• *Parte II* •

A LÓGICA DE CONTAR MENTIRAS E VERDADES

In Raymond Smullyan, "Eternamente Indeciso",
trad. João Marcos. (não publicado no Brasil)

• 3 •
O Recenseador

BOA PARTE da ação deste livro terá lugar na Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos, onde, como vimos, cavaleiros sempre fazem afirmações verdadeiras, cavilosos sempre fazem afirmações falsas, e todo nativo é ou um cavaleiro ou um caviloso.

Um fato fundamental sobre esta ilha é que é impossível para qualquer nativo declarar-se um caviloso, pois um cavaleiro jamais mentiria, afirmando ser um caviloso, e um caviloso nunca admitiria verdadeiramente ser um caviloso.

Os quatro problemas seguintes introduzirão os conetivos lógicos *e*, *ou*, *se-então,* e *se-e-somente-se,* dos quais trataremos mais formalmente no Capítulo 6.

A VISITA DE GREGÓRIO

Seu Gregório, o recenseador, certa vez fez um trabalho de campo na Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos. Nesta ilha, também as mulheres são classificadas como cavaleiras e cavilosas. Gregório decidiu nesta visita entrevistar apenas pessoas casadas.

1 • (E)

Gregório bateu em uma porta; o marido abriu-a parcialmente e perguntou a Gregório o que ele queria. “Sou um recenseador,” respondeu Gregório, “e preciso de informação acerca do senhor e de sua esposa. Qual de vocês é cavaleiro, se é que há algum entre vocês, e qual, se há algum, é caviloso?”

“Somos ambos cavilosos!”, disse o marido com raiva, batendo a porta.

De que tipo é o marido e de que tipo é a esposa? (A solução segue o Problema 2.)

2 • (Ou)

Na casa seguinte, Gregório perguntou ao marido: "Vocês são ambos cavilosos?" O marido respondeu: "Pelo menos um de nós dois o é."

De que tipo é cada um?

Solução ao Problema 1. Se o marido fosse um cavaleiro, ele nunca teria afirmado que ele e sua esposa eram ambos cavilosos. Assim, ele tem que ser um caviloso. Já que ele é um caviloso, sua afirmação é falsa; logo eles não são ambos cavilosos. Por isso sua esposa tem que ser uma cavaleira. Desta forma, ele é um caviloso e ela uma cavaleira.

Solução ao Problema 2. Se o marido fosse um caviloso, então seria verdade que pelo menos um dos dois é caviloso, portanto um caviloso teria feito uma afirmação verdadeira, o que não pode ocorrer. Portanto, o marido tem que ser um cavaleiro. Como consequência, sua afirmação terá sido verdadeira, e por conseguinte ele ou sua esposa são cavilosos. Já que ele não é um caviloso, então sua esposa é que é. E portanto a resposta é oposta à resposta do Problema 1—ele é um cavaleiro e ela uma cavilosa.

O próximo problema é mais perturbador do que os dois anteriores (pelo menos para aqueles que ainda não o viram antes). Ele introduz um tema que será explorado em alguns dos problemas avançados que surgirão em capítulos posteriores.

3 • (Se-Então)

A próxima visita realizada por Gregório mostrou-se mais intrincada. A porta foi aberta timidamente por um homem bastante acanhado. Após Gregório lhe perguntar algo sobre ele e sua esposa, tudo que o marido disse foi: "Se eu for um cavaleiro, então a minha esposa também o será."

Gregório afastou-se contrariado. "Como posso afirmar o que quer que seja sobre algum deles a partir de uma resposta tão descomprometida?", pensou ele. Ele estava quase escrevendo "Ambos marido e esposa de tipo desconhecido," quando subitamente se lembrou de uma antiga lição de lógica dos seus dias de graduação na Unicamp. "É claro," ele percebeu, "já sei dizer *ambos* os tipos!"

De que tipo é o marido e de que tipo a esposa?

Solução. Suponha que o marido seja um cavaleiro. Então é verdade o que ele afirmou—ou seja, que se ele for um cavaleiro, então a sua esposa também o será—e portanto sua esposa também tem que ser uma cavaleira. Isto demonstra que *se* o marido for um cavaleiro, então a sua esposa também o será. Bem, isto foi exatamente o que o marido afirmou; ele disse que *se* ele for um cavaleiro, então sua esposa também o será. Consequentemente ele fez uma afirmação verdadeira e portanto ele tem que ser um cavaleiro. Sabemos agora que ele é um cavaleiro, e nós já demonstramos que se ele for um cavaleiro, então a sua esposa também o será. Portanto, tanto o marido quanto sua esposa são cavaleiros.

A idéia por trás do último problema pode ter ramificações mais profundas do que o leitor imagina. Consideremos a seguinte variação do problema. Suponha que você visite a ilha prospectando ouro. Antes de começar a cavar, você quer descobrir se há realmente algum ouro na ilha. Deve-se assumir que cada nativo sabe se há ouro ou não na ilha. Suponha que um nativo diga a você: "Se eu for um cavaleiro, então há ouro na ilha." Você estará então justificado ao concluir que o nativo tem que ser um cavaleiro e que tem que existir ouro na ilha. O raciocínio é o mesmo que na solução do Problema 3. Suponha que o nativo seja um cavaleiro, então é realmente verdade que há ouro na ilha. Isto demonstra que se ele for um cavaleiro, então há ouro na ilha. Já que ele afirmou exatamente isto, ele é um cavaleiro. Portanto, há ouro na ilha.

A solução ao Problema 3 e sua variante são casos especiais do seguinte fato, que é suficientemente importante para que o assinalemos como Teorema I.

Teorema I. Dada uma proposição p qualquer, suponha que um nativo da Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos diga: "Se eu for um cavaleiro, então p." Então o nativo tem que ser um cavaleiro e p há de ser verdadeira.

A solução ao Problema 3 é um caso especial do Teorema I, tomando p como a proposição de que a esposa do nativo é uma cavaleira. A variante do Problema 3 (o problema sobre o ouro) também é um caso especial do Teorema I, tomando p como a proposição de que haveria ouro na ilha.

ETERNAMENTE INDECISO

Também é consequência do Teorema I que nenhum nativo da Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos possa afirmar: "Se eu for um cavaleiro, então Papai Noel existe" (a menos, é claro, que Papai Noel realmente exista).

4 • (Se-e-Somente-Se)

Quando o recenseador entrevistou o quarto casal, o marido disse: "Minha esposa e eu somos do mesmo tipo; somos ambos cavaleiros ou ambos cavilosos."

(O marido poderia alternativamente ter dito: "Eu sou um cavaleiro se e somente se minha esposa for uma cavaleira." Dá no mesmo.)

O que pode ser deduzido sobre o marido e o que pode ser deduzido sobre a esposa?

Solução. Não se pode determinar se o marido seria um cavaleiro ou um caviloso, mas o tipo da esposa pode ser determinado assim: se a esposa fosse uma cavilosa, o marido nunca poderia afirmar que ele é do mesmo tipo que sua esposa, porque isso seria o mesmo que afirmar que ele é um caviloso, o que ele não pode fazer.

Uma maneira alternativa de ver o problema é a seguinte. O marido é ou um cavaleiro ou um caviloso. Se ele for um cavaleiro, sua afirmação é verdadeira, portanto ele e sua esposa são do mesmo tipo, donde decorre que sua esposa também é uma cavaleira. Por outro lado, se ele for um caviloso, então sua afirmação é falsa, portanto ele e sua esposa são de tipos diferentes, donde decorre que sua esposa, diferentemente do marido, é uma cavaleira. E portanto, não importando se o marido é um cavaleiro ou um caviloso, a esposa tem que ser uma cavaleira. (O tipo do marido aqui é "indeterminado"; ele poderia ser um cavaleiro que afirmou verdadeiramente ser tal qual sua esposa, ou ele poderia ser um caviloso que afirmou falsamente ser tal qual sua esposa.)

