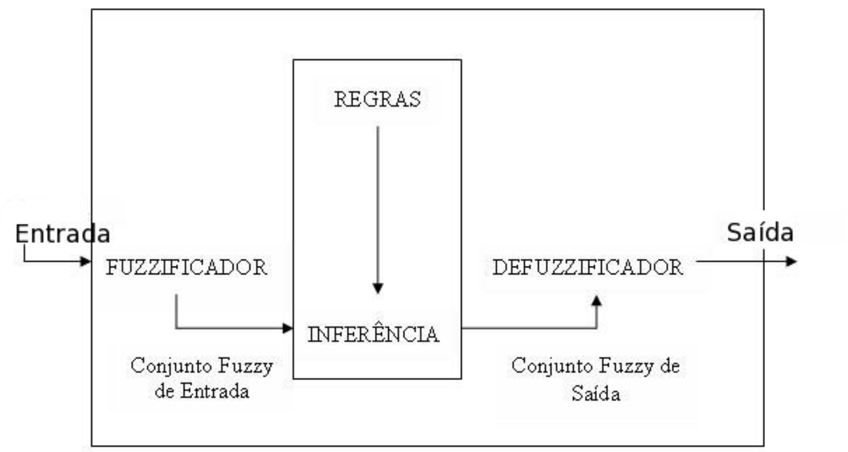

Figura 2.5: Arquitetura de um sistema de inferência fuzzy

Os sistemas de inferências fuzzy apresentam uma arquitetura onde há um fuzzyficador, as regras relevantes, o mecanismo de inferência, o defuzzificador e os conjuntos de entrada e de saída, como mostrado na figura 2.5 (retirada de [Silveira, 2002]).

Em geral os dados de entradas são valores precisos, pois são resultados de medições ou observações, etc.; e principalmente se não fosse, seria também necessário mapear os dados de entradas em conjuntos fuzzy de entrada relevantes (fase de fuzzyficação). Após o mapeamento, faz-se a ativação das regras relevantes e posteriormente (no estágio de defuzzyficação) é obtido o conjunto fuzzy de saída através do processo de inferência e feita a interpretação dessa informação.

2.8.1 Fuzzyficação

Antes mesmo de fazer a fuzzyficação, os conjuntos fuzzy são construídos através da formulação de funções de pertinência apropriadas. Neste estágio o significado dos termos lingüísticos é obtido. Para obtenção do significado correto é preciso de muita atenção, uma vez que ele depende tanto do contexto quanto do objeto ao qual está caracterizando. Por exemplo, a variável temperatura possui o conjunto fuzzy "Quente" que pode ser aplicado ao clima ou a um tanque cujo conteúdo sofre um processo de ebulição. E portanto o conjunto fuzzy "Quente" terá significado diferente quando aplicado ao clima e quando aplicado ao tanque. Isso altera abruptamente o gráfico do grau de pertinência de tal variável, podendo alterar também a forma (o tipo) da função de pertinência que deve ser usada.

Mas o problema da construção da função de pertinência não pertence à teoria dos conjuntos fuzzy e sim ao engenheiro de conhecimento que é responsável pela aquisição de conhecimento, extraindo-o e expresasando-o de alguma forma operacional.

Também numa fase anterior à fuzzyficação, são extraídas as regras do sistema de dados numéricos ou então, essas são fornecidas pelos especialistas.

Na fuzzyficação, ativa-se somente as regras relevantes à situação, para que essas possam ser tratadas junto com os conjuntos fuzzy relevantes pelo mecanismo de inferência. Já os conjuntos fuzzy relevantes fazem o mapeamento dos valores de entrada do sistema atribuindo a estes valores os graus de pertinência para cada conjunto ou variável lingüística. O resultado final serão os conjuntos fuzzy de saída (também chamados de conjuntos fuzzy solução) que serão tratados pelos mecanismos de defuzzyficação

2.8.2 Regras de Inferência

As regras de inferência tentam simular o raciocínio dos especialistas, para isso, há a composição de uma relação (podendo ser esta uma relação de implicação) com uma proposição qualquer e ligando tais regras através dos operadores de ligação (AND e OR). Em outras palavra o processo de inferência existe para inferir novos fatos, baseando-se nas regras fuzzy e nos dados de entrada. Como exemplo tem-se a inferência Modus-Ponens que usa:

$$B' = A'^{\text{o}}\,(A \rightarrow B) = A'^{\text{o}}\,R(x, y)$$

Onde $^{\text{o}}$ é o operador de composição, B', A' e A os conjuntos fuzzy envolvidos, sendo B' a solução. Em caso de regras com vários antecedentes, a inferência deve conter operadores AND ou OR para que possa concluir B'. Geralmente há várias regras relevantes; e como o mecanismo de inferência é aplicado a todas elas então são geradas diversas conclusões $B_i's$, sendo a conclusão final a conjunção de todos os $B_i's$.

Na próxima subseção será apresentado a inferência fuzzy min-max.

2.8.3 Inferência Min-Max

Nesta subseção entender-se-á como se procede a inferência fuzzy. E por isso utilizar-se-á a composição e implicação min-max ([Tsoukalas, 1997]) já apresentada anteriormente.

Com a utilização da inferência min-max o modus ponens mostrado anteriormente se transforma em:

$$\mu_B(y) = min_x(max(\mu_A(x),\, \mu_R(x, y))).$$

Já que a composição é dada por $\mu_{R1^{\text{o}}R2}(x, z) = min_y(max(\mu_{R1}(x, y),\, \mu_{R2}(y, z)))$ e a relação por $\mu_R(x, y) = min(max(\mu_A(x),\, \mu_B(y))\, 1 - \mu_A(x))$.

Como já deve ter sido notado, a inferência baseada na generalização do modus ponens pode ser efetuada de mais de uma maneira, pois existem diversos tipos de composições e operadores de implicação como podem ser analisados em [Tsoukalas, 1997] e foram vistos nas tabelas 2.1, 2.2 e 2.3.

2.8.4 Defuzzificação

Após todas as regras passarem pelo mecanismo de inferência ter-se-á então um conjunto fuzzy de saída (conjunto solução). Este por sua vez deve ser interpretado, ou melhor, o conjunto fuzzy solução deve ser traduzido em um valor de saída (um número crisp x*) que é a resposta do problema em questão para uma determinada entrada. Para esta tradução de valores em um número crisp x* se dá o nome de Defuzzyficação.

O problema é como determinar esse número crisp. Existem diversos métodos para determinar tal número e a escolha do método deve ser feita com muito cuidado, pois irá ajudar a determinar significativamente a acuracidade e a velocidade do sistema fuzzy. Segundo Silveira em [Silveira, 2002], entre os métodos mais utilizados atualmente estão o do centróide ou centro de área (COA) o centro de soma (COS) e a média de máximo (MOM).

Não haverá aqui, preocupação em explicar os métodos de defuzzificação, já que esclarecer como e em que casos os métodos são executados não é objetivo da monografia. Será definido apenas a equação que determina o número crisp x* em cada método citado acima.

Defunzzificação Centróide ou Centro de Área (COA)

$$x* = \frac{\sum x_i \mu_{saída}(x_i)}{\sum \mu_{saída}(x_i)}$$

(equação 45)

Defunzzificação Centro de Somas (COS)

$$x* = \frac{\sum x_i \sum \mu_{B'_K}(x_i)}{\sum \sum \mu_{B'_K}(x_i)}$$

(equação 46)

Onde $\mu_{B'_K}$ é a função de pertinência no ponto x_i do universo em discussão.

Defunzzificação Média de Máximo (MOM)

$$x* = \frac{\sum x_m}{M}$$

(equação 47)

Onde M é o número de máximos em um universo discreto de discussão. Então x_m será o m-ésimo elemento máximo num universo em discussão em que a função de pertinência de $\mu_{saída}(x)$ está no valor máximo e M será o número de elementos (máximos).

Capítulo 3

Teoria Intervalar

Neste capítulo falar-se-á sobre a matemática intervalar esclarecendo do que ela se caracteriza, explicando a aritmética intervalar e a função intervalar; e falando rapidamente sobre a relação de ordem com a matemática intervalar.

3.1 Matemática Intervalar

A aritmética intervalar é uma parte da matemática que investiga propriedades elementares de números definidos sob um conjunto de intervalos de números reais. E começou o seu desenvolvimento por volta de 1959 com R.E. Moore. Na computação, teve seu uso muito bem justificado pelo fato de ser uma ótima ferramenta para lidar com problemas em que o resultado a ser obtido fosse obrigatoriamente bastante preciso e isento de ou com o menor erro possível, seja esse erro causado por algum arredondamento ou truncamento (erros de Computação Numérica).

Além de que, na matemática computacional o usuário e o próprio programador não podem afirmar a exatidão da resposta estimada, sem a ajuda de uma análise de erro, pois esta, é uma análise extensa e portanto de alto custo e quase sempre inviável [Acióly, 1991]. A Matemática Intervalar pode então ser usada para lidar com esses problemas, permitindo ter um controle rigoroso do erro nos resultados.

É importante ressaltar também que não só os resultados devem ser precisos. Há casos que as entradas, de uma determinada função ou até mesmo de um dispositivo eletrônico, necessitem ter certa exatidão. Em função disso, as entradas também possuem a necessidade de serem tratadas como intervalos.

A principal vantagem do uso da matemática intervalar se dá em problemas em que há o uso de ponto flutuante ou quando há possibilidades de erros de computação numérica. Essa vantagem resulta da forma como os números reais são representados na matemática intervalar. O número real é representado por um intervalo que o contém e os cálculos feitos sobre este intervalo gerará, obrigatoriamente, um intervalo que contém o resultado real. Ou seja, o uso da matemática intervalar permite um controle de erros com limites confiáveis.

A desvantagem é decorrente, unicamente, da complexidade de cálculo das operações intervalares que é indiscutivelmente compensada pela segurança e qualidade do resultado além das operações intervalares possuirem um certo paralelismo.

Com o crescente desenvolvimento da Matemática Intervalar, a mesma ganhou grandes espaços que por sua vez já foram tão retratados no capítulo introdutório deste trabalho.

3.2 Aritmética Intervalar

Na aritmética intervalar são definidas as prinicipais operações aritméticas para intervalos. Serão abordados nesta seção, assuntos os quais já foram estudados em [Moore, 1979], [Oliveira, 1997], [Cruz, 2000], [Dutra, 2000], [Jaulin, 2001]. E baseadas nessas fontes, foi construída esta seção.

Como já mencionado na introdução deste trabalho, a matemática intervalar está fundamentada na idéia de que todos os valores reais devem ser representados por meio de um intervalo de reais, isto é, seja R um conjunto de números reais e sejam $a, b \in \Re$ e $a \leq b$, então um intervalo real X é um conjunto $X = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$. E que pode ser definido como:

$$X = [a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}.$$

(equação 24)

Observa-se que pode haver intervalos do tipo [2,4], ou do tipo [2,2] (que representa o número real 2.0). E que a idéia de usar intervalos para representar números reais é uma idéia de aproximação do número real real (real no sentido $\in \Re$; e real no sentido de número real desejado), todavia este número real está contido no intervalo e conseqüentemente trata-se de uma representação correta, contrário à idéia de ponto-flutuante onde a aproximação digital pode acarretar em erros.

Antes de expor as operações aritméticas e suas propriedades esclareçcer-se-á a igualdade entre dois intervalos. Pois, seja o intervalo $X = [a, b]$ e o intervalo $Y = [c, d]$, então $X = Y$ se, e somente se $a = c$ e $b = d$

3.3 Funções Intervalares e Operações Intervalares com um escalar

Nesta seção será apresentada funções $f : IR \rightarrow IR$ que serão usadas no capítulo 5 deste trabalho, tais como $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$. E operações que também serão usadas em tal capítulo e que envolvem intervalos, tais como: divisão por um escalar, soma e produto intervalar. Serão apresentadas também, definições de algumas operações intervalares as quais, apesar de não serem usadas na construção da teoria de representação fuzzy intervalar, têm sua importância dentro da teoria intervalar. Provas e exemplos dessas operações podem ser vistas em [Oliveira, 1997] e [Cruz, 2000]. E todas essas operações e funções (com exceção da $\sqrt[3]{x}$), além de muitas outras, foram apresentadas e definidas em [Dutra, 2000].

3.3.1 Soma

Sejam os intervalos $X = [a, b]$ e $Y = [c, d]$, então a soma dos intervalos A e B é equivalente à soma das inequações $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$ para se obter a inequação $a+c \leq x+y \leq b+d$; ou então a soma dos conjuntos $\{x \in \Re \,|\, a \leq x \leq b\}$ e $\{y \in R \,|\, c \leq y \leq d\}$ afim de obter o conjunto $\{z \in \Re \,|\, e \leq y \leq f\} = \{z \in \Re \,|\, z = x + y \, para \, algum \, x \in X \, e \, y \in Y\}$. Uma caracterização da soma de dois intervalos em termos de seus extremos pode ser vista a seguir:

$$[a, b] + [c, d] = X = [a + c, b + d].$$

(equação 25)

E as propriedades algébricas da soma em Intervalos ($\mathbf{R}$) são associatividade, comutatividade e o elemento neutro que é o $0 = [0, 0]$.

