	Universidade Federal do Rio Grande do Norte **Centro de Ciências Exatas e da Terra** **Departamento de Informática e Matemática Aplicada** **Curso de Ciências da Computação**	

PROPOSTA DE RELATÓRIO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO DA BI-IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Versão 1.05

ALLAN ROCHA MENDES

NATAL/RN – JUNHO DE 2007

ALLAN ROCHA MENDES

ESTUDO DA BI-IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Ciências da Computação do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências da Computação.

Prof. Dr. Benjamín René. Callejas Bedregal - Orientador

Dedico este trabalho ao meu Deus que mesmo sem eu merecer tem me sustentado.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão para Victor e Francislí pela ajuda na tradução, a Benjamín pelas suas idéias de pesquisa e orientação nesse trabalho e aos professores que contribuíram de alguma forma para a minha bagagem teórica em lógica: Daniel Durante, João Marcos e Regivan.

E, finalmente, a minha mãe e mantenedora pela sua paciência e ajuda nesses anos de graduação.

RESUMO

As regras dos conectivos proposicionais clássicos são baseadas na álgebra booleana e muitos estudos são feitos sobre as características apresentadas por eles. Alguns conectivos são mais estudados que outros relegando a um segundo plano outros conectivos que também representam conceitos relevantes. Encontra-se nesta situação o conectivo da bi-implicação que tem associado a si a idéia de igualdade. De fato, a maioria das lógicas não clássicas, por exemplo a Lógica Nebulosa, têm ignorado este conectivo. Assim, estender a bi-implicação para a lógica nebulosa abre espaço para representar matematicamente a noção de similaridade, uma vez que a lógica nebulosa descreve noções imprecisas presentes na linguagem natural. Regras matemáticas baseadas em funções já existentes foram usadas para descrever formas canônicas para a bi-implicação nebulosa. Também foi analisado um escopo de conhecimento algébrico das operações binárias. Propriedades foram propostas para as funções bi-implicações nebulosas e estudadas para quais formas canônicas elas estão presentes.

Palavras chave: Bi-implicação, Lógica nebulosa, Formas canônicas.

ABSTRACT

The rules of the classical propositional connectives are based in the *Booleana Algebra* and many researches are done about the characteristics presented by them. Some connectives are more studied than others, relegating to a second plane other connectives that also represent relevant concepts. In this situation is the connective of bi-implication which has associated in it the idea of equality. In fact the most of non-classical logics, for example the Fuzzy Logic, has ignored this connective. Thus, extend such connective to the fuzzy logic provide a mathematical representation for the notion of similarity, once that fuzzy logic describes imprecise notions existent within natural language. Mathematical rules based on existing functions have already been used to describe canonical forms to fuzzy bi-implication. It was also taken to analysis a scopus of algebraic knowledge of binary operations. Properties were purposed for the fuzzy bi-implication functions and studied to which canonical forms they are present.

Keywords: Bi-implication, fuzzy logic, canonical forms.

LISTA DE TABELAS

Sumário

1. INTRODUÇÃO

A palavra "lógica" vem do grego e significa *razão,* A Lógica é a ciência das leis ideais do pensamento, e a arte de aplicá-las corretamente para procurar e demonstrar a verdade. Os primeiros estudos nesse ramo do conhecimento datam da Grécia, Índia e China. Mas, o sistema de raciocínio, desenvolvido na Grécia, foi o modelo que deu origem ao sistema moderno de lógica, a lógica de predicados. Desses estudos surgiu a lógica clássica que admitia apenas falso ou verdadeiro como valorações de uma proposição. A lógica moderna começou com o livro *Lógica*, ou a arte do pensamento ou Port-Roval Logic de Antoine Arnauld e Pierre Nicole em 1662, pois esse livro foi a mais influente introdução em lógica até o início do século e nele é apresentado uma doutrina cartesiana (símbolos que representam as idéias). A idéia de um “cálculo do raciocínio” deve-se a René Descartes por ter sido um dos primeiros a usar técnicas algébricas para descrever uma exploração científica. A lógica moderna substituiu a dicotomia analítica sujeito-predicado, herdada da lógica aristotélica, pela oposição matemática função-argumento até chegar ao cálculo de predicados. Na lógica moderna adota-se a idéia de um cálculo do raciocínio por meio de técnicas algébricas para a pesquisa científica, incentivadas por Leibniz e Gottlob Frege. O resultado revolucionou a lógica, pois surgiu a Lógica de Predicado (cálculo de predicado) que adiciona os quantificadores às proposições e à forma que eles interferem nos resultados.