Esse problema é um caso especial do seguinte. Dada uma proposição p, suponha que um nativo da ilha diga: "Eu sou um cavaleiro se e somente se p for verdadeira." O que se pode deduzir daí?

Duas proposições são ditas *equivalentes* se elas forem ambas verdadeiras ou ambas falsas—em outras palavras, se toda vez que qualquer uma das duas for verdadeira, então a outra também o será. Duas proposições são ditas *inequivalentes* se elas não forem equivalentes—em outras palavras, se uma delas for verdadeira e a outra falsa. Ora, o nativo disse: "Eu sou um cavaleiro se e somente se p for verdadeira." Se denominarmos d a afirmação do nativo de que ele é um cavaleiro, então o nativo está afirmando que d é equivalente a p. Se ele for um cavaleiro, então sua afirmação é verdadeira, logo d realmente é equivalente a p; e já que d é verdadeira (ele é um cavaleiro), então p também é verdadeira. Por outro lado, se ele for um caviloso, então sua afirmação é falsa; assim, d é inequivalente a p, mas já que d é falsa (ele não é um cavaleiro), então novamente p tem que ser verdadeira (porque qualquer proposição inequivalente a uma falsa proposição é obviamente verdadeira). Vemos assim que p tem que ser verdadeira, mas d é indeterminada. Vamos assinalar este fato como Teorema II.

Teorema II. Dada uma proposição p qualquer, suponha que um nativo da ilha diga: "Eu sou um cavaleiro se e somente se p." Então p há de ser verdadeira, não importando se o nativo é um cavaleiro ou um caviloso.

Retornemos ao problema da existência ou não de ouro na ilha. Suponha que um nativo diga: "Eu sou um cavaleiro se e somente se houver ouro na ilha." Então de acordo com o Teorema II (tomando p como a proposição de que haveria ouro na ilha), concluímos que há de existir ouro na ilha, embora não sejamos capazes de determinar se o nativo é um cavaleiro ou um caviloso.

Vemos, consequentemente, que se um nativo disser: "Se eu for um cavaleiro, então há ouro na ilha," de acordo com o Teorema I, nós podemos inferir *tanto* que ele é um cavaleiro *quanto* que há ouro na ilha. Mas se ele disser, em vez disso: "Eu sou um cavaleiro se e somente se houver ouro na ilha," então, de acordo com o Teorema II, tudo que podemos inferir é que há ouro; não podemos determinar se o falante é um cavaleiro ou um caviloso.

O Teorema II é a base de um famoso problema inventado pelo filósofo Nelson Goodman. O problema pode ser colocado nos seguintes termos: suponha que você vá à Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos e queira descobrir se há ou não ouro na ilha. Você encontra um nativo e é consentido que você faça a ele uma única pergunta, a qual deve poder ser respondida por sim ou não. Que pergunta você faria?

ETERNAMENTE INDECISO

Uma pergunta que funciona é: "É verdade que você é um cavaleiro se e somente se houver ouro na ilha?" Se ele responder que sim, então de acordo com o Teorema II há ouro na ilha. Se ele responder que não, então não há ouro na ilha (porque ele está negando que o fato de ele ser um cavaleiro seja equivalente à existência de ouro na ilha), o que dá no mesmo que afirmar que o fato de ele ser um cavaleiro é equivalente a *não* existir ouro na ilha, portanto, novamente de acordo com o Teorema II, não há ouro na ilha.

ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS

5

Que afirmação poderia ser feita por um nativo a partir da qual você deduziria que se ele for um cavaleiro, então há ouro na ilha, mas, se ele for um caviloso, então pode haver ouro na ilha ou não?

6

Que afirmação poderia ser feita por um nativo de modo que você deduzisse que, se houver ouro na ilha, então ele teria que ser um cavaleiro, mas, se não houver ouro na ilha, então ele poderia ser um cavaleiro ou um caviloso?

7

Eu certa vez visitei esta ilha e perguntei a um nativo: "Há ouro nesta ilha?" Tudo que ele me disse em resposta foi: "Eu nunca afirmei que houvesse ouro nesta ilha." Mais tarde, eu descobri que *de fato* há ouro na ilha. Afinal, o nativo era um cavaleiro ou um caviloso?

SOLUÇÕES

5 • Há muitas afirmações que funcionariam. Uma tal afirmação é: "Eu sou um cavaleiro e há ouro na ilha." Outra é: "Há ouro na ilha e há prata na ilha." (Se o nativo for um cavaleiro, então é claro que há ouro—bem como prata—mas se houver ouro, o nativo não precisa ser um cavaleiro, pois bem poderia ser que lá não houvesse prata alguma.)

O RECENSEADOR

6 • Uma afirmação que funciona é: "Eu sou um cavaleiro ou há ouro na ilha." A frase "… ou …" significa *pelo menos um—e possivelmente ambos.* E portanto, se houver ouro na ilha, então é certamente verdadeiro que o nativo é um cavaleiro *ou* há ouro na ilha. Consequentemente, se houver ouro na ilha, então a afirmação do nativo foi verdadeira, o que por sua vez implica que o nativo tem que ser um cavaleiro. Isto demonstra que se há ouro na ilha, então o nativo é um cavaleiro.

Por outro lado, o nativo poderia ser um cavaleiro sem que houvesse ouro na ilha, porque se ele for um cavaleiro então é verdade que ele é um cavaleiro *ou* há ouro na ilha.

Outra afirmação que funciona é: "Há ouro na ilha ou há prata na ilha."

7 • Suponha que o nativo seja um caviloso. Então sua afirmação é falsa, o que quer dizer que ele alguma vez *terá afirmado* que há ouro na ilha. Sua afirmação certamente foi falsa (já que ele é um caviloso), donde decorre que não há ouro na ilha. Mas eu disse a você que *há* ouro na ilha. Portanto ele não pode ser um caviloso; ele tem que ser um cavaleiro.

• 4 •
Em Busca de Una

HÁ TODO um arquipélago de ilhas de cavaleiros e cavilosos no Pacífico Sul nas quais alguns dos nativos são metade humanos e metade pássaros. Esta gente-pássaro voa assim como os pássaros e fala tão fluentemente quanto os humanos.

Esta é a estória de um filósofo—de fato, um lógico—que visitou este arquipélago e se apaixonou por uma garota-pássaro chamada Una. Eles se casaram. Seu casamento foi feliz, mas a sua esposa era muito avoada! Por exemplo, ele vinha para casa à noite para jantar, mas se aquela fosse uma noite particularmente agradável, Una teria voado para outra ilha. Ele tinha então que remar com sua canoa de ilha em ilha até encontrar Una e trazê-la de volta para casa. Toda vez que Una pousava numa ilha, todos os nativos a viam no ar e sabiam que ela estava pousando. Uma vez que ela já estivesse no solo, contudo, era difícil encontrá-la, então a primeira coisa que o marido fazia quando ele chegava a uma ilha era tentar descobrir dos nativos se Una tinha ali pousado. O que dificultava as coisas, é claro, é que alguns dos nativos eram cavilosos e não diriam a verdade. Aqui estão alguns dos incidentes que se abateram sobre ele.

1

Certa ocasião, o marido chegou a uma ilha em busca de Una e encontrou dois nativos, A e B. Ele perguntou aos nativos se Una havia pousado na ilha. Ele recebeu as seguintes respostas:

A: Se B e eu formos ambos cavaleiros, então Una está nesta ilha.
B: Se A e eu formos ambos cavaleiros, então Una está nesta ilha.

Será que Una está nesta ilha?

2

Em outra ocasião, dois nativos A e B fizeram as seguintes afirmações:

A: Se algum de nós for um cavaleiro, então Una está nesta ilha.
B: Isto é verdade.

Estará Una nesta ilha?