3.3.2 Produto

Sejam os intervalos $X = [a, b]$ e $Y = [c, d]$, então o produto de seus intervalos é definido por:

$X \cdot Y = \{z \in \Re \,|\, z = x \cdot y \, para \, algum \, x \in X \, e \, y \in Y\}$. Uma caracterização do produto intervalar em termos de seus extremos pode ser vista a seguir:

$X \cdot Y = [a, b] \cdot [c, d] = [min\{a \cdot c,\; a \cdot d \, b \cdot c \, b \cdot d\}\,,\, max\{a \cdot c,\; a \cdot d \, b \cdot c \, b \cdot d\}].$

(equação 26)

E as propriedades algébricas do produto intervalar são associatividade, comutatividade, o elemento neutro que é o $1 = [1, 1]$, subdistributividade com respeito à soma e $A \cdot 0 = X \cdot [0, 0] = [0, 0]$.

3.3.3 Divisão por um escalar

Seja o intervalo $X = [a, b]$ e o escalar $y \in \Re$ e $y > 0$ (ou seja, $y \in \Re^+$), então a divisão de um intervalo por um escalar é definido por:

$\frac{X}{y} = \{z \in R \,|\, z = \frac{x}{y}\, para\, algum\, x \in X\, e\, y \in \Re *\}$. Uma caracterização da divisão de um intervalo por um escalar em termos de seus extremos é:

$$\frac{X}{y} = \frac{[a,b]}{y} = [\min(\frac{a}{y}\,,\,\frac{b}{y}), \max(\frac{a}{y}\,,\,\frac{b}{y})].$$

(equação 27)

E as propriedades algébricas do produto intervalar são associatividade, comutatividade e subdistributividade.

Será feita agora a definição de algumas operações intervalares

Subtração

$X - Y = X + (-Y)[a,b] + (-[c,d]) = [a,b] + [-c,-d] = [a-c, b-d]$

(equação 28)

Pseudo Inverso da Multiplicação

$X^{-1} = \frac{1}{X} = [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$

(equação 29)

Divisão

$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} = [a,b] \cdot [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$

(equação 30)

Quadrado

$$X^2 = \begin{cases} [a^2, b^2] & \text{, se } a \geq 0; \\ [b^2, a^2] & \text{, se } b \leq 0; \\ [0, \max(a^2, b^2)] & \text{, senão} \end{cases}$$

(equação 31)

3.3.4 Função Raiz Quadrada

Defini-se a função raiz quadrada intervalar por:

$$\sqrt{\ } : I\Re^+ \rightarrow I\Re^+ \; por \; [a,b] \rightarrow \sqrt{[a,b]}$$

Onde

$$\sqrt{[a,b]} = \{x \mid x = \sqrt{y} \text{ para algum } y \in X\} \; = [\sqrt{a}, \sqrt{b}]$$

3.3.5 Função Raiz Cúbica

Defini-se a função raiz cúbica intervalar por:

$$\sqrt[3]{\ } : I\Re^+ \rightarrow I\Re^+ \; por \; [a,b] \rightarrow \sqrt[3]{[a,b]}$$

Onde

$$\sqrt[3]{[a,b]} = \{x \mid x = \sqrt[3]{y} \, para \, algum \, y \in X\} \; = [\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}]$$

3.3.6 Propriedades Algébricas da Aritmética Intervalar

Apresentar-se-á nesta subseção as propriedades (tanto da soma quanto da divisão) de Fechamento, Comutativa, Associativa, Elemento Neutro além da Subdistributiva que envolve soma e multiplicação. è necessário deixar claro que $X, Y, Z \in I\Re$, isto é, que os conjuntos X, Y, e Z são intervalos Reais.

Fechamento

Se $X, Y \in I\Re$, então $X + Y \in I\Re$

Se $X, Y \in I\Re$, então $X \cdot Y \in I\Re$

Associativa

$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) + Z$

Comutativa

$X + Y = Y + Z$

$X \cdot Y = Y \cdot Z$

Elemento Neutro

$X + [0, 0] = X$

$X \cdot [1, 1] = X$

Subdistributiva

$X \cdot (Y + Z) \subseteq (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$

$X \cdot [0, 0] \equiv [0, 0]$

$X + [1, 1] \equiv [1, 1]$

3.3.7 Função Intervalar

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função, $X = Dom(f) \subseteq I\Re$, $Y = Cod(f) \subseteq I\Re$ e $X \rightarrow I\Re$ então f é uma função intervalar de uma variável intervalar.

3.3.8 Ordem

É possível desenvolver um sistema que não possua ordem; e ás vezes, isso é até necessário para se implementar o mesmo, como por exemplo caso queira representar todos os fios da juba de um determinado leão; apesar de se poder estabelecer uma ordem (de tonalidade por exemplo) para os fios.

Há algumas ordens parciais que podem ser definidas para intervalos [Callejas-Bedregal, 2001], entre elas, a **Ordem de Moore**, a **Ordem de Kulisch-Miranker**, a **ordem da Teoria dos Conjuntos**,e a **Ordem da Informação**. A que será usada ao longo do trabalho será a segunda e a última. No entanto a ordem de informação só será apresentada na próxima subseção, como uma ordem parcial; e a ordem de Kulisch-Miranker será definida a seguir:

Ordem de Kulisch-Miranker

$[a, b] \leq_K [c, d] \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \exists y \in [c, d] \mid x \leq_{\Re} y$ e $\forall y \in [c, d] \exists x \in [a, b] \mid x \leq_{\Re} y \Leftrightarrow a \leq_{\Re} c$ e $b \leq_{\Re} d$.

Logo $[a, b] \leq_K [c, d] \Leftrightarrow a \leq_{\Re} c$ e $b \leq_{\Re} d$.

3.3.9 Mínimos e Máximos Intervalares

Para determinação dos mínimos e máximos entre dois intervalos usa-se os operadores MIN e MAX, chamados de mínimo e máximo intervalar. Os mesmos são definidos como mostra a definição 3.1.

Definição 3.1 $MIN[a, b], [c, d] = [min(a, c), min(b, d)]$

$MAX[a, b], [c, d] = [max(a, c), max(b, d)]$

Note que na verdade MAX e MIN são o supremo e ínfimo, pois $MAX(X, Y)$ e $MIN(X, Y)$ não necessariamente é X ou Y.

3.3.10 Intervalos Genéricos

Em [Callejas-Bedregal, 2001] foi descrito um construtor intervalar sobre conjuntos parcialmente ordenados e que poderiam ser usados para lidar com intervalos, não só de números reais mas para intervalos de qualquer tipo, desde que o tipo fonte possua uma ordem parcial. Assim, se C é um conjunto e $\leq_C$ uma ordem parcial sobre C, então o conjunto $I(C) = \{[a, b] \,|\, a, b \in C \text{ e } a \leq_C b\}$ é denominado de conjunto dos intervalos de C.

Em [Callejas-Bedregal, 2001] também foram estendidas as diversas ordens parciais que incidem sobre os intervalos reais. Dentre elas tem-se a ordem de informação: Seja $[a, b], [c, d] \in I(C)$, $[c, d]$ é uma informação melhor que $[a, b]$, denotado por $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$, se e somente se, $a \leq_C c$ e $d \leq_C b$.

Capítulo 4

Representação de Intervalos Computacionais

É de extrema importância o desenvolvimento de um capítulo para abordar qual a melhor forma de representar intervalos, já que o trabalho busca uma teoria de um sistema de representação fuzzy intervalar.

Intimamente ligado ao conceito de representação intervalar estão os conceitos de corretude e optimalidade além de conceitos de continuidade (Continuidade de Scoot e de Moore). Os conceitos de optimalidade e corretude devem ser sempre considerados quando se trata de análises intervalares, uma vez que é sempre desejado que o cálculo intervalar possua essas duas propriedades. Portanto serão estudados neste capítulo algumas propriedades de representações intervalares, considerando a aritmética mostrada em 3.2 que é a aritmética proposta por Moore em [Moore, 1962].

Para começar a falar da aritmética intervalar é importante fazer algumas definições. Começando pelo conjunto das funções intervalares, que é dividido em duas classes: A classe das funções intervalares racionais (que são computadas a partir das 4 operações aritméticas fundamentais) e a classe das funções intervalares irracionais (que são computadas usando aproximações racionais e por isso qualquer função que possa ser calculada com métodos de ponto-flutuante pode ser feita também pelas suas extensões intervalares).

Corretude é outro conceito fundamental da **teoria fundamental da aritmética intervalar** proposta no teorema 3.1 de [Moore, 1979]. A partir deste teorema pode ser interpretado que a classe das funções que são inclusão monotônica tem a propriedade de corretude e já que todas as operações aritméticas ($X \odot Y = \{x \odot y : x \in Xey \in Y\}$ onde $\odot = \{+, -, /, \cdot\}$) são também inclusões monotônicas ([Moore, 1979]), então todas as funções racionais intervalares são também corretas. E uma função intervalar F é dita ser inclusão monotônica se $X_i \subset Y_i$ para $i \in [1, n]$ o que implica em:

$$F(X_1, \ldots, X_n) \subset F(Y_1, \ldots, Y_n)$$

A noção de continuidade é uma noção proveniente de espaços topológicos. O conjunto dos números reais, R, assim como RxR, têm uma topologia bem aceita na matemática e, portanto, tem uma noção de continuidade. Em funções intervalares seria interessante falar das noções de continuidade de Moore construída em [Moore, 1962] e a de Scott. A continuidade de Moore propõe uma noção de distância para intervalos:

$$diX, Y = Max(|\underline{x} - \underline{y}|, |\overline{x} - \overline{y}|)$$

(equação 32)

Esta distância está provada ser uma métrica e por isso fornece uma noção de continuidade: então segundo Moore, uma função $F : I(\Re) \rightarrow I(\Re)$ é Moore-contínua se

$\forall x \in I(\Re)$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall Y \in I(\Re)$, $diX, Y \leq \delta \Rightarrow diF(X), F(Y)$.

Como os conceitos de continuidade de Moore e de Scott não afetarão a teoria da representação que será contruída neste trabalho, parar-se-á de falar sobre a mesma por aqui. Explicitando apenas que as funções intervalares que são

Moore-Contínua não implica ser uma função Scott-contínua e vice-versa, mas há interseção entre esses dois conjuntos. E que uma função f é continua se, e somente se, a representação intervalar canônica (CIR(f)) for Moore e Scott Contínuas (resulatdos provados em [Santiago, 2006]).

Nas seções seguintes serão vistos aspectos de corretude e optimalidade, definições do que são representações e extensões intervalares e se explicará o que é a chamada representação canônica intervalar e suas propriedades.

4.1 Representações

De acordo com Hickey em [Hickey, 2001], um sistema de aritmética intervalar tem as seguintes propriedades: corretude, totalidade, fechamento, optimalidade e eficiência. Representação intervalar deve interpretar corretude e a representação canônica intervalar interpreta corretude e também optimalidade.

4.1.1 Representações e Extensões

Extensões intervalares foram propostas por Moore e sua função é generalizar funções reais em termos de funções intervalares. Antes de definí-la seria importante especificar que a terminologia que será ultilizada nesta seção e no resto do trabalho será a mesma e com os mesmos sinificados da ultilizada em [Moore, 1979].

Definição 4.1.1(Extensão intervalar) Uma função $F\colon I(\Re) \rightarrow I(\Re)$ é uma extensão intervalar de uma função $f\colon \Re \rightarrow \Re$, se $\forall x \in \Re$, $F([x, x]) = [f(x), f(x)]$.

Definição 4.1.2(Representação intervalar ou Corretude) Uma função intervalar F está correta com respeito a uma determinada função real f se satisfizer a seguinte propriedade:

$x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \in F([a, b])$.

Podendo se dizer também que F representa f ou que F é uma representação intervalar de *f*. Portanto, um algoritmo intervalar A(x) é correto com respeito a, ou representa, uma função real f se A(x) puder ser interpretado como uma função parcial intervalar F que representa f (*tradução própria da definição de representação de [Santiago, 2006]).

Definidas as representações e extensões intervalares, podem ser feitas algumas ressalvas com respeito a este assunto, cuja prova de tais proposições podem ser lidas em [Santiago, 2006].

Existem representações intervalares que não são extenções intervalares sendo o contrário tambem verdade. E a interseção entre o conjunto das extensões intervalares e o conjunto das representações intervalares não é vazio (como exemplo tem-se a aritmética de Moore e a função identidade).

4.2 Propriedades de Representação

Falar das propriedades da representação é obviamente muito importante na contrução de uma representação, já que há a necessidade de saber se aquela construção é realmente uma representação intervalar. Para isso citar-se-á propriedades (proposições) cuja prova pode ser vista em [Santiago, 2006].