Atualmente a lógica está incorporada a todos os ramos científicos, pois as descobertas (verdades) devem ser testadas (provadas) por aqueles que têm interesse pelo conhecimento em questão; o processo que levou a isso foi lento e natural de forma que se estuda a lógica na forma de fazer ciência sem necessariamente se deter ou reconhecer que ela está presente. Os ramos do conhecimento que exigem uma postura crítica estudam a lógica propriamente dita, para que as suas afirmações sobre a realidade sejam coerentes e sustentáveis. Em ciências da computação a lógica está inserida diretamente em projetos de circuitos digitais e desenvolvimento de softwere, entre outras.

A lógica clássica sempre encarou problemas que a sua representação era insatisfatória e por isso surgiram propostas na área que pudessem atender esses casos adversos. Entenda-se como lógica clássica a lógica que atender aos princípios básicos como Lei do Terceiro Excluído, Lei da

Não-contradição e Lei da Identidade. Essas outras propostas são divididas em dois grupos: Complementares (acrescentam princípios aos da lógica clássica) e Anti-clássicas (negam ou alteram alguns princípios da lógica clássica). São exemplos de lógicas complementares: Lógica Modal (agrega o princípio da possibilidade), Lógica Epistêmica (agrega o princípio da crença) e Lógica Deôntica (agrega o princípio da legalidade). São exemplos de lógicas anti-clássicas: Lógica Paraconsistente (não existe a Lei da Não-contradição), Lógica Paracompleta (não existe a Lei do Terceiro Excluído) e Lógica Nebulosa (trabalha com graus de pertinência)[1]. As lógicas mencionadas são apenas algumas. Várias pesquisas são feitas para criar modelos que sejam capazes de responder às situações que a lógica clássica não é capaz de responder. A razão de existir de uma dessas lógicas é abordada em especial neste trabalho como veremos adiante.

No decorrer dos estudos realizados pelos lógicos, percebeu-se que existiam situações (certas nuances) que a lógica clássica não conseguia exprimir, como por exemplo "o dia está quente", pois essa noção é subjetiva, sem limite definido. Se tomarmos qualquer temperatura t como limite inferior, então o dia em que a temperatura for $t-\varepsilon$, com ε próximo de zero, não seria considerada "quente". Mas até que ponto isso faria tanta diferença?. Para lidar com essas situações de forma mais adequada, Zadeh em 1965, introduziu a lógica nebulosa, onde afirmações têm um grau de verdade que varia de 0 até 1. Sendo assim a lógica nebulosa vem tratar situações onde existe incertezas/imprecisões nas informações. Outra proposta para esse tipo de situação foi o uso da teoria das probabilidades mas até mesmo ela nem sempre é adequada. A lógica nebulosa (difusa ou "fuzzy") tem sua base na teoria dos Conjuntos Nebulosos que admite a imprecisão nas informações referentes à teoria dos conjuntos. Assim a lógica nebulosa é uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, em geral descritas em uma linguagem natural e convertê-las para um formato numérico, de fácil manipulação pelos computadores de hoje em dia**.** Atualmente as áreas que têm encontrado uma aplicação da lógica nebulosa são: Linguagem Formal; Reconhecimento de Padrões; Controle de Processos; Robótica; Modelagem de Sistemas Parcialmente Abertos; Sistemas Especialistas; Processo de Tomada de Decisão; Linguagem Natural, etc.. Duas direções principais na pesquisa da lógica nebulosa têm se destacado. A primeira é a pesquisa em sistemas computacionais de controle baseado em raciocínios nebulosos. A segunda é o estudo desta lógica do ponto de vista simbólico como teoria formal, estritamente matemático.

[1] Observe que na infinidade de lógicas nebulosas existe uma família delas que se comporta como a lógica clássica[4].