3

Eu não me lembro dos detalhes do próximo incidente muito claramente. Eu sei que o lógico encontrou dois nativos A e B, e que A disse: "B é um cavaleiro, e Una está nesta ilha." Mas eu não me lembro exatamente do que B disse. Ele teria dito: "A é um caviloso, e Una não está nesta ilha." Ou então: "A é um caviloso, e Una *está* nesta ilha." Como eu gostaria de lembrar do que ele disse! De qualquer forma, eu me lembro que o lógico conseguiu determinar se Una estava ou não na ilha. E estava?

4

No próximo incidente, o lógico chegou a uma ilha muito pequena com apenas seis nativos. Ele perguntou a cada um deles, e curiosamente todos disseram o mesmo: "Pelo menos um caviloso nesta ilha viu Una pousar aqui esta noite."

Teria algum nativo dessa ilha visto Una pousar lá naquela noite?

5

Em outro incidente curioso, quando o marido chegou a uma ilha em busca de Una, ele encontrou cinco nativos A, B, C, D e E, os quais adivinharam o seu propósito e escarneceram dele ao encontrá-lo. Eles fizeram as seguintes afirmações:

A: Una está nesta ilha.
B: Una *não* está nesta ilha!
C: Una esteve aqui ontem.
D: Una não está aqui hoje, e ela não esteve aqui ontem.
E: D é um caviloso ou C é um cavaleiro.

ETERNAMENTE INDECISO

O lógico pensou sobre isso um pouco, mas não chegou a parte alguma.

"Será que algum de vocês poderia por favor fazer pelo menos mais uma afirmação?", rogou o lógico. Neste ponto A disse: "E é um caviloso ou C é um cavaleiro."

Será que Una está nesta ilha?

SOLUÇÕES

1 • Vou me contentar aqui com soluções mais breves do que as que dei antes.

Suponha que A e B sejam ambos cavaleiros. Então a afirmação comum que eles fizeram é verdadeira, a partir do que por sua vez se conclui que Una está na ilha. Assim, se ambos são cavaleiros, então Una está na ilha. Isto é o que eles afirmaram, logo eles são ambos cavaleiros. Portanto Una está na ilha.

2 • Se algum deles for um cavaleiro, então a afirmação que ele fez é verdadeira, a partir do que se conclui que Una está na ilha. Portanto, se algum deles for um cavaleiro, Una está na ilha. Desse modo, a afirmação que ambos fizeram é verdadeira, portanto ambos são cavaleiros, donde é claro que pelo menos um deles é cavaleiro. Disto, e da verdade da afirmação que eles fizeram, conclui-se que Una está na ilha.

3 • Este é um exemplo daquilo que eu denomino *meta-enigma*. Você não é informado do que B disse, mas você *é* informado que a partir do que A e B disseram, o lógico foi capaz de determinar se Una estava na ilha. (Se eu não lhe tivesse dito isto, então você não conseguiria resolver o problema!)

Vou primeiro mostrar que se B tivesse dito: "A é um caviloso, e Una não está nesta ilha," então o lógico não teria conseguido resolver o problema. Suponha assim que B tenha dito isso. Ora, A não poderia ser um cavaleiro, pois se ele o fosse então B seria um cavaleiro (como afirmou A), o que faria de A um caviloso (como afirmou B). Portanto, A é definitivamente um caviloso. Mas agora tanto poderia ser que B fosse um cavaleiro e Una não estivesse na ilha, quanto poderia ser que B fosse um caviloso e Una de fato estivesse na ilha, e não há como resolver este dilema. Logo, se B tivesse dito aquela frase, o lógico não teria sabido se Una estava na ilha.

Mas nós fomos informados de que o lógico soube, portanto B *não* disse aquilo. Ele certamente terá dito, então: "A é um caviloso e Una *está* nesta ilha." Vejamos agora o que acontece.

O nativo A tem que ser um caviloso pela mesma razão que antes. Se Una está na ilha, chegamos à seguinte contradição: é verdade então que A é um caviloso e Una está na ilha, portanto B fez uma afirmação verdadeira, o que faz de B um cavaleiro. Mas então A fez uma afirmação verdadeira ao afirmar que B é um cavaleiro e Una está na ilha, o que contraria o fato de que A seja um caviloso! A única saída para esta contradição é que Una *não* esteja na ilha. Logo, Una não está na ilha (e, é claro, A e B são ambos cavilosos).

4 • Já que todos os seis nativos disseram o mesmo, então eles devem ser todos cavaleiros ou todos cavilosos (todos cavaleiros, se o que afirmaram é verdadeiro, e todos cavilosos em caso contrário). Suponha que eles sejam todos cavaleiros. Então seria verdade que pelo menos um caviloso na ilha vira Una pousar, o que é impossível, pois supusemos que nenhum deles é caviloso. Consequentemente, eles hão de ser todos cavilosos. Portanto o que eles afirmaram é falso, donde se conclui que nenhum caviloso na ilha viu Una pousar ali naquela noite. Mas já que todos os nativos são cavilosos, então nenhum nativo viu Una pousar ali naquela noite.

5 • Mostraremos que se A for um caviloso chegamos a uma contradição. Suponha que A seja um caviloso. Então sua segunda afirmação foi falsa, portanto E tem que ser um cavaleiro e C tem que ser um caviloso. Se E for realmente um cavaleiro, sua afirmação foi verdadeira, portanto D é um caviloso ou C é um cavaleiro. Mas C não é um cavaleiro, logo D tem que ser um caviloso. Portanto, a afirmação de D foi falsa, logo Una está aqui hoje ou ela esteve aqui ontem. Mas Una não esteve aqui ontem (porque C afirmou que ela esteve e C é um caviloso), logo ela está aqui hoje. Mas isto faz com que a primeira afirmação de A tenha sido verdadeira, contrariamente à hipótese de que A seria um caviloso! Portanto, A não pode ser um caviloso; ele tem que ser um cavaleiro. Consequentemente, a primeira afirmação de A foi verdadeira, e Una está nesta ilha.

• 5 •
Um Emaranhado Interplanetário

EM GANIMEDES—um satélite de Júpiter—há um clube conhecido como Clube Marciático-Venusiano. Todos os seus sócios são de Marte ou de Vênus, embora se permitam vez por outra visitantes. Um terráqueo é incapaz de distinguir marcianos de venusianos pela aparência. Além disso, os terráqueos não são capazes de distinguir entre damas e cavalheiros marcianos ou venusianos, já que eles se vestem da mesma maneira. Os lógicos, contudo, têm uma vantagem, já que as damas venusianas sempre dizem a verdade e os cavalheiros venusianos sempre mentem. Os marcianos são o oposto; os cavalheiros marcianos dizem a verdade e as damas sempre mentem.

Um dia, Una e seu marido-lógico visitaram Ganimedes e ficaram sabendo deste clube. "Eu aposto com você que *eu* sou capaz de distinguir os cavalheiros das damas e os marcianos dos venusianos," afirmou com orgulho o marido à sua esposa.

"Como?", perguntou Una.

"Vamos visitar o clube esta noite, que é a noite de visitas, e eu lhe mostrarei!", disse o marido (cujo nome, aliás, era Juca).

1

Eles visitaram o clube naquela noite. "Vejamos agora do que você é capaz," disse Una, duvidando um pouquinho. "Aquele sócio lá. Você saberia dizer se ele ou ela é um cavalheiro ou uma dama?" Juca se aproximou então do sócio e lhe perguntou uma única questão respondível por sim ou não. O sócio respondeu, e Juca então determinou se ele era um cavalheiro ou uma dama, embora não soubesse dizer se o sócio era de Marte ou de Vênus.

Que pergunta poderia ter sido essa?

2

"Muito espertinho!", disse Una, após Juca ter-lhe explicado a solução. "Suponha agora que em vez de querer descobrir se o sócio é um cavalheiro ou uma dama, você quisesse descobrir se ele ou ela é de Marte ou de Vênus. Você conseguiria descobrir isso fazendo apenas uma pergunta de sim ou não?"