- Pode existir uma função intervalar $F : I(\Re) \rightarrow I(\Re)$ e a mesma não representar uma função real.
- Nem toda função real f admite uma representação intervalar e isso pode ser observado em funções assintóticas. Porém, em funções assintóticas, esta propriedade pode não ser obedecida se, e somente se, a noção de funções intervalares parciais seja considerada, ou seja: as funções assintóticas reais obrigam a "parcialidade" em representações intervalares. Outro modo de fugir desta propriedade seria fazendo a introdução de um elemento de *bottom*, no entanto este elemento obriga mudanças nos requerimentos da quasi-metrica que a torna com uma complexidade muito grande o que

faz com que não seja trabalhado com essa introdução do bottom (para entender melhor veja a proposição 4.6 de [Santiago, 2006]).

- Toda função monotônica $F : I(\Re) \to I(\Re)$ representa uma função real *f*. Mas nem toda representação intervalar é uma função monotônica.

- O conjunto das funções monotônicas intervalares é um subconjunto das representações intervalares

4.3 Representações Canônicas

Nas seções anteriores tratou-se das extensões e representações intervalares e, um pouco, das funções que são inclusões monotônicas. Agora tratar-se-á da classe de funções intervalares. Tal classe está associada aos algritmos intervalares que satisfazem a propriedade de optmalidade ([Hickey, 2001]), ou seja, são algoritmos que retornam intervalos de menor abrangência possível. É interessante notar que essa classe se encontra na interseção entre outras 3 classes de funções que já foram tratados neste capítulo (classes das funções que são extensões intervalares, classe das funções que são representações intervalares e das funções que são inclusões monotônicas) e por isso vai herdar todas as propriedades provenientes dessas 3 classes.

Então seja $f : \Re \to \Re$ se f é uma função real total não-assintótica, logo a função que a define melhor e que é também uma representação intervalar (além de uma extensão ntervalar e uma inclusão monotônica) é:

$$\mathit{CIR(f)}([a,b]) = [minf([a,b]), maxf([a,b])];$$

(equação 33)

e é chamada de **representação intervalar canônica** de *f*.

Portanto seja $f : \Re \to \Re$ uma função real total não-assintótica , então para cada $[a,b] \in I(\Re)$, $\mathit{CIR(f)}([a,b])$ é o menor intervalo que contém a imagem *f*($[a, b]$). Isto é, *CIR(f)* é uma função que mapeia cada intervalo [a,b] no menor intervalo contendo f([a,b]). Essa definição é de uma importantância extrema, pois ela captura e formaliza a idéia de optimalidade proposta por Hickey ([Hickey, 2001]).

Outra proposição provada em [Santiago, 2006] mostra que se $f : \Re \rightarrow \Re$ é contínua então para todo $[a, b] \in I(\Re)$, *CIR(f)*($[a, b]$) = *f*($[a, b]$) e $Cir(f)$ é Moore e Scott-contínua)

Conclui-se este capítulo com a proposição 5.2 do artigo [Santiago, 2006] que diz que:

Para toda representação intervalar F de uma função real *f*, $F \sqsubseteq$ *CIR(f)*.

Portanto *CIR(f)* é a melhor representação intervalar de uma função real f; isso, obviamente, se f admitir representação intervalar.

Capítulo 5

Teoria de uma Representação Fuzzy Intervalar

Devido à crescente nescessidade de implementação de sistemas mais eficientes, precisos e que retratem problemas cada vez mais diversificados, novas tecnologias devem surgir pra suprir tal necessidade. Como já falado anteriormente, no capítulo de introdução, há inúmeras aplicações atualmente que precisam se utilizar da teoria dos conjuntos fuzzy. E no caso do uso de análises intervalares, Yam em [Yam, 1999], cita três situações em que o uso de valores mais genéricos são necessários, como por exemplo, quando um cientista ou projetista está indeciso sobre a definição de uma certa variável e por conseqüência ele também terá dificuladade de definir o grau de eprtinência dessa variável. Diversas outras aplicações têm necessidade de usufruir de análises intervalares para solucionar problemas, como um especialista que define um valor irracional para representar um grau de pertinência é um outro bom exemplo dessa necessidade. Outros exemplos de campos que usam a matemática intervalar com freqüência foram ciatados na introdução.

Falou-se, também na introdução, da criação da teoria fuzzy intervalar por Silveira, que mescla os dois conceitos, ou melhor, que usam a teoria fuzzy e a teoria intervalar para desenvolver sistemas. Há um projeto em andamento (apoiado pelo CNPq – edital universal 2004) para modelar um sistema fuzzy intervalar, que tendo como entrada, ângulos (pontuais) advindos de um DataGloves hipotético seja capaz de reconhecer qual configuração de mãos da LIBRAS (Língua Brasileira de Sinais) que essas entradas representam. Portanto se baseia na proposta de sistemas fuzzy intervalar descrita na dissertação de mestrado de Silveira [Silveira, 2002].

Para tanto, este capítulo irá mostrar do que se trata a teoria dos conjuntos fuzzy intervalar, as definições das representações intervalares de conjuntos, relações e composições de relações fuzzy, assim como das funções de pertinência, além das operações e propriedades fuzzy intervalar e do sistema de inferência fuzzy intervalar.

5.1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intervalares

A necessidade de se intervalarizar um conjunto fuzzy é a mesma tida para começarem a utilizar a matemática intervalar em lógicas clássicas. Um especialista pode não ter a certeza de que uma determinada variável valha 2,01 ou 2,002, por exemplo. Ou até por necessidade consequente dos erros de computação numérica em que quando se usa a lógica fuzzy é até mais freqüente devido à utilização constante de valores reais. E neste caso, o uso da matématica intervalar implica em corretude dos sistemas que por sua vez necessitam ser cada vez mais precisos (como no caso de se ter um sistema que precise calcular a função de Rump, por exemplo).

5.1.1 Representação de Conjuntos Fuzzy Intervalares

As principais diferenças de um conjunto fuzzy (definido no capítulo 2) para um conjunto fuzzy intervalar, proposto nesta monografia, é: o grau de pertinência, que é um um número real pertencente ao intervalo [0,1] na teoria dos conjuntos fuzzy e agora será um subintervalo do intervalo [0,1]; e a entrada, que ao invés de ser um elemento de um conjunto fuzzy, será um elemento de um conjunto intervalar, isto é, de um conjunto cujos elementos são intervalos de um universo de intervalos.

Ver-se-á nesta subseção que há conjuntos fuzzy e conjuntos fuzzy intervalar. E que pode ser feita a intervalização do primeiro, transformando-o no segundo.

Na equação 4 viu-se que um conjunto fuzzy 'A' poderia ser representado da forma:

$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$.

Onde U é o universo de discurso.

Definir-se-á agora o conjunto fuzzy intervalar:

Definição 5.1.1: Seja U_{IA} um conjunto de intervalos. Um conjunto fuzzy intervalar IA sobre o universo U_{IA} é

$$IA = \{(X, \varphi_{IA}([\underline{x}, \overline{x}])) | X \in U_{IA}\}$$

(equação 34)

Proposição 5.1.1: Seja A um conjunto fuzzy sobre um universo U_A, e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A. Então

$I(A) = \{(X, \varphi_{I(A)}(X)) | X \in I(U_A)\}$.

(equação 35)

onde $\varphi_{I(A)}(X) = [\inf\{\mu_A(x)|x \in X\}, \sup\{\mu_A(x)|x \in X\}]$, é um conjunto fuzzy intervalar.

•

Definição 5.1.2: Seja A um conjunto fuzzy sobre o universo U_A e IA um conjunto fuzzy intervalar sobre $I(U_A)$. Então IA representa intervalarmente A se, e somente se $\forall X \in I(U_A)$ e $x \in X$, $\mu_A(x) \in \varphi_{IA}(X)$ ou seja $\mu_A(x) \in \varphi_{IA}(X)$.

Proposição 5.1.2: Seja A um conjunto fuzzy sobre um universo U_A, e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A. Então

$I(A)$ representa intervalarmente A.

Prova: Prova direta da proposição 5.1.1. e da definição 5.1.2.

•

Definição 5.1.3: Seja A um conjunto fuzzy sobre o universo U_A e $I(A_1)$ e $I(A_2)$ dois conjuntos fuzzy intervalar sobre $I(U_A)$ tais que ambos representam intervalarmente A. Diz-se que $I(A_2)$ é uma representação intervalar de A melhor que $I(A_1)$, denotado por $I(A_1) \preceq I(A_2)$, se e somente se, para todo $X \in I(U_A)$, $I(A_1)(X) \sqsubseteq I(A_2)(X)$.

Proposição 5.1.3: Seja A um conjunto fuzzy sobre um universo U_A, e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A. Então

$I(A)$ é a melhor representação intervalar de A.

Prova: Prova direta, já que I(A) é uma representação canônica intervalar de A.

•

Assim, $\varphi_{I(A)}(X) = CIR(\mu_A)(X)$.

Para ilustrar melhor a idéia de conjuntos fuzzy intervalar, mostrar-se-á o exemplo do conjunto fuzzy intervalar frio representado pelo gráfico (figura 5.1)

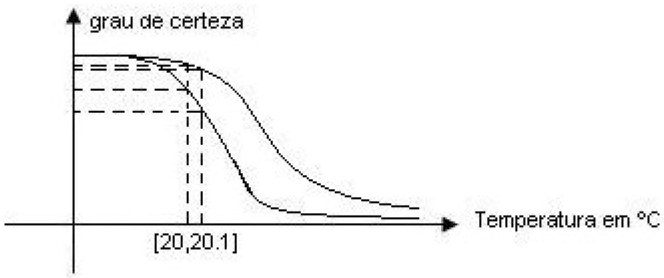

Figura 5.1: Conceito fuzzy intervalar de frio

Para um melhor entendimento do gráfico e das funções de pertinência, vide a próxima subseção.

5.1.2 Funções de Pertinência

As funções de pertinênicia na teoria dos conjuntos fuzzy intervalar podem ser melhor estruturadas e modeladas da forma proposta por Silveira e Bedregal em [Silveira, 2001], isto é, usando o limite inferior e superior da função de pertinência. Pois as fuções de pertinência podem ser formuladas por especialistas que possuem idéias distintas sobre o tema que a função de pertinência retrata e por conseguinte puderam formular funções distintas; portanto é bastante aceitável construir a função de pertinência da foma proposta por Silveira e Bedregal, uma vez que ela acaba considerando as opniões de, e os valores determinados por, todos os especialistas envolvidos. Além de um mesmo especialista poder não ter certeza dos valores exatos os quais a função deve retornar.

Em função disso pode-se estabelecer a função de pertinência a partir dos valores retornados por uma **função limite inferior** e uma outra **função de limite superior**. Como poderá ser visto na modelagem da função de pertinência na figura 5.2.

Onde a função de pertinência de limite inferior é denotada por $\varphi_{IAi}(X)$ e a função de pertinêcia de limite superior denotada por $\varphi_{IAs}(X)$, em que $\varphi_{IAi} : U_{IA} \rightarrow [0,1]$ e $\varphi_{IAs} : U_{IA} \rightarrow [0,1]$.

Além do uso das projeções π_1 e π_2. Onde $\pi_1([a,b]) = a$ e $\pi_2([a,b]) = b$.

Definição 5.1.4: $\varphi_{IAi}(X)$ é a função de pertinência do limite inferior e é definida da seguinte forma sobre o universo intervalar U_{IA}:

$$\varphi_{IAi}(X) = \pi_1 \varphi_{IA}(X).$$

(equação 36)

$\varphi_{IAs}(X)$ é a função de pertinência de limite superior e é definida da seguinte forma:

$$\varphi_{IAs}(X) = \pi_2 \varphi_{IA}(X).$$

(equação 37)

Para um melhor entedimento, vide agora o gráfico da função de pertinência composto pelas funções de limite inferior e de limite superior.

Sendo as funções de limite inferior e de limite superior, esboçadas pelos gráficos das figuras 5.3. e 5.4, respectivamente.

É importante observar que a função de pertinência é composta pelas funções de limite superior e inferior. Deve-se saber também, que a abscissa será sempre formada por intervalos $[\underline{x}, \overline{x}]$ que dependendo dos seus valores irão mapear um determindo $\varphi_{IA}(X)$ que é o mesmo que $\varphi_{IA}([\underline{x}, \overline{x}])$. Este por sua vez (como pode ser visto na figura 5.2) é composto pelo valor $\varphi_{IAi}(X)$ e um valor $\varphi_{IAs}(X)$.