"É claro!", disse Juca. "Você não vê como?"

Una pensou sobre isso um pouquinho e de repente viu como. Como?

3

"Se você é *realmente* esperto," disse Una, "você tem que ser capaz de descobrir com apenas uma pergunta se um dado sócio é um cavalheiro ou uma dama *e* de onde é o sócio. Vejamos se você consegue descobrir ambas as coisas de uma só vez fazendo apenas uma pergunta de sim ou não!"

"Ninguém é *tão* esperto assim!", replicou Juca. Por que Juca disse isso?

4

Foi então que um sócio passou e fez uma afirmação a partir da qual Juca e Una (que já estava pegando o jeito da coisa) conseguiram decidir que este sócio certamente seria uma dama marciana. Que afirmação poderia ter sido essa?

5

O próximo sócio que passou fez uma afirmação a partir da qual Juca e Una conseguiram deduzir que este sócio certamente seria uma dama venusiana. Que afirmação poderia ter sido essa?

6

Que afirmação poderia ser feita tanto por um cavalheiro marciano, quanto por uma dama marciana, ou por um cavalheiro venusiano, ou por uma dama venusiana?

ETERNAMENTE INDECISO

A notícia da sagacidade de Juca e Una, que aplicavam a lógica para determinar o sexo e/ou a raça de vários sócios, se espalhou rapidamente pelo clube. O dono do clube, um empreendedor brasileiro de nome Correia, chegou-se à mesa de Juca e Una para parabenizá-los. "Eu gostaria de testá-los em alguns outros sócios," disse Correia, "e ver o que vocês são capazes de fazer."

7

Foi então que dois sócios passaram. "Venham se juntar a nós," chamou Correia, que os apresentou como Ork e Bog. Juca perguntou-lhes algo sobre si, ao que eles responderam:

ORK: Bog é de Vênus.
BOG: Ork é de Marte.
ORK: Bog é um cavalheiro.
BOG: Ork é uma dama.

A partir destas informações, Juca e Una conseguiram sucessivamente identificar ambos o sexo e a raça de cada um deles. O que é Ork, e o que é Bog?

8

"Notem vocês," disse Correia, após Ork e Bog terem saído, "que marcianos e venusianos frequentemente casam entre si, e nós temos muitos casais mistos neste clube. Aí está um casal se aproximando da gente agora. Vejamos se vocês são capazes de dizer se esse é um casal misto ou não."

Eu não me lembro dos primeiros nomes do casal, então vou denominá-los simplesmente A e B.

"De onde vocês são?", Una perguntou a A.

"De Marte," foi a resposta.

"Isso não é verdade!", disse B.

Esse é um casal misto ou não?

9

"Aí vem outro casal," disse Correia. "Novamente não vou lhes contar se esse é um casal misto ou não. Vamos ver se vocês conseguem descobrir qual deles é o marido."

UM EMARANHADO INTERPLANETÁRIO

Denominemos os cônjuges A e B. Juca perguntou: “Vocês são ambos do mesmo planeta?” Estas foram suas respostas:

A: Somos ambos de Vênus.
B: Isso não é verdade!

Qual deles é o marido?

10

“Lá está outro casal,” disse Correia. “Mais uma vez, não direi a vocês se esse é um casal misto ou não. Vejamos o que acontece!”

Desta vez eu consigo lembrar-lhes os primeiros nomes—eram eles Jal e Tork.

“De onde são cada um de vocês?”, perguntou Juca.

“Minha esposa é de Marte,” redarguiu Tork.

“Somos ambos de Marte,” disse Jal.

Isto possibilitou a Juca e Una classificá-los completamente. Qual deles é o marido e qual a esposa, e de qual planeta é cada um deles?

SOLUÇÕES

1 • A questão mais simples que funciona aqui é: “Você é marciano?” Suponha que você receba a resposta afirmativa. O falante ou está dizendo a verdade ou está mentindo. No primeiro caso, o falante é realmente marciano, e sendo um marciano que diz a verdade ele há de ser um cavalheiro. Se o falante está mentindo, então ele é realmente venusiano, portanto um venusiano mentiroso, portanto mais uma vez ele é um cavalheiro. Então, em ambos os casos, uma resposta afirmativa indica que o falante seria um cavalheiro. Uma análise similar (que deixo para o leitor) mostra que uma resposta negativa indica que o falante seria uma dama.

É claro que a questão “Você é venusiano?” também funciona; uma resposta afirmativa então indica que o falante seria uma dama, e uma resposta negativa indica que ele seria um cavalheiro.

2 • A questão “Você é um cavalheiro?” funciona. (Deixo a verificação para o leitor.) Alternativamente, a questão “Você é uma dama?” também funciona.

ETERNAMENTE INDECISO

3 • A razão pela qual é impossível bolarmos uma pergunta de sim ou não que determine definitivamente se um dado sócio é um cavalheiro ou uma dama ***e*** se este sócio é marciano ou venusiano é que há quatro possibilidades para o sócio—um cavalheiro marciano, uma dama marciana, um cavalheiro venusiano, uma dama venusiana—mas há apenas duas respostas possíveis para a questão: sim ou não. E então, com apenas duas respostas possíveis, não se pode determinar qual das quatro possibilidades de fato ocorre.

4 • Uma afirmação simples que funcionaria é: "Eu sou um cavalheiro venusiano." Obviamente a afirmação não pode ser verdadeira, ou teríamos a contradição de um cavalheiro venusiano fazendo uma afirmação verdadeira. Portanto a afirmação é falsa, donde decorre que o falante ***não*** é um cavalheiro venusiano. Já que a afirmação é falsa, o falante há de ser então uma dama marciana.

5 • Esta é um pouco ardilosa. Uma afirmação que funciona é: "Sou uma dama ou sou venusiano." (Note: lembre-se que a frase "… ou …" significa *pelo menos um e possivelmente ambos;* ela não significa *exatamente um.*)

Se a afirmação for falsa, então o falante nem é uma dama nem é venusiano, e há de se tratar portanto de um cavalheiro marciano. Porém, um cavalheiro marciano não faz falsas afirmações, e temos então uma contradição. Isto demonstra que a afirmação é verdadeira, portanto o falante tem que ser uma dama ou um venusiano, e possivelmente ambas as coisas. Contudo, se se trata de uma dama, ela há de ser também venusiana, e se venusiana também há de ser uma dama, já que damas que dizem a verdade são venusianas e venusianos que dizem a verdade são damas. Consequentemente, o falante há de ser não apenas venusiano mas também uma dama.

Por outro lado, se o falante tivesse feito a afirmação mais forte: "Eu sou uma dama e sou venusiano," teria sido impossível determinar quer seu sexo, quer sua raça (tudo que se poderia inferir é que o falante não é um um cavalheiro marciano).

6 • Uma tal afirmação é: "Eu sou um cavalheiro marciano ou uma dama venusiana"—ou, o que seria ainda mais simples: "Eu sempre digo a verdade." Qualquer contador de verdade ou mentira poderia dizer isso.

7 • Suponha que Ork tenha dito a verdade. Então Bog seria não só um cavalheiro mas também venusiano, portanto Bog deve ter mentido. Suponha, por outro lado, que Ork tenha mentido. Então Bog não é nem cavalheiro nem venusiano, donde Bog há de ser uma dama marciana, logo mais uma vez Bog deve ter mentido. Isto demonstra que, não importando que Ork tenha dito a verdade ou não, Bog definitivamente mentiu.

Já que Bog mentiu, então Ork nem é de Marte nem é uma dama, portanto Ork há de ser um cavalheiro venusiano. Consequentemente, Ork também mentiu, donde Bog há de ser uma dama marciana. E então a solução é que Ork é um cavalheiro venusiano e Bog uma dama marciana (e todas as quatro afirmações foram falsas).