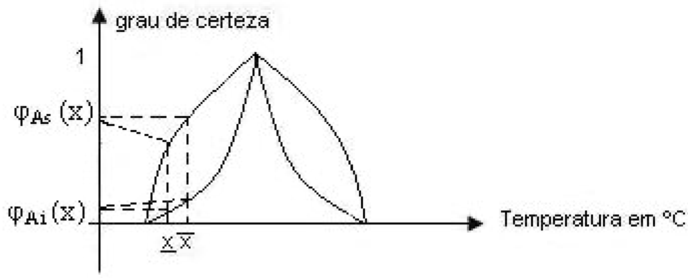

Figura 5.2: Função de pertinência fuzzy intervalar

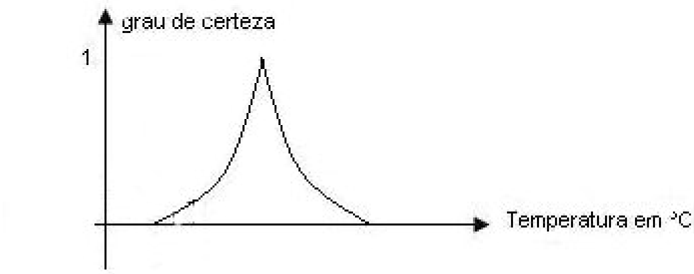

Figura 5.3: Função de limite inferior

A única diferença da construção da função de pertinência fuzzy intervalar proposta aqui, da abordada em [Silveira, 2002] são os valores da abscissa serem compostos por intervalos, o que conseqüentemente promoverá uma outra mudança, esta agora, na obtenção do valor de $\varphi_{IA}(X)$. Pois, apesar da função de pertinência ser apresentada de forma semelhante ($\varphi_{IA}(X) = [\varphi_{IAi}(X), \varphi_{IAs}(X)]$), note que as funções de limite superior e de limite inferior são obtidas a partir da função de pertinência fuzzy intervalar e não o contrário (como ocorre em [Silveira, 2002]). Mais detalhes sobre as diferenças entre as duas teorias serão tratados na conclusão do trabalho.

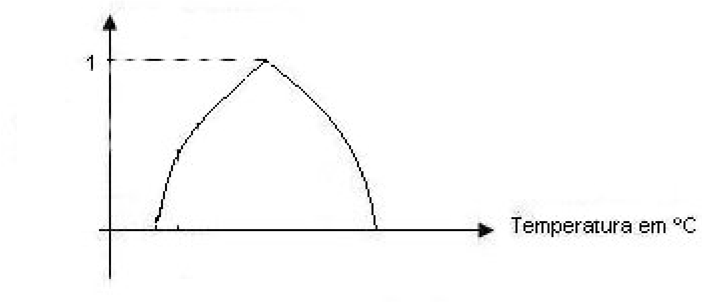

Figura 5.4: Função de limite superior

Considere também que nem sempre as funções limitantes φ_{IAi} e φ_{IAs} têm comportamentos uniformes como foi mostrado nas figuras 5.3 e 5.4. De fato, pela abscissa ser intervalar, que é um conjunto não totalmente ordenado, nem sempre será possível representá-lo graficamente como na figura 5.2. Esta representação gráfica só será possível quando a φ_{IA} for de fato a representação canônica intervalar de uma função de pertinência fuzzy, isto é quando for da forma:

$$\varphi_{I(A)}(X) = CIR(\mu_A)(X)$$

5.2 Operações Básicas com Conjuntos Fuzzy Intervalares

Já que para desenvolver uma teoria de conjuntos é necessário especificar suas principais operações. Então especificar-se-á as operações básicas que envolvem a teoria fuzzy intervalar que é, na verdade, uma extensão da teoria fuzzy de Zadeh ([Zadeh, 1965]).

As operações serão feitas sobre os conjuntos A e B. Os conjuntos A e B são conjuntos fuzzy intervalar - por simplificação de termos, foram definidos os conjuntos fuzzy intervalar como A e B, ao invés de IA e IB como vinha sendo feito anteriormente e como continuará sendo feito nas próximas seções) definidos da seguinte forma:

$A = \{(X, \varphi_A(X))|X \in U'_A\}$;

$B = \{(X, \varphi_A(X))|X \in U'_B\}$

5.2.1 Igualdade

$A = B \leftrightarrow (\varphi_A(X) = \varphi_B(X)), \forall x \in U.$

O que quer dizer que dois conjuntos fuzzy intervalar são iguais se e somente se suas funções de pertinência tiverem os mesmos valores para todos os valores da entrada.

É importante notar que se define aqui como igualdade a igualdade clássica, sobre conjuntos fuzzy intervalares, em outras palavras, a igualdade, nesta subseção, foi definida para valores crisp, ou seja, ou é igual ou não é igual. É interessante lembrar que a igualdade também pode ser definida como uma igualdade fuzzy tendo-se então valores do intervalo [0,1] para determinar o quanto um conjunto é igual ao outro, ou ainda como uma igualdade fuzzy intervalar.

5.2.2 Inclusão

$A \subseteq B \leftrightarrow (\varphi_A(X) \leq_K \varphi_B(X)), \forall X \in U$

Quer dizer que para um conjunto (A por exemplo) estar contido dentro de outro (B), é necessário e suficiente que tenhham o mesmo universo e que a função de pertinência do primeiro conjunto seja $\leq$ (obedecendo a ordem de Kulisch-Miranker definida em 3.2.4) do que a função de pertinência do segundo $(\varphi_A(X) \leq_K \varphi_B(X))$, para todos os elementos do domínio.

5.2.3 União e Interseção

Para especificar os operadores de União e Intersecção serão usados os operadores **intervalares** MAX e MIN que por sua vez utilizam os operadores max e min, foram definidos no capítulo 2. No entanto MAX e MIN não serão os únicos operadores capazes de interpretar operações de disjunção e conjunção fuzzy intervalar. Uma vez que há as Normas Triangulares (T-normas) e as T-conormas que também podem ser utilizadas para a interpretar uma conjunção e uma disjunção respectivamente na lógica fuzzy e conseqüentemente também na lógica Fuzzy Intervalar. Para tanto definir-se-á União da seguinte forma:

$A \vee B = A \cup B = \{X,\, MAX\{\varphi_A(X), \varphi_B(X)\}\,|\, X \in U\}$

$A \cup B = \{(X,\, [MAX\{\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X) rbrace, MAX\{\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X)\}])\}$

E a interseção é definida da seguinte forma:

$A \wedge B = A \cap B = \{(X,\, MIN\{\varphi_A(X), \varphi_B(X)\})\,|\, X \in U\}$

$A \cap B = \{(X,\, [MIN\{\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X) rbrace;\, MIN\{\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X)\}])\}\,|$
$X \in U\}$

5.2.4 Complemento

O complemento é a função equivalente ao not da lógica fuzzy e pode ser implementado também através de um modificador lingüístico. E a sua definição pode ser vista a seguir:

$$NOT\, A = \{(X,\, 1 - \varphi_A(X))\,|\, X \in U\}$$

$NOT\, A = \{(X,\, [1 - \varphi_{As}(X); 1 - \varphi_{Ai}(X)])\,|\, X \in U\}$

5.2.5 Diferença

$A - B = \{(X,\, MIN\{\varphi_A(X), NOT\varphi_B(X)\})\,|\, X \in U\}$

$A - B = \{(X,\, MIN\{\varphi_A(X), 1 - \varphi_B(X)\}) \,|\, X \in U\}$

$A - B = \{(X,\, MIN\{\varphi_A(X), [1 - \varphi_{Bs}(X), 1 - \varphi_{Bi}(X)]\}) \,|\, X \in U\}$

5.3 Propriedades dos Conjuntos Fuzzy Intervalares

As propriedades para conjuntos fuzzy intervalar demonstradas em [Silveira, 2002] (da página 97 a 100) São também propriedades para os conjuntos fuzzy intervalar definidos neste trabalho. Ver-se-á então as proriedades válidas para união, interseção e complemento. Assumindo que A, B e C são conjuntos fuzzy intervalar.

5.3.1 Idempotência

$A \cup A = \{(X, MAX\{\varphi_A(X),\, \varphi_A(X)\}) \,|\, X \in U\}$

$A \cup A = \{(X,\, \varphi_A(X)) \,|\, X \in U\}$

$A \cup A = A$

$A \cap A = \{(X, MIN\{\varphi_A(X),\, \varphi_A(X)\}) \,|\, X \in U\}$

$A \cap A = \{(X,\, \varphi_A(X)) \,|\, X \in U\}$

$A \cap A = A$

5.3.2 Identidade

Para mostrar que tal propriedade é aceita deve-se definir os conjuntos H e F: $H = \{(X, [1, 1]) \,|\, X \in U\}$; e $F = \{(X, [0, 0]) \,|\, X \in U\}$. Então:

$A \cap H = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), \varphi_H(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cap H = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), [1,1]\}) \mid X \in U\}$

$A \cap H = \{(X,\ \varphi_A(X)) \mid X \in U\}$

$A \cap H = A$

$A \cup F = \{(X,\ MAX\{\varphi_A(X), \varphi_F(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cup F = \{(X,\ MAX\{\varphi_A(X), [0,0]\}) \mid X \in U\}$

$A \cup F = \{(X,\ \varphi_A(X)) \mid X \in U\}$

$A \cup F = A$

$A \cap F = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), \varphi_F(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cap F = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), [0,0]\}) \mid X \in U\}$

$A \cap F = \{(X, [0,0]) \mid X \in U\}$

$A \cap F = \{(X,\ \varphi_F(X)) \mid X \in U\}$

$A \cap F = F$

$A \cup H = \{(X,\ MAX\{\varphi_A(X), \varphi_H(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cup H = \{(X,\ MAX\{\varphi_A(X), [1,1]\}) \mid X \in U\}$

$A \cap H = \{(X, [1,1]) \mid X \in U\}$

$A \cup H = \{(X,\ \varphi_H(X)) \mid X \in U\}$

$A \cup H = H$

5.3.3 Comutativa

$A \cap B = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), \varphi_B(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cap B = \{(X,\ MIN\{\varphi_B(X), \varphi_A(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = \{(X,\ MAX\{\varphi_A(X), \varphi_B(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cup B = \{(X,\ MAX\{\varphi_B(X), \varphi_A(X)\}) \mid X \in U\}$

$A \cup B = B \cup A.$

5.3.4 Associativa

$(A \cap B) \cap C = \{(X,\ MIN\{MIN\{\varphi_A(X), \varphi_B(X)\}, \varphi_C(X)\}) \mid X \in U\}$

$(A \cap B) \cap C = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), \varphi_B(X), \varphi_C(X)\}) \mid X \in U\}$

$(A \cap B) \cap C = \{(X,\ MIN\{\varphi_A(X), MIN\{\varphi_B(X), \varphi_C(X)\}, \}) \mid X \in U\}$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

$(A \cup B) \cup C = \{(X,\, MAX\{MAX\{\varphi_A(X), \varphi_B(X)\}, \varphi_C(X)\}) \mid X \in U\}$

$(A \cup B) \cup C = \{(X,\, MAX\{\varphi_A(X), \varphi_B(X), \varphi_C(X)\}) \mid X \in U\}$

$(A \cup B) \cup C = \{(X,\, MAX\{\varphi_A(X), MAX\{\varphi_B(X), \varphi_C(X)\}, \}) \mid X \in U\}$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

5.3.5 Distributiva

$A \cap (B \cup C) = \{(X,\, MIN\{\varphi_A(X);\, MAX\{\varphi_B(X);\, \varphi_C(X)\}, \}) \mid X \in U\}$

$A \cap (B \cup C) = \{(X,\, [min(\varphi_{Ai}(X);\, max(\varphi_{Bi}(X), \varphi_{Ci}(X))),$
$min(\varphi_{As}(X),\, max(\varphi_{Bs}(X), \varphi_{Cs}(X)))] \mid X \in U\}$

$A \cap (B \cup C) = \{(X,\, [max(min(\varphi_{Ai}(X),\, \varphi_{Bi}(X));\, min(\varphi_{Ai}(X),\, \varphi_{Ci}(X))),$
$max(min(\varphi_{As}(X),\, \varphi_{Bs}(X)),\, min(\varphi_{As}(X),\, \varphi_{Cs}(X)))]) \mid X \in U\}$

$A \cap (B \cup C) = \{(X,\, MAX\{MIN\{\varphi_A(X);\, \varphi_B(X)\};\, MIN\{\varphi_A(X);\, \varphi_C(X)\}\})$
$\mid X \in U\}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = \{(X,\, MAX\{\varphi_A(X);\, MIN\{\varphi_B(X);\, \varphi_C(X)\}, \}) \mid X \in U\}$

$A \cup (B \cap C) = \{(X,\, [max(\varphi_{Ai}(X);\, min(\varphi_{Bi}(X), \varphi_{Ci}(X))),$
$max(\varphi_{As}(X),\, min(\varphi_{Bs}(X), \varphi_{Cs}(X)))] \mid X \in U\}$

$A \cup (B \cap C) = \{(X, [min(max(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X)); max(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Ci}(X))), min(max(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X)), max(\varphi_{As}(X), \varphi_{Cs}(X)))]) \mid X \in U\}$

$A{\cup}(B{\cap}C) = \{(X, MIN\{MAX\{\varphi_A(X); \varphi_B(X)\}; MAX\{\varphi_A(X); \varphi_C(X)\}\}) \mid X \in U\}$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5.3.6 Complemento Duplo

$NOT(NOTA) = NOT(\{(X, 1 - \varphi_A(X)) \mid X \in U\})$

$NOT(NOTA) = \{(X\, 1 - (1 - \varphi_A(X)) \mid X \in U\}$

$NOT(NOTA) = \{(X\, 1 - [1 - \varphi_{As}(X), 1 - \varphi_{Ai}(X)]) \mid X \in U\}$

$NOT(NOTA) = \{(X\, [1 - (1 - \varphi_{Ai}(X)), 1 - (1 - \varphi_{As}(X))]) \mid X \in U\}$

$NOT(NOTA) = \{(X\, [\varphi_{Ai}(X), \varphi_{As}(X)]) \mid X \in U\}$

$NOT(NOTA) = (\{(X\, \varphi_A(X)) \mid X \in U\}$

$NOT(NOTA) = A$

5.3.7 Leis de DeMorgan

Com a utilização das operações de complemento, união e interseção; e aplicando a propriedade da distributividade obtém-se que as Leis de DeMorgan são propriedades da teoria fuzzy intervalar. Ou seja, obtem-se que:

$NOT(A \cup B) = NOTA \cap NOTB$. E $NOT(A \cap B) = NOTA \cup NOTB$.