8 • Já que A afirmou ser de Marte, então A tem que ser um cavalheiro (como vimos na solução do Problema 1), e portanto B será uma dama. Se A diz a verdade, então A de fato é de Marte, B mentiu, e sendo uma dama mentirosa também é de Marte. Se A mentiu, A na verdade é de Vênus, B disse a verdade, e sendo uma dama que diz a verdade também é de Vênus. Consequentemente, este não é um casal misto; eles são ambos do mesmo planeta.

9 • Se a afirmação de A for verdadeira, então ambos são de Vênus, portanto A é de Vênus e A será decerto uma dama. Suponha que a afirmação de A seja falsa. Então pelo menos um deles é de Marte. Se A for de Marte, A há de ser uma dama (já que a afirmação de A é falsa). Se B for de Marte, B há de ser um cavalheiro (já que a afirmação de B é verdadeira), portanto mais uma vez A será uma dama. Logo, A é a esposa e B o marido.

10 • Suponha que Jal tenha dito a verdade. Então os dois realmente são ambos de Marte, donde Tork é de Marte e a afirmação de Tork de que Jal seria de Marte terá sido verdadeira. Nós temos então a impossibilidade de um casal do mesmo planeta com *ambos* dizendo a verdade. Isto não pode ocorrer, portanto Jal deve ter mentido. Então, pelo menos um deles é de Vênus.

Se Jal é de Marte, então Tork será aquele que é de Vênus. Mas, dessa forma, Tork teria dito a verdade ao afirmar que Jal é de Marte e então Tork tem que ser uma dama, portanto Jal será um cavalheiro, e temos a impossibilidade de um cavalheiro marciano fazendo uma falsa afirmação.

Portanto, Jal não pode ser de Marte; Jal há de ser de Vênus. Uma vez que Jal mentiu e é de Vênus, Jal tem que ser um cavalheiro. Além disso, já que Jal não é de Marte, Tork mentiu. Portanto Tork é uma dama mentirosa, e é portanto de Marte.

Em resumo, Jal é um cavalheiro venusiano e Tork uma dama marciana.

• *Parte III* •

CAVALEIROS, CAVILOSOS, E LÓGICA PROPOSICIONAL

• 6 •

Um Pouquinho de Lógica Proposicional

OS ENIGMAS dos contadores de verdade e de mentira dos três capítulos anteriores ganham um significado adicional quando vistos em termos da disciplina conhecida como *lógica proposicional* (como veremos no próximo capítulo). Neste capítulo exporemos um pouco do básico—os conetivos lógicos, as tabelas de verdade, e as tautologias. Os leitores já familiarizados com estes conceitos podem passar direto para o próximo capítulo (ou talvez dar apenas uma passada de olhos por este aqui para refrescar a memória).

OS CONETIVOS LÓGICOS

A lógica proposicional, como a álgebra, tem o seu próprio simbolismo, o qual é relativamente fácil de aprender. Na álgebra, as letras x, y, z denotam números não especificados; na lógica proposicional, usamos as letras p, q, r, s (às vezes com subíndices) para denotar proposições não especificadas.

As proposições podem ser combinadas pelo uso dos chamados *conetivos lógicos*. Os principais conetivos são:

(1) $\sim$ (não)
(2) & (e)
(3) $\vee$ (ou)
(4) $\supset$ (se-então)
(5) $\equiv$ (se-e-somente-se)

Acompanhe a seguir uma explicação destes conetivos.

(1) Negação. Dada uma proposição p qualquer, por ~p queremos dizer o *oposto* ou o *contrário* de p. Lemos ~p como "não é o caso que p," ou, mais brevemente, "não p." A proposição ~p é dita a negação de p; ela é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira. Podemos resumir estes dois fatos na tabela seguinte, que é chamada a *tabela de verdade* para a negação. Nesta tabela (bem como em todas as tabelas que seguem), usaremos a letra "V" para denotar *verdade* e "F" para denotar *falsidade*.

p	~p
V	F
F	V

A primeira linha da tabela de verdade diz que se p tem o valor V (isto é, se p for verdadeira), então ~p tem o valor F. A segunda linha diz que se p tem o valor F, então ~p tem o valor V. Poderíamos também escrever isto como:

$$\sim V = F$$
$$\sim F = V$$

(2) Conjunção. Dadas duas proposições p e q quaisquer, a proposição de que p ***e*** q são ambas verdadeiras se escreve "p&q" (ou, às vezes, "p∧q"). Denominamos p&q a *conjunção* de p e q. A conjunção é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras, mas falsa se qualquer uma delas é falsa. Temos portanto as seguintes quatro leis para a conjunção:

$$V \,\&\, V = V$$
$$V \,\&\, F = F$$
$$F \,\&\, V = F$$
$$F \,\&\, F = F$$

Segue daí a tabela de verdade para a conjunção:

p	q	p&q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(3) Disjunção. Dadas duas proposições p e q quaisquer, denotamos por p∨q a proposição de que pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira. Lemos p∨q como “p ou q—e possivelmente ambas.” (Há um outro sentido para “ou,” qual seja, *exatamente uma,* mas este não é o sentido no qual usaremos a palavra “ou.” Se p e q forem ambas verdadeiras, a proposição p∨q será tomada como verdadeira.) A proposição p∨q é denominada a *disjunção* de p e q. A disjunção tem a seguinte tabela de verdade:

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Vemos que p∨q é falsa somente no quarto caso—quando p e q são ambas falsas.

(4) Se-Então. Dadas duas proposições p e q quaisquer, escrevemos p⊃q para denotar o fato de que p é falsa ou p e q são ambas verdadeiras—em outras palavras, se p é verdadeira, também q o é. Algumas vezes lemos p⊃q como “se p, então q,” ou “p implica q,” ou “não é o caso que p seja verdadeira e q falsa.” Denominamos p⊃q o condicional de p e q. Para o condicional temos a seguinte tabela de verdade:

p	q	p⊃q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Notamos que p⊃q é falsa somente na segunda linha—o caso em que p é verdadeira e q é falsa. Isto talvez requeira alguma explicação adicional: p⊃q é a proposição de que *não* é o caso que p seja verdadeira e q falsa. A única maneira pela qual ela pode ser falsa, portanto, é se *for* o caso que p seja verdadeira e q falsa.

(5) Se-e-Somente-Se. Por fim, denotamos por p≡q a proposição de que p e q são ambas verdadeiras ou são ambas falsas, ou, o que dá no mesmo, que se qualquer uma delas for verdadeira, a outra também o será. Lemos p≡q como "p é verdadeira se e somente se q for verdadeira," ou "p e q são equivalentes." (Lembramos que duas proposições são ditas *equivalentes* se elas forem ambas verdadeiras ou ambas falsas.) A proposição p≡q é algumas vezes denominada a *bicondicional* de p e q. Aqui está a sua tabela de verdade:

p	q	p≡q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Parênteses. Precisamos usar parênteses para evitar ambiguidades. Por exemplo, suponha que eu escreva p&q∨r. O leitor não terá como saber se eu estou querendo dizer que p é verdadeiro e q ou r é verdadeiro, ou se eu estou querendo dizer que p e q são ambos verdadeiros ou r é verdadeiro. No primeiro caso, eu deveria escrever p&(q∨r), e no segundo (p&q)∨r.

Tabelas de Verdade Compostas. De um modo geral, anotamos o *valor de verdade* de uma proposição como sendo V, se a proposição for verdadeira, e como F, se ela for falsa. Daí, as proposições "2+2=4" e "Lisboa é a capital de Portugal," embora sejam proposições diferentes, têm o mesmo valor de verdade—qual seja, V.