Ver-se-á agora como se chegou a tal conclusão:

$NOT(A \cup B) = NOT(\{X, MAX\{\varphi_A(X); \varphi_B(X)\}| X \in U\})$

$NOT(A \cup B) = NOT(\{X, [max(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X)),$
$max(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X))]\}| X \in U\})$

$NOT(A \cup B) = \{(X, 1 - [max(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X)),$
$max(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X))]) \,|\, X \in U\}$

$NOT(A \cup B) = \{(X, [1 - max(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X))$
$1 - max(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X))]) \,|\, X \in U\}$

$NOT(A \cup B) = \{(X, [min(1 - \varphi_{As}(X), 1 - \varphi_{Bs}(X))$
$min(1 - \varphi_{Ai}(X), 1 - \varphi_{Bi}(X))]) \,|\, X \in U\}$

$NOT(A \cup B) = \{X, MIN\{1 - \varphi_A(X); 1 - \varphi_B(X)\}| X \in U\}$

$NOT(A \cup B) = NOTA \cap NOTB.$

Mostrando agora que $NOT(A \cap B) = NOTA \cup NOTB$:

$NOT(A \cap B) = NOT(\{X, MIN\{\varphi_A(X); \varphi_B(X)\}| X \in U\})$

$NOT(A \cap B) = NOT(\{X, [min(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X))$
$min(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X))]\}| X \in U\})$

$NOT(A \cap B) = \{(X, 1 - [min(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X)),$
$min(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X))]) \,|\, X \in U\}$

$NOT(A \cap B) = \{(X, [1 - min(\varphi_{As}(X), \varphi_{Bs}(X)),$
$1 - min(\varphi_{Ai}(X), \varphi_{Bi}(X))]) \,|\, X \in U\}$

$NOT(A \cap B) = \{(X, [max(1 - \varphi_{As}(X), 1 - \varphi_{Bs}(X)),$
$max(1 - \varphi_{Ai}(X), 1 - \varphi_{Bi}(X))]) \,|\, X \in U\}$

$NOT(A \cap B) = \{X,\ MAX\{1 - \varphi_A(X);\ 1 - \varphi_B(X)\} |\ X \in U\}$

$NOT(A \cap B) = NOTA \cup NOTB$

5.3.8 Lei da Exclusão Múta e Lei da Contradição

Como já devia ser esperado, as leis da exclusão mútua ($A \vee NOTA = H$) e da contradição ($A \wedge NOTA = F$) não são válidas na teoria dos conjuntos fuzzy intervalar, já que as mesmas não são válidas na teoria dos conjuntos fuzzy em função do operador $\vee$ e $\wedge$ serem interpretados pelos operadores max e min respectivamente. O que faz com que $A \vee NOTA = max(A,\ NOTA)$ seja diferente de H e $A \wedge NOTA = min(A,\ NOTA)$ seja diferente de F, sendo F e H conforme definidos em 5.3.2.

Porém, com a utilização de t-normas e t-conormas seria possivel construir operadores de conjunção e disjunção capazes de aceitar essas duas leis clássicas. A t-norma Fraca e sua t-conorma, por exemplo, poderiam ser usadas para implementar os operadores de conjunção e disjunção e tornar isso possível (conclusão baseada em [Bedregal, 2006c]).

5.4 Lógica Fuzzy Intervalar

Assim como a lógica fuzzy se baseia na toria dos conjuntos fuzzy a lógica fuzzy intervalar apresentada aqui, se baseia na teoria dos conjuntos fuzzy intervalar exposta na seção anterior. A lógica fuzzy intervalar que será apresentada aqui tem por objetivo maior o desenvolvimento de um sistema de inferência fuzzy intervalar que por sua vez será apresentado na próxima seção.

5.4.1 Variáveis Lingüísticas

As variáveis lingüísticas, análogo aos conjuntos fuzzy, são variáveis cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy intervalar. Na figura 5.5 tem-se o conceito da variável lingüística temperatura formado pelos conjutos fuzzy intervalar *frio, normal* e *quente*.

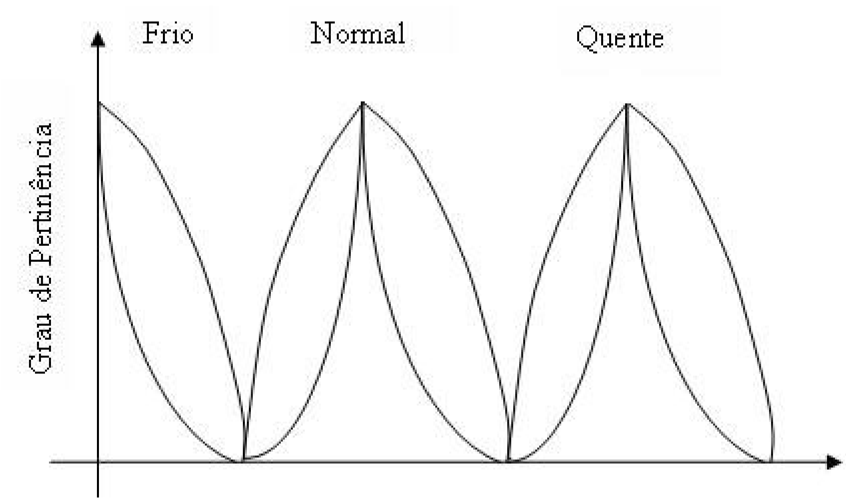

Figura 5.5: Variável lingüística fuzzy intervalar temperatura

5.4.2 Modificadores Lingüísticos

Os modificadores lingüísticos fuzzy intervalar, de forma semelhante aos modificadores lingüísticos fuzzy, proporcionam uma mudança na função de pertinência de forma que ela passe a traduzir melhor o que o nome do modificador sugere. Ou seja, o modificador possibilita relacionar o valor semântico do mesmo a uma equação matemática que faça com que o valor original seja alterado. A forma de implementação dessa mudança vai de acordo com a idéia que o especialista tem em relação à semântica do modificador. Podendo esta mudança ser aplicada em funções de pertinência de conjuntos fuzzy intervalar, assim como nas relações e composições de relações fuzzy intervalar.

Assim como os modificadores lingüísticos são usados com grande valia semântica em conjuntos, relações fuzzy e composição de relações fuzzy. Eles também poderão ser usados na teoria fuzzy intervalar, para estender os conceitos de conjuntos fuzzy intervalares, relações fuzzy intervalares e composição de relações fuzzy Intervalares..

Será definida nesta sub-seção, o modificador fuzzy intervalar de uma forma genérica e posteriormente será mostrado alguns exemplos de como eles atuariam em em conjuntos fuzzy intervalar, exemplos estes usados por Zadeh quando na sua construção da lógica fuzzy, em [Zadeh, 1965].

Definição 5.4.1 Seja A um conjunto fuzzy intervalar com a função de pertinência $\varphi_A(X)$. Então, o modificador lingüístico intervalar de A é uma função intervalar $M : I[0,1] \rightarrow I[0,1]$ que age na função de pertinência $\varphi_A(X)$ transformando-a em $\varphi_m A(X)$. Onde $\varphi_m A(X) = M(\varphi_A(X))$.

Assim, modificadores lingüísticos geram novos conjuntos fuzzy intervalar e portanto novos termos lingüísticos dentro de uma mesma variável linguística.

Para um melhor entendimento citar-se-á alguns exemplos.

Modificador Lingüístico Muito

O modificador *muito* será definido aqui de forma semelhante ao operador fuzzy *dilatação*, denotado por DIL(A) ([Zadeh, 1965]). Portanto:

$\varphi_{muito} A(X) = Muito(\varphi_A(X))$. Onde $Muito(\varphi_A(X)) = \sqrt{\varphi_A(X)}$. Como definido no capítulo 3 :

$\varphi_{muito} A(X) = [\sqrt{\varphi_{Ai}(X)}, \sqrt{\varphi_{Ai}(X)}]$.

Modificador lingüístico Extremamente

O modificador *extremamente* será definido aqui a partir da operação de raiz cúbica. Portanto:

Sendo $\varphi_{extremamente} A(X) = Extremamente(\varphi_A(X))$. Onde $Extremamente(\varphi_A(X)) = \sqrt[3]{\varphi_A(X)}$ e como definido anteriormente (no capítulo 3) $\sqrt[3]{\varphi_A(X)} = [\sqrt[3]{\varphi_{Ai}(X)}, \sqrt[3]{\varphi_{As}(X)}]$.

Modificador lingüístico Não

O modificador *não* será definido aqui fará uso do operador de complemento difinido em 5.2.4. Portanto:

Sendo $\varphi_{não}A(X) = Não(\varphi_A(X))$ e como o NOT é definido da seguinte forma: $\varphi_{não}A(X) = 1 - (\varphi_A(X))$. Logo:

$\varphi_{não}A(X) = [1 - \varphi_{Ai}(X), 1 - (\varphi_{As}(X)]$.

5.4.3 Proposições e Conectivos Lógicos

Sejam os conjuntos fuzzy intervalar A e B, definidos sob o Universo $\mathbf{U}_A$ e $\mathbf{U}_B$. E sejam as proposições p e q:

$p =$ x está em A e

$q =$ y está em B.

O grau de veracidade da proposição (da proposição p por exemplo) é obtido através da função de pertinência e é apresentado por "tr(proposição)" (no caso da proposição p tem-se: tr(p)).

Já os conectivos lógicos aplicados às proposições são: AND, OR e NOT. Sendo estes definidos em 5.2.3 e 5.2.4, no entanto, o AND e o OR, podem ser definidos de forma diferente da que foi exposta em 5.2.3, em que, ao invés do uso dos operadores MIN e MAX, pode ser usado algum operador intervalar fundamentado em uma t-norma e t-conorma (respectivamente) diferente do min e max (respectivamente) [Bedregal, 2006b, Bedregal, 2006a].

5.5 Raciocínio Fuzzy Intervalar

5.5.1 Relações Fuzzy Intervalar

As Relações, assim como, as Composições de Relações Fuzzy podem ter seus conceitos estendidos para que possam ser aplicadas com segurança em um maior número de casos. A segurança referenciada aqui, remete a casos em que erros de computação numérica, tais como, erros de truncamento ou arredondamento podem prejudicar o resultado da aplicação. São casos em que há a necessidade de obtenção de valores mais precisos e para lidar com esses casos, usufruamos da Matemática Intervalar transformando as Relações e Composições de Relações Fuzzy em Relações e Composições de Relações Fuzzy Intervalares.

Viu-se em 2.6.4 que relação fuzzy pode ser representada segundo a equação 20:

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) | x \in X \, e \, y \in Y\}$$

Podendo ser usada ainda na subseção de relações de implicação, já que a regra "**Se** x está em A **então** y está em B" descreve a relação entre x e y.

Definição 5.5.1: Uma relação fuzzy intervalar binária IR entre os conjuntos fuzzy intervalares IA e IB é definida sobre os universos U_{IA} e U_{IB} segundo a equação 38:

$$IR = \{((X,Y), \varphi_{IR}(X,Y)) | X \in U_{IA} \, e \, Y \in U_{IB}\}$$

(equação 38)

Proposição 5.5.1: É possível transformar uma Relação fuzzy R sobre os universos U_A e U_B em uma relação fuzzy intervalar $I(R)$ sobre $I(U_A)$ e $I(U_B)$.

Prova: Seja R uma relação fuzzy sobre os universos U_A e U_B; e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A e $\leq_B$ uma ordem parcial sobre U_B. Então

$I(R) = \{((X, Y),\, \varphi_{I(R)}(X, Y)) \,|\, X \in I[U_A]\, e\, Y \in I[U_B]\}$.

(equação 39)

onde $\varphi_{I(R)}(X, Y) = [\inf\{\mu_R(x, y) \,|\, x \in X\, e\, y \in Y\}, \sup\{\mu_R(x, y) \,|\, x \in X\, e\, y \in Y\}]$ e onde

$I(U_A) = \{[a, b] \,|\, a, b \in U_A ea \leq_A b\}$ e

$I(U_B) = \{[a, b] \,|\, a, b \in U_B ea \leq_B b\}$,

é claramente uma relação fuzzy intervalar.