Considere agora duas proposições p e q. Se sabemos o valor de verdade de p e o valor de verdade de q, então podemos determinar os valores de verdade de p&q, p∨q, p⊃q, e p≡q—e também o valor de verdade de ~p (bem como o valor de verdade de ~q). Segue daí portanto que, dada uma combinação qualquer de p e q (isto é, qualquer proposição expressável em termos de p e q, usando os conetivos lógicos), podemos determinar o valor de verdade desta combinação se conhecermos os valores de verdade de p e de q. Por exemplo, suponha que A seja a proposição (p≡(q&p))⊃(~p⊃q). Dados os valores de verdade de p e de q, podemos sucessivamente encontrar os valores de q&p, p≡(q&p), ~p, (~p⊃q), e finalmente (p≡(q&p))⊃(~p⊃q). Há quatro distribuições possíveis de valores de verdade para p e q, e em cada um dos quatro casos podemos determinar o valor de verdade de A. Podemos fazer isto sistematicamente construindo a seguinte tabela:

p	q	q&p	p≡(q&p)	~p	~p⊃q	(p≡(q&p))⊃(~p⊃q)
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Vemos que A é verdadeira nos primeiros três casos e falsa no quarto.

Consideremos um outro exemplo: seja B = (p⊃q)⊃(~q⊃~p), e construamos uma tabela de verdade para B.

p	q	~p	~q	p⊃q	~q⊃~p	(p⊃q)⊃(~q⊃~p)
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Vemos que B é verdadeira em todos os quatro casos, donde esta proposição constitui um exemplo do que mais adiante se denominará *tautologia.*

Podemos também construir uma tabela de verdade para uma combinação de três incógnitas proposicionais—p, q e r—mas agora há oito casos a considerar (porque há quatro distribuições de V's e F's para p e q, e com cada uma destas quatro distribuições há duas possibilidades para r). Por exemplo, suponha que C seja a expressão (p&(q⊃r))&(r&~p). Ela teria a seguinte tabela de verdade:

p	q	r	q⊃r	p&(q⊃r)	~p	r&~p	(p&(q⊃r))&(r&~p)
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	F	V	F	F

Vemos que C é falsa em todos os oito casos; ela é exatamente o oposto de uma tautologia e constitui um exemplo do que se denominará *contradição. Não* existem quaisquer proposições p, q e r tais que $(p\&(q\supset r))\&(r\&{\sim}p)$ seja verdadeira. (Poderíamos ter visto isto sem o auxílio de uma tabela de verdade, usando um pouco de senso comum. Suponha que $p\&(q\supset r)$ seja verdadeira. Então como poderia $(r\&{\sim}p)$ ser verdadeira, já que ${\sim}p$ é falsa?)

Se fizermos uma tabela da verdade para uma expressão com quatro incógnitas—digamos p, q, r, e s—haverá dezesseis casos a considerar, e consequentemente a tabela de verdade terá dezesseis linhas. Em geral, para qualquer número positivo n, uma tabela de verdade para uma expressão com n incógnitas terá 2^n linhas (cada vez que acrescentamos uma incógnita, o número de linhas dobra).

TAUTOLOGIA

Uma proposição é dita uma *tautologia* se a verdade do que ela afirma puder ser estabelecida puramente com base nas regras da tabela de verdade para os conetivos lógicos. Por exemplo, suponha que uma pessoa diga que vai chover amanhã e uma segunda pessoa diga que não vai. Não deveríamos esperar descobrir qual delas está certa usando uma tabela de verdade. Temos que aguardar até amanhã e então *observar* o tempo. Mas suponha que uma terceira pessoa diga hoje: "Vai chover amanhã ou não vai." Ora, isto é o que eu chamo uma previsão *segura!* Sem aguardar até amanhã, e sem fazer qualquer observação, sabemos *pela pura razão* que ele deve estar certo. Sua asserção é da forma $p\vee{\sim}p$ (onde p é a proposição de que choverá amanhã), e para *toda* proposição p a proposição $p\vee{\sim}p$ tem que ser verdadeira (como uma tabela de verdade facilmente mostrará).

A definição mais usual de tautologia envolve a noção de *fórmula.* Por uma fórmula queremos dizer uma expressão construída a partir dos símbolos $\sim$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ e as variáveis proposicionais p, q, r, …, corretamente parentetizadas. Aqui estão as regras precisas para a construção de fórmulas:

(1) Qualquer variável proposicional isolada é uma fórmula.

(2) Dadas quaisquer fórmulas X e Y já construídas, as expressões (X&Y), (X∨Y), (X⊃Y), ou (X≡Y) também são fórmulas, e também é fórmula a expressão ~X.

Entenda-se aqui que nenhuma expressão em geral será dita fórmula, a não ser que seja construída de acordo com as regras (1) e (2) acima.

Ao escrevermos uma fórmula isolada, podemos eliminar os parênteses mais externos sem incorrer em qualquer ambiguidade—por exemplo, ao enunciarmos "a fórmula p⊃q," queremos dizer "a fórmula (p⊃q)."

Uma fórmula em si mesma não é verdadeira nem falsa, mas apenas se torna verdadeira ou falsa quando *interpretamos* as variáveis proposicionais como tomando o lugar de proposições definidas. Por exemplo, se eu perguntasse: "A fórmula (p&q) é verdadeira?", você certamente (e corretamente) redarguiria: "Depende de quais proposições as letras 'p' e 'q' representam." E então uma fórmula tal como "p&q" é algumas vezes verdadeira e algumas vezes falsa. Por outro lado, uma fórmula tal como "p∨~p" é *sempre* verdadeira (é verdadeira não importando qual proposição seja representada pela letra "p") e é então chamada uma fórmula *tautológica*. Assim, uma fórmula tautológica é por definição uma fórmula que é *sempre* verdadeira—ou, o que dá no mesmo, uma fórmula cuja tabela de verdade contenha apenas V's na sua última coluna. Podemos então definir uma proposição como sendo uma tautologia se ela for expressável por alguma fórmula tautológica sob alguma interpretação das variáveis proposicionais. (Por exemplo, a proposição de que está chovendo ou não está chovendo é expressável por meio da fórmula p∨~p, se interpretamos "p" como a proposição de que está chovendo.)

Implicação Lógica e Equivalência. Dadas duas proposições X e Y quaisquer, diremos que X implica *logicamente* Y, ou que Y é *consequência lógica* de X se X⊃Y for uma tautologia. Diremos que X é *logicamente equivalente* a Y se X≡Y for uma tautologia; ou, o que dá no mesmo, se X implica logicamente Y e Y implica logicamente X.

ALGUMAS TAUTOLOGIAS

A tabela de verdade é um método sistemático para a verificação de tautologias, mas muitas tautologias podem ser reconhecidas mais rapidamente se usarmos um pouquinho de senso comum. Aqui estão alguns exemplos:

(1) $((p \supset q) \& (q \supset r)) \supset (p \supset r)$.

Esta proposição afirma que se p implica q, e se q implica r, então p implica r. Isto certamente é auto-evidente (mas pode, é claro, ser verificado por uma tabela de verdade). Esta tautologia tem um nome—ela é dita *silogismo hipotético.*

(2) $(p \& (p \supset q)) \supset q$.

Isto afirma que se p é verdadeira, e se p implica q, então q é verdadeira, o que é por vezes parafraseado por: “Qualquer coisa implicada por uma proposição verdadeira é verdadeira.”

(3) $((p \supset q) \& {\sim}q) \supset {\sim}p$.

Isto afirma que se p implica uma proposição *falsa*, então p há de ser falsa.

(4) $((p \supset q) \& (p \supset {\sim}q)) \supset {\sim}p$.

Isto afirma que se p implica q e também p implica não q, então p há de ser falsa.

(5) $(({\sim}p \supset q) \& ({\sim}p \supset {\sim}q)) \supset p$.

Este princípio é conhecido como *redução ao absurdo.* Para mostrar que p é verdadeira, basta mostrar que ~p implica alguma proposição q, e também sua negação ~q.

(6) $((p \vee q) \& {\sim}p) \supset q$.

Este é um princípio familiar de lógica, dito *silogismo disjuntivo:* se pelo menos uma das proposições p ou q for verdadeira, e se p for falsa, então certamente será q a proposição verdadeira.

(7) $((p \vee q) \& ((p \supset r) \& (q \supset r))) \supset r$.

Este é outro princípio familiar conhecido como *demonstração por casos*. Suponha que $p \vee q$ seja verdadeira. Suponha também que p implica r e que q implica r. Então r há de ser verdadeira (não importando se é p ou q a verdadeira—ou se ambas o são).

O leitor com pouca experiência em lógica proposicional tirará proveito do seguinte exercício.

Exercício 1. Diga quais das seguintes fórmulas são tautologias.

(a) $(p \supset q) \supset (q \supset p)$
(b) $(p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q)$
(c) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
(d) $(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$
(e) $\sim(p \supset \sim p)$
(f) $\sim(p \equiv \sim p)$
(g) $\sim(p \& q) \supset (\sim p \& \sim q)$
(h) $\sim(p \vee q) \supset (\sim p \vee \sim q)$
(i) $(\sim p \vee \sim q) \supset \sim(p \vee q)$
(j) $\sim(p \& q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
(l) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \& \sim q)$
(m) $(q \equiv r) \supset ((p \supset q) \equiv (p \supset r))$
(n) $(p \equiv (p \& q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Discussão. O que há de significativo nas tautologias é que elas não apenas são verdadeiras, mas são *logicamente certas*. Não são necessários experimentos científicos para estabelecer sua veracidade—tais proposições podem ser verificadas com base na *pura razão.*

Pode-se caracterizar alternativamente as tautologias sem apelo à noção de fórmulas. Definamos um *estado de coisas* como uma classificação qualquer de todas as proposições em duas categorias—proposições *verdadeiras* e proposições *falsas*—sujeita à restrição de que a classificação deverá obedecer à tabela de verdade para os conetivos lógicos (por exemplo, não podemos classificar $p \vee q$ como verdadeira se p e q forem ambas classificadas como falsas). Uma tautologia, então, é uma proposição que é verdadeira em *todo possível estado de coisas.*

Isto tem a ver com o conceito leibniziano de mundos possíveis. Leibniz afirmava que, de todos os mundos possíveis, este era o melhor. Francamente, não faço idéia se ele estava correto ou equivocado com relação a isso, mas o que nos interessa notar é que ele levava em consideração outros mundos possíveis. A partir daí, um ramo inteiro da lógica filosófica conhecido como semântica de mundos possíveis foi desenvolvida em anos recentes—notadamente pelo filósofo Saul Kripke—desenvolvimento este que será discutido em um capítulo posterior. Dado um mundo possível qualquer, o conjunto de todas as proposições que são verdadeiras naquele mundo, juntamente com o conjunto de todas as proposições que são falsas naquele mundo, constitui o estado de coisas *naquele* mundo. Uma tautologia, então, é verdadeira não apenas neste mundo, mas em *todos* os mundos possíveis. As ciências físicas estão interessadas no estado de coisas do mundo *real*, enquanto a matemática pura e a lógica estudam *todos* os possíveis estados de coisas.

• 7 •

Cavaleiros, Cavilosos e Lógica Proposicional

NOVA VISITA AOS CAVALEIROS E CAVILOSOS

Introduziremos agora um mecanismo de tradução simples porém básico através do qual se pode reduzir uma porção de problemas sobre contadores de verdade e de mentira a problemas de lógica proposicional. Este mecanismo se revelará crucial em vários dos capítulos subsequentes.

Retornemos à Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos. Dado um nativo N, seja d mais uma vez a afirmação de que N é um cavaleiro. Ora, suponha que N afirme a proposição X. Em geral não sabemos se N é um cavaleiro ou um caviloso, nem se X é verdadeira ou falsa. Mas há algo que sabemos: se N for um cavaleiro, então X é verdadeira, e reciprocamente, se X for verdadeira, então N é um cavaleiro (pois cavilosos jamais fazem afirmações verdadeiras). E portanto sabemos que N é um cavaleiro se e somente se X for verdadeira; em outras palavras, sabemos que a proposição $d \equiv X$ é uma proposição verdadeira. Traduziremos assim "N afirma X" como "$d \equiv X$."

Em certas ocasiões há dois ou mais nativos envolvidos—por exemplo, suponha que tenhamos dois nativos N_1 e N_2. Denominaremos d_1 a proposição de que N_1 é um cavaleiro; denominaremos d_2 a proposição de que N_2 é um cavaleiro. Se houver um terceiro nativo N_3 envolvido, denominaremos d_3 a proposição de que N_3 é um cavaleiro, e assim por diante, para todos os nativos envolvidos. Traduziremos então "N_1 afirma X" como "$d_1 \equiv X$"; traduziremos "N_2 afirma X" como "$d_2 \equiv X$"; e assim por diante.

Vejamos agora o primeiro problema do Capítulo 3 (página 13). Há dois nativos N_1 e N_2 (o marido e a esposa) envolvidos. Somos informados de que N_1 afirma que N_1 e N_2 são ambos cavilosos; temos que determinar quais são os verdadeiros tipos de N_1 e N_2. Ora, d_1 é a proposição de que N_1 é um cavaleiro, portanto $\sim d_1$ é equivalente à proposição de que N_1 é um caviloso (já que cada nativo é ou um cavaleiro ou um caviloso, mas não ambas as coisas). De modo similar, $\sim d_2$ é a proposição de que N_2 é um caviloso. Portanto, a proposição de que N_1 e N_2 são ambos cavilosos é $\sim d_1 \& \sim d_2$. Daí, N_1 afirma a proposição $\sim d_1 \& \sim d_2$, donde, usando nosso mecanismo de tradução, concluímos que a ***realidade*** da situação é que $d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)$ é verdadeira. Assim o problema pode ser recolocado nos seguintes termos puramente proposicionais: dadas duas proposições d_1 e d_2 tais que $d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)$ seja verdadeira, quais são os valores de verdade de d_1 e de d_2? Se fizermos uma tabela de verdade, veremos que o único caso em que $d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)$ é verdadeira ocorre exatamente quando d_1 é falsa e d_2 é verdadeira. (Também vimos isso pelo raciocínio por senso comum ao resolvermos o problema no Capítulo 3.) Como resultado, temos que as proposições $(d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)) \supset \sim d_1$ e $(d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)) \supset d_2$ são ambas tautológicas.

Todo o conteúdo matemático deste problema se resume assim ao fato de que, dadas proposições d_1 e d_2 quaisquer, a seguinte proposição é uma tautologia: $(d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)) \supset (\sim d_1 \& d_2)$.

O leitor notará ainda que a proposição recíproca $(\sim d_1 \& d_2) \supset (d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2))$ também é uma tautologia, donde a proposição $d_1 \equiv (\sim d_1 \& \sim d_2)$ é logicamente ***equivalente*** à proposição $\sim d_1 \& d_2$.

Analisemos agora o segundo problema do Capítulo 3 (página 14). Ali N_1 afirma que N_1 ou N_2 são cavilosos. Concluímos que N_1 é um cavaleiro e N_2 uma cavilosa. O conteúdo matemático deste fato se resume ao fato de que a proposição $(d_1 \equiv (\sim d_1 \vee \sim d_2)) \supset (d_1 \& \sim d_2)$ é uma tautologia.

O leitor notará eventualmente que a recíproca também é verdadeira, e portanto que a proposição $(d_1 \equiv (\sim d_1 \vee \sim d_2)) \equiv (d_1 \& \sim d_2)$ é uma tautologia.