•

Definição 5.5.2: Seja R uma relação fuzzy sobre os universos U_A e U_B e IR uma relação fuzzy intervalar sobre $I(U_A)$ e $I(U_B)$. Então IR representa intervalarmente R se, e somente se $\forall X \in I(U_A)$ e $\forall Y \in I(U_B)$, além de $x \in X$ e $y \in Y$, $\mu_R(x, y) \in \varphi_{IR}(X, Y)$.

Proposição 5.5.2: Seja R uma relação fuzzy sobre os universos U_A e U_B, e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A e $\leq_B$ uma ordem parcial sobre U_B. Então

$I(R)$ representa intervalarmente R.

Prova: Prova direta da proposição 5.5.1 e da definição 5.5.2.

•

Definição 5.5.3: Seja R uma relação fuzzy sobre os universos U_A e U_B e $I(R_1)$ e $I(R_2)$ dois conjuntos fuzzy intervalar sobre $I(U_A)$ e $I(U_B)$ e tais que ambos representam intervalarmente R. Diz-se que $I(R_2)$ é uma representação intervalar de R melhor que $I(R_1)$, denotado por $I(R_1) \preceq I(R_2)$, se e somente se, para todo $X \in I(U_A)$ e $Y \in I(U_B)$, $I(R_1)(X) \sqsubseteq I(R_2)(X)$.

A definição 5.5.3 determina que há representações intervalares de relações melhores que outras, logo constroi-se a proposição 5.5.3.

Proposição 5.5.3: Seja R uma relação fuzzy sobre um universo U_A e U_B, e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_R. Então

$I(R)$ é a melhor representação intervalar de R.

Prova: Prova direta, já que I(R) é uma representação canônica intervalar de R.

•

5.5.2 Composições de Relações Fuzzy Intervalar

As composições fuzzy intervalar, da mesma forma que as composições fuzzy, são usadas para compor duas relações, só que no caso das composição fuzzy intervalar irá compor duas relações fuzzy intervalar (IR_1 e IR_2 por exemplo). Podendo ainda ser feita a intervalização da composição de relações fuzzy ($R_1{}^oR_2$) transformando-a, de forma correta e ótima (pois usa-se a definição de CIR), em uma composição de relações fuzzy intervalizada ($I(R_1{}^oR_2)$).

Há várias composições de relações fuzzy, tais como foram apresentadas na subseção 2.6.4 e sua definições descritas na tabela 2.2. Ver-se-á nesta subseção, que há composição de relações fuzzy intervalar e que pode ser criada a composição de relação fuzzy intervalar que melhor representa determinda composição de relações fuzzy, seja ela uma Max-Min, ou Max-Produto, ou Max-Average.

Definição 5.5.4 Seja $\diamond$ uma composição de relações fuzzy intervalar, então esta pode ser uma composição de relação Max-min, Max Produto, Max Star e Max-Average fuzzy intervalar entre as relações fuzzy intervalares IR_1 e IR_2 são denotadas respectivammente por $IR_1 \circ IR_2$, $IR_1 \cdot IR_2$, $IR_1 \star IR_2$ e $IR_1 \oplus IR_2$ e onde $IR_1 \subseteq U_{IA}\, x\, U_{IB}$ e $IR_2 \subseteq U_{IB}\, x\, U_{IC}$ segundo as seguintes tabelas. Onde estarão apresentadas as composições fuzzy intervalar e como são definidas as suas funções de pertinência.

Nome da Composição	**Defnição da Relação**
Max-Min	$IR_1 \circ IR_2 = \int_{X \times Z} \bigvee_Y [\varphi_{IR_1}(X,Y) \wedge \varphi_{IR_2}(Y,Z)]/(X,Z)$
Max-Produto	$IR_1 \cdot IR_2 = \int_{X \times Z} \bigvee_Y [\varphi_{IR_1}(X,Y) \cdot \varphi_{IR_2}(Y,Z)]/(X,Z)$
Max-Average	$IR_1 \oplus IR_2 = \int_{X \times Z} \bigvee_Y [\frac{1}{2}\varphi_{IR_1}(X,Y) + \varphi_{IR_2}(Y,Z)]/(X,Z)$

Tabela 5.1: Definição das relações dos operadores de composição fuzzy intervalar

Nome da Composição	**Definição da Função de Pertinência**
Max-Min	$\varphi_{IR_1 \circ IR_2}(X,Z) = MAX\{MIN\{\varphi_{IR1}(X,Y),\, \varphi_{IR2}(Y,Z)\} \,\vert\, Y \in\, U_{IB}\}$
Max-Produto	$\varphi_{IR_1 \cdot IR_2}(X,Z) = MAX\{\varphi_{IR1}(X,Y) \cdot \varphi_{IR2}(Y,Z) \,\vert\, Y \in\, U_{IB}\}$
Max-Average	$\varphi_{IR_1 \oplus IR_2}(X,Z) = MAX\{\frac{1}{2}(\varphi_{IR1}(X,Y) + \varphi_{IR2}(Y,Z)) \,\vert\, Y \in\, U_{IB}\}$

Tabela 5.2: Definição das funções de pertinência das composições de relações fuzzy intervalar

É importante explicitar que o "·" da Max-Produto trata-se do produto intervalar assim como a operação $\frac{1}{2}$ (divisão por dois) e '+' (soma) trata-se de operações intervalares que podem ser vistos nos exemplos a seguir.

$[a,b] \cdot [c,d] = [a \cdot c,\ b \cdot d]$

$[a,b] + [c,d] = [a + c,\ b + d]$

$\frac{1}{2}([a,b] + [c,d]) = [\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}]$

É importante explicar também que o que foi provado para relações fuzzy intervalar é válido também para as composições fuzzy intervalar, ou seja, as proposições 5.5.1, 5.5.2 e 5.5.3 são válidas também para as composições fuzzy intervalar, provando então que uma composição fuzzy pode ser representada intervalarmente e que esta representação intervalar é uma CIR. A validade das poposições ocorre em função de as composições serem, na verdade, relações entre relações.

Será mostrada nas subseções seguintes que sob certas condições as representações de composições de relações fuzzy intervalar são as melhores representações intervalares de composição de relações fuzzy. Em outras palavras, demonstrar-se-á que o operador I preserva as composições (seja ela Max-Min, Max-Produto ou Max-Average).

Max-Min

A seguir será mostrado que o operador I preserva a composição Max-Min. E por isso, uma composição de relações fuzzy intervalar Max-Min é equivalente à intervalização de uma composição de relações fuzzy:

Proposição 5.5.4: Sejam R_1 e R_2 relações fuzzy sobre os universos U_A e U_B e U_C e sejam $\leq_A$, $\leq_B$ e $\leq_C$ ordens parciais sobre esses universos. Então: $I(R_1 \circ R_2) = I(R_1) \circ I(R_2)$

Prova:

$\varphi_{I(R_1 \circ R_2)}(X,Z) = [\inf\{\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) \,|\, x \in X \text{ e } z \in Z\}, \sup\{\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) \,|\, x \in X \text{ e } z \in Z\}]$

$\varphi_{I(R_1 \circ R_2)}(X,Z) = [\inf\{max\{min(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)) \,/\, x \in X \text{ e } z \in Z\} \,/\, y \in U_B\}, \sup\{max\{min(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)) \,/\, x \in X \text{ e } z \in Z\} \,/\, y \in U_B\}]$

$\varphi_{I(R_1 \circ R_2)}(X,Z) = MAX\{max\{min(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)) \,/\, x \in X \text{ e } z \in Z\} \,/\, y \in Y\} \,/\, Y \in I(U_B)\}$

$\varphi_{I(R_1 \circ R_2)}(X,Z) = MAX\{MIN\{\varphi_{I(R_1)}(X,Y), \varphi_{I(R_2)}(Y,Z) \,/\, Y \in I(U_B)\}$

$\varphi_{I(R_1 \circ R_2)}(X,Z) = \varphi_{I(R_1)} \circ \varphi_{I(R_2)}(X,Z))$

Logo,

$I(R_1 \circ R_2) = \{((X,Z), \varphi_{I(R_1 \circ R_2)}(X,Z)) \,|\, X \in I(U_A) \text{ e } Z \in I(U_C)\}$,

$I(R_1 \circ R_2) = \{((X,Z), \varphi_{I(R_1)} \circ \varphi_{I(R_2)}(X,Z)) \,|\, X \in I(U_A) \text{ e } Z \in I(U_C)\}$,

$I(R_1 \circ R_2) = I(R_1) \circ I(R_2)$

•

Max-Produto

A seguir será mostrado que o operador I preserva a composição Max-Produto.

Proposição 5.5.5: Sejam R_1 e R_2 relações fuzzy sobre os universos U_A e U_B e U_C e sejam $\leq_A$, $\leq_B$ e $\leq_C$ ordens parciais sobre esses universos. Então:

$I(R_1 \cdot R_2) = I(R_1) \cdot I(R_2)$

Prova:

Analoga à proposição 5.5.4.

$\bullet$

Max-Average

A seguir se mostrará que o operador I preserva a composição Max-Average.

Proposição 5.5.6: Sejam R_1 e R_2 relações fuzzy sobre os universos U_A e U_B e U_C e sejam $\leq_A$, $\leq_B$ e $\leq_C$ ordens parciais sobre esses universos. Então:

$I(R_1 \oplus R_2) = I(R_1) \oplus I(R_2)$

Prova:

Analoga à proposição 5.5.4.

$\bullet$

5.6 Relação de Implicação Fuzzy Intervalar

As implicações são utilizadas entre as proposições como regras fuzzy em sistemas fuzzy intervalar. E da mesma forma que ela é especificada em lógica fuzzy, ela será representada na lógica fuzzy intervalar, ou seja, a partir da regra genérica "**Se** x está em A **então** y está em B", ou $x \in A \rightarrow y \in B$. Também da mesma maneira que na lógica fuzzy, tem-se diversos tipos de operadores de implicação e em função disso, diversas formas de se calcular a função de pertinência da relação. Por isso, mesmo que a relação de implicação seja uma relação e a intervalização de relações fuzzy já tenha sido feita nesta monografia, deve-se fazer aqui como deve ser a intervalização das funções de pertinência.

Como já foi explicado a função de pertinência da relação de implicação é obtida através de uma operação com as funções de pertinência dos conjuntos relacionados, em outras palavras, a função de pertinência de uma relação de implicação na lógica fuzzy ($\mu(x, y)$) que relaciona os conjuntos A e B é dada por $\mu(x, y) = \phi[\mu_A(x), \mu_B(y)]$ onde ϕ é o operador que definirá a equação a ser usada.

Seja ς um operador de implicação intervalar. Como $\mu(x, y) = \phi[\mu_A(x), \mu_B(y)]$, então a função de pertinêcia de uma relação de implicação na lógica fuzzy intervalar ($\varphi(X, Y)$) será dada por:

$\varphi(X, Y) = \varsigma(\varphi_A(X),\ \varphi_B(Y))$, logo

$\varphi(X, Y) = \varsigma([\inf\{\mu_A(x) \mid x \in X\}, \sup\{\mu_A(x)|x \in X\}],\ [\inf\{\mu_B(y) \mid y \in Y\}, \sup\{\mu_B(y) \mid y \in Y\}])$.

(equação 43)

Tem-se então a forma generalizada de se determinar a função de pertinência fuzzy intervalar da relação de implicação. Exemplificar-se-á agora como se procede o operador fuzzy intervalar Zadeh Max-Min (ς_m) e o Mamdani min (ς_c)

Os operadores da relação de implicação podem ainda, facilmente, serem definidos a partir das funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que são relacionados, através da definição dos máximos e mínimos intervalares e da equação 43.

Nome da Implicação	**Operador de Implicação** ($\varsigma(\varphi_A(X), \varphi_B(Y)) =$)
ς_m Zadeh Max-Min	$MAX\{MIN\{\varphi_A(X), \varphi_B(Y)\}, 1 - \varphi_A(X)\}$
ς_c Mamdani min	$MIN\{\varphi_A(X), \varphi_B(Y)\}$

Tabela 5.3: Definição dos operadores de relação de implicação Zadeh Max-Min e Mamdani min

Definição 5.6.1: Uma relação fuzzy intervalar de implicação IR entre os conjuntos fuzzy intervalares IA e IB é definida sobre os universos U_{IA} e U_{IB} segundo a equação 38 (já mostrada anteriormente).

$$IR = \{((X,Y), \varphi_{IR}(X,Y))|x \in U_{IA}\, e\, y \in U_{IB}\}$$

Onde $\varphi_{IR}(X,Y) = \varsigma([\inf\{\mu_A(x) \,|\, x \in X\}, \sup\{\mu_A(x)|x \in X\}], [\inf\{\mu_B(y) \,|\, y \in Y\}, \sup\{\mu_B(y) \,|\, y \in Y\}])$.

Da mesma forma se procede para relações de implicação fuzzy intervalar definidas pela equação 39 a partir de uma implicação fuzzy, porém, com a alteração da definição da função de pertinência da mesma.

Proposição 5.6.1: É possível transformar uma Relação de implicação fuzzy R em uma relação fuzzy intervalar I(R).

Prova: Seja $\acute{}R$ uma relação de implicação fuzzy sobre os universos U_A e U_B; e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A e $\leq_B$ uma ordem parcial sobre U_B. Então

$$I(R) = \{((X,Y), \varphi_{I(R)}(X,Y)) \,|\, X \in I[U_A]\, e\, Y \in I[U_B]\}.$$

onde $\varphi(X,Y) = \varsigma([\inf\{\mu_A(x) \,|\, x \in X\}, \sup\{\mu_A(x)|x \in X\}], [\inf\{\mu_B(y) \,|\, y \in Y\}, \sup\{\mu_B(y) \,|\, y \in Y\}])$.

•

5.6.1 Operadores de Ligação

Os operadores de ligação da teoria fuzzy intervalar são os mesmos da teoria fuzzy, ou seja, são definidos pela interpretação do else. Podendo esta interpretação do else variar entre o operador AND e o OR de acordo com a implicação que foi usada (como mostrado pela tabela 2.4). No entanto é de extrema necessidade notar que os operadores AND e OR não são os mesmo descritos na teoria fuzzy e sim os que foram referenciados na subseção 5.4.3 deste capítulo.

5.7 Sistema de Inferência Fuzzy Intervalar

O sistema de inferência fuzzy intervalar foi baseado no sistema de inferência fuzzy de Zadeh ([Zadeh, 1965]) e por isso o funcionamento dos dois é bastante semelhante. A arquitetura do sistema de inferência fuzzy intervalar é quase idêntica ao sistema de inferência fuzzy, assim como o procedimento do sistema que também é bastante parecido. Pode-se dizer que há, apenas, duas mudanças: é que ao invés de ter os conjuntos de entrada e de saída fuzzy esses conjuntos serão conjuntos fuzzy intervalar além do fuzzyficador e o defuzzyficador serem fuzzyficador e defuzzyficador intervalares. E em função desta segunda mudança tem-se uma pequena diferença na obtenção do número crisp e na modelagem do conjunto de entrada e de saída, já que num sistema fuzzy intervalar vão ser usadas relações e composições fuzzy intervalar.

Para ilustrar o que foi dito no parágrafo anterior, a arquitetura de um sistema de inferência fuzzy intervalar pode ser vista na próxima figura.

5.7.1 Fuzzyficação Intervalar

Da mesma forma dos sistemas fuzzy, os sistemas fuzzy intervalar, no estágio da fuzzyficação (neste caso: fuzzyficação intervalar) serão mapeados os valores de entrada em conjuntos fuzzy intervalar relevantes ao problema, criando então uma função de pertinência $\varphi_A(X)$ que é formado pelas funções de limite superior e de limite inferior (e conseqüentemente será formada pelos graus de pertinência $\varphi_{Ai}(X)$ e $\varphi_{As}(X)$) da forma a qual foi descrita na seção 5.1.2 deste capítulo.

5.7.2 Modus Ponens Intervalar Generalizado

Como no sistema de inferencia fuzzy, a inferência fuzzy intervalar também usará a generalização da inferência Modus Ponens com uma composição intervalar:

PREMISSA 1: *x está em A'*

PREMISSA 2: *Se x está em A então y está em B*

CONSEQÜÊNCIA: *Logo y está em B'*

Portanto $B' = A' \diamond (A \rightarrow B) = A' \diamond IR(X, Y)$

Sendo $\diamond$ o operador de composição fuzzy intervalar, IR(X,Y) uma relação fuzzy intervalar e os conjuntos A, B, B' e A' conjuntos fuzzy intervalar onde B' é o conjunto solução obtido da mesma forma como foi explicada no capítulo 2. Como foi dito em tal capítulo, caso haja várias conclusões $B_i's$, então essas devem ser ligadas pela conjunção, só que em se tratando de teoria fuzzy intervalar, os operadores de ligação AND e OR (conjunção e disjunção) serão os operadores AND e OR referenciados na subseção 5.4.3.

5.7.3 Inferência Fuzzy Intervalar

Nesta subseção será explicado como a inferência fuzzy intervalar min-max é aplicada, sendo ela muito parecida com a inferência fuzzy min-max apresentada no capítulo 2. Primeiramente apresentar-se-á os conjuntos relevantes de entrada A e B através dos gráficos nas figuras 5.6 e 5.7, respectivamente – os exemplos de conjuntos A e B, assim como o conjunto A' que será mostrado posteriormente de um exemplo apresentado em [Silveira, 2002] (figura 40).

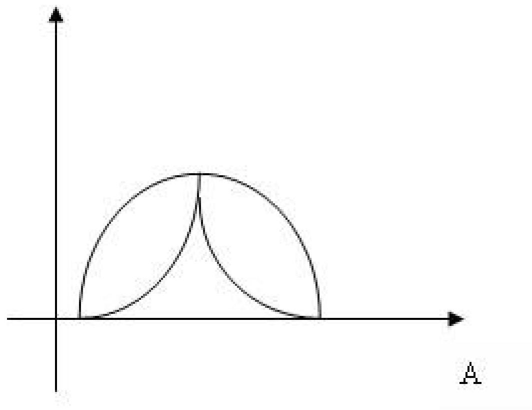

Figura 5.6: Função do conjunto fuzzy intervalar A

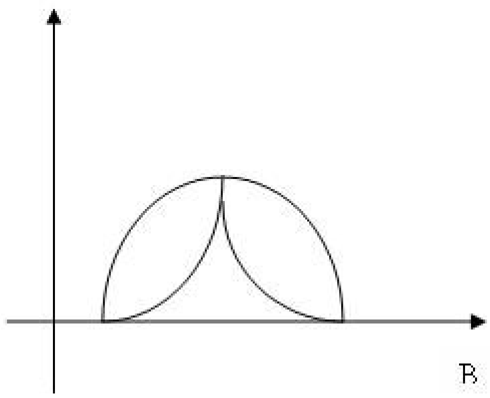

Figura 5.7: Função do conjunto fuzzy intervalar B

Para aplicar a relação de implicação intervalar IR(X,Y), calcula-se primeiramente o MIN entre os conjuntos A e B, para posteriormente calcular o MAX entre o NOT A e o MIN entre A e B. A partir de então se faz a composição fuzzy intervalar da relação com o conjunto A', sendo o conjunto A' representado nas figuras 5.8 e 5.9 – na figura 5.9 o A' é mostrado junto do conjunto A, ou seja, A e A' sob o mesmo gráfico). E o resultado final (conjunto solução B') será expresso pela região pintada na cor cinza, no gráfico da figura 5.10.

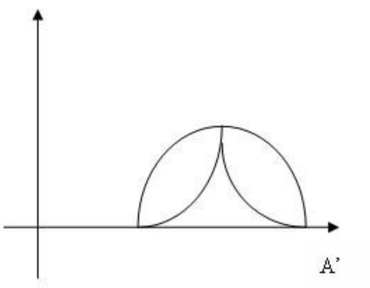

Figura 5.8: Função do conjunto fuzzy intervalar A'

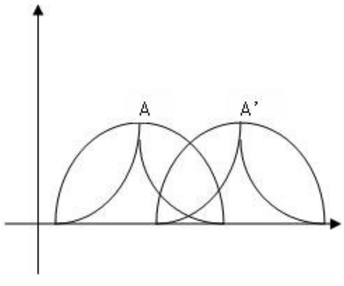

Figura 5.9: Conjuntos fuzzy intervalar A e A' sob um mesmo gráfico

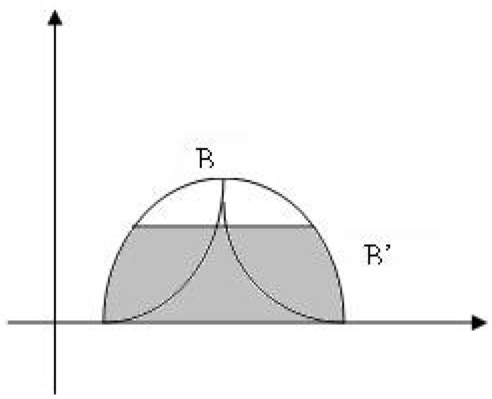

Figura 5.10: Região solução B'

5.7.4 Defuzzyficação Intervalar

O processo de defuzzyficação intervalar é semelhante ao descrito por Silveira em [Silveira, 2002]. A única diferença é devido à função de pertinência fuzzy intervalar proposta por Silveira ser originada exclusivamente das funções de limite superior e de limite inferior enquanto a função de pertinência fuzzy intervalar desenvolvida nesta monografia, as função de limite inferior e superior poderem ser geradas a partir da mesma (função de pertinência fuzzy intervalar), ou seja, aqui tem-se o processo contrário.

Em Silveira, a defuzzyficação é feita da mesma forma a qual foi descrita a fuzzyficação fuzzy, no capítulo 2; ou melhor, serão usados os mesmos métodos para calcular e obter o valor crisp x* no entanto este valor será achado na função de limite inferior (onde o número crisp é representado por d_i) e na função de limite superior (onde o número crisp é representado por d_s).Logo têm-se dois números crisp e como resultado da defuzzificação tem-se o intervalo DI, definido da mesma forma pela qual foi mostrada na equação 91 de [Silveira, 2002]:

$$DI = [min(d_i, d_s), max(d_i, d_s)]$$

(equação 44)

Porém, como já deve ter sido notado a função de pertinência da função de limite inferior tal qual a função de pertinência da função de limite superior deve ser obtida. Podendo isso ser feito através das equações 36 e 37 para posteriormente utilizar-se de algum método de defuzzificação em cada uma das funções.

Caso queira ser determinado um único valor, este valor pode ser obtido através do ponto médio do intervalo DI, isto é, apartir da média aritmética entre d_i e d_s.

$$d = \frac{(d_i + d_s)}{2}$$

(equação 45)

Capítulo 6

Conclusão

Como pôde ser visto, principalmente no capítulo introdutório, a crescente variedade de sistemas dos diversos campos científicos que precisam ser implementados, além da crescente evolução dos sistemas computacionais já existentes, proporcionam a crescente necessidade de criação de inovações teóricas afim de desenvolver um maior número de aplicações para seus devidos e variados fins.

O aumento do número de aplicações proporcionadas pela construção da teoria fuzzy, desenvolvida por Zadeh na década de 60, é indiscutível e foi várias vezes tratado no decorrer deste trabalho; assim como a necessidade de usar as análises intervalares - propostas por Moore em trabalhos publicados no final da década de 50 e durante os anos 60, além do livro [Moore, 1979], defendendo o uso da aritmética intervalar e falando de métodos e aplicações da mesma - para evitar e lidar com erros de computação numérica, tais como os de truncamento e de arredondamento. Estes problemas são ainda mais freqüentes em sistemas computacionais nos quais o uso de ponto flutuante é constante e há a necessidade do uso de valores bastante precisos. Em tais casos, o uso da teoria intervalar de Moore se torna indispensável para manter a corretude do problema em questão. Um exemplo de uma função ("função de Rump"), extraído de [Rump, 1988], mostrado no início desta monografia, ilustra muito bem a necessidade da utilização de intervalos para lidar com problemas causados pela aproximação digital. Isso mostra o quão grande pode ser a diferença de resultado, podendo ser até perigoso dependendo do sistema no qual tal cálculo poderia ser empregado.

Foi discutido também, a teoria de representação intervalar, cuja fonte principal de estudos e por meio do qual o capítulo 4 foi estruturado, foi o artigo [Santiago, 2006]. E dada a importância de tal assunto para o objetivo final desta monografia, foi reservado um capítulo exclusivamente para tratar do assunto, uma vez que a teoria de representação intervalar é um passo essencial para transformar alguma entidade (conjunto, relação, etc.) da teoria fuzzy de Zadeh (explicitada no capítulo 2) numa entidade da teoria fuzzy intervalar aqui proposta e que mistura a teoria fuzzy com a teoria intervalar (explicitada no capítulo 3) e a teoria de representação intervalar.