A tradução do Problema 3 tem um significado teórico especial; de fato, consideremo-la na forma mais geral do Teorema I, Capítulo 3 (página 15). Temos um nativo N sustentando acerca de uma certa proposição q que se N for um cavaleiro, então q é verdadeira (q poderia ser a proposição de que a esposa de N é uma cavaleira, ou de que há ouro na ilha, ou qualquer outra proposição). Denominemos d a afirmação de que N é um cavaleiro. Daí, N está afirmando a proposição $d \supset q$, e então a realidade da situação é que $d\equiv(d\supset q)$ é verdadeira. Devemos determinar a partir daí o valor de verdade de d e q. Como vimos, d e q tem que ser ambas verdadeiras. Logo, o conteúdo matemático do Teorema I, Capítulo 3, se resume ao fato de que $(d\equiv(d\supset q))\supset(d\&q)$ é uma tautologia. Evidentemente este fato não depende realmente da natureza específica da proposição d; dadas *quaisquer* proposições p e q, a proposição $(p\equiv(p\supset q))\supset (p\&q)$ é uma tautologia. A proposição recíproca, $(p\&q)\supset(p\equiv(p\supset q))$, também é uma tautologia, pois se $p\&q$ for verdadeira, temos que p e q são ambas verdadeiras, donde se conclui que $p\supset q$ há de ser verdadeira, logo $p\equiv(p\supset q)$ há de ser verdadeira. Por conseguinte, a fórmula seguinte é uma tautologia: $(p\equiv(p\supset q))\equiv(p\&q)$.

Vejamos agora o Problema 4, ou melhor, o Teorema II, no Capítulo 3 (página 17). Aqui temos N afirmando que N é um cavaleiro *se e somente se* q. Denominemos mais uma vez como d a proposição de que N é um cavaleiro. N afirma, portanto, a proposição $d\equiv q$. Sabemos, consequentemente, que $d\equiv(d\equiv q)$ é verdadeira. Podemos determinar daí que q tem que ser verdadeira, e então o conteúdo matemático essencial do Teorema II reside no fato de que a seguinte fórmula é uma tautologia: $(d\equiv(d\equiv q))\supset q$.

Esta tautologia é o que eu denominaria a tautologia de Goodman, já que ela surge do problema de Nelson Goodman, que foi discutido no Capítulo 3.

Exercício 1. Consideremos três nativos N_1, N_2 e N_3 da Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos. Suponha que N_1 e N_2 fazem as seguintes afirmações:

N_1: N_2 e N_3 são ambos cavaleiros.

N_2: N_1 é um caviloso e N_3 é um cavaleiro.

De que tipos são N_1, N_2 e N_3?

Exercício 2. (a) A fórmula seguinte é uma tautologia?

$$((d_1\equiv(d_2\&d_3))\&(d_2\equiv(\sim d_1\&d_3)))\supset((\sim d_1\&\sim d_2)\&\sim d_3)$$

(b) Qual a relação desta fórmula com o Exercício 1?

Exercício 3. Mostre que a proposição p_3 é consequência lógica das duas proposições seguintes:

(1) $p_1 \equiv \sim p_2$
(2) $p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3)$

Exercício 4. Suponha que N_1, N_2, e N_3 sejam três nativos da Ilha dos Cavaleiros e Cavilosos, e que N_1 e N_2 façam as seguintes afirmações:

N_1: N_2 é um caviloso.
N_2: N_1 e N_3 são de tipos diferentes.

(a) N_3 é um cavaleiro ou um caviloso?
(b) Qual a relação deste evento com o Exercício 3?

OS PROBLEMAS DE UNA

Vários dos problemas de Una do Capítulo 4 podem também ser resolvidos por tabelas de verdade. Veja, por exemplo, o primeiro deles (página 20): temos dois nativos N_1 e N_2; N_1 afirma que se N_1 e N_2 forem ambos cavaleiros, então Una está na ilha. N_2 afirma o mesmo. Denominemos O a proposição de que Una está na ilha. Usando nosso mecanismo de tradução, sabemos que as duas proposições seguintes são verdadeiras.

(1) $d_1 \equiv ((d_1 \& d_2) \supset O)$.
(2) $d_2 \equiv ((d_1 \& d_2) \supset O)$.

Devemos determinar se O é verdadeira ou falsa. Ora, se você fizer uma tabela de verdade para a conjunção de (1) e (2)—isto é, para $(d_1 \equiv ((d_1 \& d_2) \supset O)) \& (d_2 \equiv ((d_1 \& d_2) \supset O))$, verá que a última coluna contém V's naquelas linhas, e somente naquelas linhas, nas quais a coluna de O contém o valor V. Consequentemente, O tem que ser verdadeira.

Exercício 5. Suponha que Juca continue procurando por Una e encontre dois nativos A e B em uma ilha e eles lhe façam as seguintes afirmações:

A: Se B for um cavaleiro, então Una não está nesta ilha.
B: Se A for um caviloso, então Una não está nesta ilha.

Será que Una está nesta ilha?

Exercício 6. Em uma outra ilha, dois nativos A e B fazem as seguintes afirmações:

A: Se algum de nós dois for um cavaleiro, então Una está nesta ilha.
B: Se algum de nós dois for um caviloso, então Una está nesta ilha.

Estará Una nesta ilha?

Exercício 7. Em ainda outra ilha, dois nativos A e B fazem as seguintes afirmações:

A: Se eu for um cavaleiro e B um caviloso, então Una está nesta ilha.
B: Isso não é verdade!

Estará Una nesta ilha?

NOVA VISITA AOS MARCIANOS E VENUSIANOS

Muitos dos enigmas Marte-Vênus-Dama-Cavalheiro do Capítulo 5 também podem ser resolvidos por tabelas de verdade, embora o mecanismo de tradução necessário seja um pouco mais complexo, e problemas deste tipo não serão considerados mais adiante neste livro.

Enumeremos os sócios em alguma ordem N_1, N_2, N_3, etc., e para cada número i seja M_i a proposição de que N_i é um marciano, e seja C_i a proposição de que N_i é um cavalheiro. Então N_i é *venusiano* pode ser escrito como $\sim M_i$, e N_i é *uma dama* pode ser escrito como $\sim C_i$. Ora, N_i diz a verdade se e somente se N_i é um cavalheiro marciano ou uma dama venusiana, o que pode ser simbolizado por $(C_i \& M_i) \vee (\sim C_i \& \sim M_i)$, ou mais simplesmente, $C_i \equiv M_i$. E agora então, se N_i afirma uma proposição X, a realidade da situação está expressa na proposição seguinte: $(C_i \equiv M_i) \equiv X$.

É este portanto o nosso mecanismo de tradução. Sempre que N_i afirmar X escreveremos: $(C_i \equiv M_i) \equiv X$.

Observe, por exemplo, o Problema 7 do Capítulo 5 (página 26)—o caso de Ork e Bog. Chamemos Ork de N_1 e Bog de N_2. Somos ali informados das quatro proposições seguintes (após aplicarmos o mecanismo de tradução acima):

(1) $(C_1 \equiv M_1) \equiv \sim M_2$
(2) $(C_2 \equiv M_2) \equiv M_1$
(3) $(C_1 \equiv M_1) \equiv C_2$
(4) $(C_2 \equiv M_2) \equiv \sim C_1$

Os valores de verdade de M_1, C_1, M_2, e C_2 podem então ser encontrados a partir de uma tabela de verdade. (Há quatro incógnitas M_1, C_1, M_2, e C_2 envolvidas, e há portanto dezesseis casos a considerar!)

Nota: Nem todos os problemas de contadores de verdade e mentira podem ser resolvidos pelos mecanismos de tradução deste capítulo. Estes mecanismos funcionam bem para problemas nos quais somos informados sobre o que os falantes dizem e devemos deduzir daí certos fatos acerca deles. Mas para o tipo mais difícil de enigmas nos quais temos que bolar uma questão ou afirmação para cumprir um certo papel, é necessário mais reflexão. Há outros mecanismos sistemáticos de tradução que ajudam em diversos casos, mas este é um tópico que vai além da linha principal de reflexão deste livro.