O título da monografia pretende refletir o objetivo prinicipal do trabalho, que é a construção de um sistema capaz de tratar problemas em que a teoria fuzzy é aplicada com sucesso e a teoria intervalar é usada para lidar com os valores precisos que o problema trabalha; tentando promover então, uma nova perspectiva para o desenvolvimento de sistemas e aumentando o número de aplicações que a inteligência artificial e a matemática intervalar são capazes de tratar. Para o estabelecimento de uma nova perspectiva de desenvolvimento de sistemas são necessárias três condições (1^{a}: necessidade da sociedade; 2^{a}: ter uma nova metodologia, novas idéias; 3^{a}: atratividade para os pesquisadores), segundo Terano em [Michio, 1992]. Estas condições foram mencionadas e discutidas nas considerações finais da tese de mestrado de Silveira ([Silveira, 2002]). Essa tese teve como resultado uma teoria fuzzy intervalar semelhante à construída neste trabalho. E Silveira justifica as condições falando em mais detalhes o que foi dito nos parágrafos anteriores. Ou seja, as condições eram justificadas pelo fato de que tal teoria foi fundamentada em duas outras teorias produzindo então, uma nova metodologia capaz de mapear problemas ambíguos e incertezas (característico da teoria fuzzy) de forma precisa e correta (característico da teoria intevalar). Essas características são necessárias para o desenvolvimento de diversas aplicações, como já foi afirmado em parágrafos anteriores. Além disso, é um campo atrativo dado que a teoria fuzzy intervalar é uma extensão dos dois campos, além de que a atratividade de um tema está diretamente relacionada à necessidade da sociedade (quanto mais necessária mais atrativa se torna a nova teoria).

É de extrema importância diferenciar a teoria fuzzy intervalar, resultado desta monografia, para aquela desenvolvida em [Silveira, 2002]. A primeira diferença é que Silveira se preocupa apenas em intervalizar a função de pertinência. E aqui, é feita a intervalização tanto das entradas quanto da função de pertinência. A intervalização das entradas é importante, pois um sistema de inferência fuzzy intervalar pode possuir valores de entrada bastante precisos. E da mesma forma com que é intervalizada a função de pertinência devido a importância que se dá a corretude do problema, as entradas também devem ser intervalizadas para manter a corretude do mesmo. Isso ocorre porque as entradas influeciam no valor que a própria função de pertinência deve retornar, já que o valor de entrada, por ser muito preciso, talvez não possa ser perfeitamente representado, implicando a geração de um intervalo que não compreende o valor correto. Pensando num sistema de inferência, a precisão das entradas, poderá afetar o conjunto de saída implicando, também, numa possível mudança do intervalo DI (resultado da defuzzyficação).

Em função da intervalização das entradas, há diferença, também, na obtenção da função de pertinência fuzzy intervalar. Em [Silveira, 2002], a função de pertinência é obtida através das funções de limite superior ($\varphi_{As}(x)$) e de limite inferior ($\varphi_{Ai}(x)$), enquanto aqui a ordem é inversa, ou melhor, a função de pertinência intervalar ($\varphi_A(X)$) é composta pelas funções de limite inferior ($\varphi_{Ai}(X)$) e de limite superior($\varphi_{As}(X)$), porém não pode ser derivada delas, na verdade são elas ($\varphi_{Ai}(X)$ e $\varphi_{As}(X)$) que são derivadas da função de pertinência fuzzy intervalar a partir dos operadores $\prod_1$ e $\prod_2$ definidos no capítulo 5. A diferença da forma com que é obtida as funções de pertinência mudam ainda a forma de obtenção e de definção dos conjuntos fuzzy intervalar assim como das relações e composições de relações fuzzy intervalar.

Outra diferença existente entre as duas teorias fuzzy intervalar tornam os trabalhos com linhas de pensamento diferentes. É que esta monografia teve como preocupação e obteve como resultado final a modelagem de um **sistema de representação fuzzy intervalar** e não apenas um sistema fuzzy intervalar (como o desenvolvido por Silveira). Em outras palavras, parte do objetivo principal deste trabalho foi elaborar um sistema de representação fuzzy intervalar baseado na construção de CIR's (representações intervalares canônicas), ou melhor, possibilitar a construção de representações intervalares canônicas de entidades fuzzy (tais como conjuntos fuzzy, relações fuzzy, composições fuzzy, etc.), tornando possível a intervalização das entidades fuzzy, transformando-as então de forma correta e ótima, em entidades fuzzy intervalar, mantendo assim as propriedades de optimalidade e corretude (propriedades de uma CIR) do sistema de representação fuzzy intervalar.

Por fim, chega-se à conclusão de que este trabalho tem uma valiosa contribuição à teoria fuzzy, à teoria intervalar e, dentro deste escopo, colabora também com os aspectos formais de corretude e optimalidade de intervalos computacionais; por conseguir desenvolver uma teoria de representação fuzzy intervalar estendendo o estudo em tais campos e principalmente pela criação de uma nova perspectiva de desenvolvimento de sistemas.

Entretanto entende-se que o trabalho propiciará o desenvolvimento de vários trabalhos futuros, tais como um estudo de caso que utilize o sistema de representação fuzzy intervalar; aplicação dos sistemas fuzzy, fuzzy intervalar (de Silveira) e de representação fuzzy intervalar a um determinado problema comum para avaliação de vantagens, desvantagens e aplicabilidade dos mesmos; um estudo sobre a aquisição de conhecimento para averiguar o grau de dificuldade de determinar intervalos ao invés de números reais; desenvolver métodos de simplificação de conjuntos fuzzy intervalar (para os conjuntos fuzzy intervalar definidos neste trabalho); e uma proposta de metodologia de desenvolvimento de sistemas de representação fuzzy intervalar.

Bibliografia

[Acióly, 1991] Acióly, B. (1991). *Uma fundamentação computacional da matemática intervalar*. PhD thesis, CPGCC-UFRGS, Porto Alegre.

[Barboza, 2004] Barboza, L. & Dimuro, G. . R. R. (2004). Power flow with load uncertainty. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 5(1):27–36.

[Bedregal, 2006a] Bedregal, B. & Takahashi, A. (2006a). Interval valued versions of t-conorms, fuzzy negations and fuzzy implications. In *Fuzz-IEEE 2006 international conference*, Vancouver. IEEE.

[Bedregal, 2006b] Bedregal, B. R. C. & Takahashi, A. (2006b). The best interval representation of t-norms and automorphisms. *Fuzzy Sets and Systems*. DOI: 10.1016/j.fss.2006.06.013 (article in press).

[Bedregal, 2006c] Bedregal, B. R. C. & Cruz, A. P. (2006c). Propositional logical as a propositional fuzzy logic. *Eletronic Notes in Theorical Computer Science*, 143:5–12. Disponível em: http://www.elsevier.com/locate/entcs.

[Callejas-Bedregal, 2001] Callejas-Bedregal, R. & Bedregal, B. R. C. (2001). Intervals as a domain constructor. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 2(1):43–52.

[Camargos, 2002] Camargos, F. L. (2002). Lógica nebulosa: uma abordagem filosófica e aplicada. Disponível em: http://www.inf.ufsc.br/˜barreto/trabaluno/IAfernandoLC.pdf.

[Cox, 1999] Cox, E. (1999). *The Fuzzy Systems Handbook*. AP Professional, Chappaqua, New York.

[Cruz, 2000] Cruz, M. M. C. (2000). Equivalência e consistência entre funções intervalares. Master's thesis, DIMAp/UFRN, Natal, Rio Grande do Norte.

[Dutra, 2000] Dutra, J. E. M. (2000). Java-xsc: Uma biblioteca java para computações intervalares. Master's thesis, DIMAp/UFRN, Natal, Rio Grande do Norte.

[Fernandes, 2002] Fernandes, M. C. & Santos, R. H. (2002). Lógica nebulosa x lógica paraconcistente. Disponível em: http://www.dc.ufscar.br/fernandes/Nebuloza_X_Paraconcistente.ppt.

[Forsythe, 1970] Forsythe, G. (1970). Pitfalls of computation, or why a math book isn't enough. *The American Mathematcical Monthly*, 77(9):931–956.

[Garczarczyk, 1994] Garczarczyk, Z. (1994). An efficient evaluation the rangeof functions and its application in the nonlinear circuit analysis. In *Abstracts Interval Conference on Interval and Computer Algebraic Methods in Science and Engeneering*, pages 89–92, St. Petersburg, Russia.

[Golubkova, 1994] Golubkova, T. D. & Voschinin, A. P. (1994). Some applications of interval regression analysis in biometrics. In *Abstracts Interval Conference on Interval and Computer Algebraic Methods in Science and Engeneering*, pages 96–98, St. Petersburg, Russia.

[Hickey, 2001] Hickey, T.; Ju, Q. . V. E. M. H. (2001). Interval arithmetic: From principles to implementation. *Journal of the ACM*, 48(5):1038–1068.

[Hájek, 1998a] Hájek, P. (1998a). Basic fuzzy logic and bl-algebras. *Soft Computing*, 2:124–128.

[Hájek, 1998b] Hájek, P. (1998b). *Metamathematics of fuzzy logic*. Kluwer.

[Jaulin, 2001] Jaulin, L. & Kieffer, M. . D. O. . W. E. (2001). *Applied Interval Analysis*. Springer, London.

[Kasabov, 1996] Kasabov, N. K. (1996). *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems and Knowledges Engennering*. The MIT Press, Massachussetts Institute of Technology.

[Korlyukov, 1992] Korlyukov, A. V. (1992). A new application of interval mathematics. *Interval Computations (atualmente Reliable Computing)*, 3(5):116–121.

[Kreinovich, 1999] Kreinovich, V. & Mukaidono, M. (1999). From fuzzy values to intuitionistic fuzzy intervals,etc.: Can we get an arbitrary ordering? 5(3):11–18.

[Loh, 2002] Loh, E. & Walster, G. W. (2002). Rump's example revised. *Realiable Computing*, 8(3):245–248.

[Lyra, 2004] Lyra, A. & Callejas-Bedregal, R. . D.-N. A. . B. B. (2004). The interval digital images processing. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 3(2):229–233.

[Michio, 1992] Michio, T. . T. . A. . K. . S. . (1992). *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. Prentice Hall.

[Moore, 1962] Moore, R. (1962). *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*. PhD thesis, Stanford University.

[Moore, 1979] Moore, R. (1979). *Methods and Applications of Interval Arithmetic*. Studies in Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia.

[Moore, 1959] Moore, R. E. (1959). Automatic error analysis in digital computation. Technical report, Lockheed Missiles and Space Co.

[Mysovskikh, 1994] Mysovskikh, V. I. & Kovshov, A. M. (1994). On symbolic computation in groups which arising from the analysis of eletronic circuits. In *Abstracts Interval Conference on Interval and Computer Algebraic Methods in Science and Engeneering*, pages 181–192, St. Petersburg, Russia.

[Nguyen, 1999] Nguyen, H. T. & Walker, E. A. (1999). *A First Course in Fuzzy Logic*. A Chapman and Hall.

[Oliveira, 1997] Oliveira, M. A. a. a. (1997). *Fundamentos da Matemática Intervalar*. Instituto de Informática da UFRGS:SAGRA-Luzzato.

[Orlov, 1992] Orlov, A. I. (1992). Interval statistics. *Interval Computations (Atualmente Reliable Computing)*, 1(3):44–52.

[Patiño-Escarcina, 2004] Patiño-Escarcina, R.E.; Bedregal, B. . L. A. (2004). Interval computing in neural networks: One layer interval neural networks. *LNCS*, 3356:68–77.

[Rocha, 1996] Rocha, L. M. & Kreinovich, V. (1996). Compunting uncertainty in interval based sets. In Press, K. A., editor, *Applications of Interval Computer*, pages 337–380.

[Rump, 1988] Rump, S. M. (1988). *Reliability in Computing: The Role of Interval Methods in Scientific Computing*, chapter Algorithms for verified inclusions: Theory and practice, pages 109–126. Academic Press Professional.

[Santiago, 2006] Santiago, R. H. N. & Bedregal, B. R. C. . A. B. M. (2006). Formal aspects of correctness and optmality of interval computations. *Formal Aspects of Computing*, 18(2):231–243.

[Schnepper, 1993] Schnepper, C. A. & Stadtherr, M. A. (1993). Applications of a parallel interval newton/generalized bisection algorithm to equations-based chemical process flowsheeting. *Interval Computations address (atualmente Reliable Computing)*, (4):40–64.

[Silveira, 2001] Silveira, M. M. T. & Bedregal, B. R. C. (2001). Um método de silplificação de conjuntos fuzzy usando intervalos. *LAPTEC'2001- Second Congress of Logic Applied to Technology:Logic, Artificial Intelligence and Robotic*, 2:247–254.

[Silveira, 2002] Silveira, M. M. M. T. (2002). Teoria fuzzy intervalar: Uma proposta de integração da matemática intervalar á teoria fuzzy. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

[Tsoukalas, 1997] Tsoukalas, L. H. & Uhring, R. E. (1997). *Fuzzy and Neural Approaches*. John Wiley & Suns Inc.

[Turksen, 1986] Turksen, I. (1986). Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:191–210.

[Vakhidov, 1994] Vakhidov, A. A. . V. N. N. (1994). Accuracy check of analytical theory of artificial satelite motion. In *Abstracts Interval Conference on*

Interval and Computer Algebraic Methods in Science and Engeneering, pages 241–242, St. Petersburg, Russia.

[Yam, 1999] Yam, Y; Mukaidono, M. . K. V. (1999). Beyond [0,1] to interval amd futher: Do we need all new fuzzy values? In *Proceeding of the Eighth International Fuzzy Systems Associations World Congress*, pages 143–146, Taipe, Taiwan.

[Zadeh, 1965] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8.