Assim, cada lógica nebulosa, nos leva a estender a álgebra Booleana usual (contrapartida semântica da lógica clássica) para uma álgebra (não necessariamente Booleana) tendo como conjunto base o intervalo [0,1]. A forma de modelar tais conectivos no intervalo [0,1] é objeto de estudos da lógica nebulosa. A idéia é que esses conectivos sejam generalizados, preservando propriedades mínimas, vindas da lógica proposicional clássica. Tais propostas são advindas das normas triangulares (t-normas), funções definidas para o intervalo [0,1] que tem propriedades mínimas razoáveis da conjunção em relação aos valores clássicos. De forma análoga ao que ocorre na lógica proposicional clássica as famílias de funções podem ser obtidas a partir das outras. Implicações nebulosas pode ser obtidas canonicamente a partir de t-normas e a negação nebulosa pode ser obtida canonicamente a partir da implicação nebulosa. De fato, todos os outros "conectivos nebulosos" podem ser obtidos canonicamente a partir das t-normas pois o mesmo é feito na lógica proposicional clássica em relação aos conectivos entre si. As t-normas e t-conormas apresentam as seguintes propriedades: Comutatividade, Associatividade, Monotonicidade e Elemento Neutro, propriedades que podem ser encontradas nos respectivos conectivos clássicos. Mas essas não são as únicas propriedades presentes, porém a generalização não preserva todas as propriedades sendo, admissível que um pequeno número delas sejam conservada. Outras propriedades podem ser agregadas mas sem estarem presentes nos conectivos, como por exemplo continuidade, essas propriedades geram uma subfamília de funções.

A quantidade de pesquisas sobre a bi-implicação nebulosa é reduzida; deixando a impressão de que essa família de funções (conectivos nebulosos) foi relegada a uma categoria inferior aos outros conectivos nebulosos. Assim, este trabalho visa re-colocar o conectivo bi-implicação nebulosa em igual patamar aos outros. Uma das motivações disto se deve ao fato de que a bi-implicação nebulosa poderia ser aplicada para modelar aspectos similaridade do tipo o quanto duas pessoas são igualmente altas. Grande parte das publicações disponíveis, no momento, não dão atenção ao conectivo da bi-implicação. É possível encontrar com facilidade artigos referentes aos outros conectivos (em alguns casos tais artigos lidam apenas com um deles). Sendo assim este trabalho se propõe a apresentar algumas informações sobre esse conectivo e sua generalização. De igual modo, as famílias de funções usadas para representar os operadores lógicos, a bi-implicação deve ter um conjunto de propriedades mínimas capazes de representar a generalização a que ele é proposto. Note que é possível usar a bi-implicação e implicação como operadores primitivos, de tal forma que os outros operadores passam a ser definidos em função deles, contribuindo assim para acrescentar fundamentos para a área. A bi-implicação neste artigo passa a ocupar um lugar de destaque do ponto de vista da lógica proposicional clássica, pois são apresentadas propostas de derivação de outros conectivos a partir da bi-implicação assim como da lógica nebulosa onde é feita uma algebrização para a generalização desse conectivo.

No contexto deste trabalho apresentaremos no capítulo **2** um breve comentário sobre os conectivos proposicionais clássicos e suas características e de que forma a bi-implicação pode ser usada como operador primitivo; no capítulo **3** falaremos sobre a generalização dos conectivos e as propriedades mínimas admitidas como também as propriedades adicionais que formam subclasses destas, ou seja, falaremos das t-normas, t-conormas, implicação nebulosa e negação nebulosa, mencionando as relações que podem vir a existir entre elas; no capítulo **4** é apresentado um conjunto de propriedades razoáveis de se exigir a uma bi-implicação nebulosa, além de ser proporcionado uma variedade de formas canônicas de se obter a bi-implicação a partir dos outros conectivos nebulosos. Finalmente neste capítulo analisamos algumas das propriedades que satisfazem essas formas canônicas.

2. CONECTIVOS CLÁSSICOS PROPOSICIONAIS

Antes de se falar sobre os conectivos nebulosos é necessário entender o funcionamento dos operadores na lógica proposicional clássica. Os conectivos proposicionais clássicos são operadores que podem ter vários, apenas um (negação) ou nenhum operando (no caso das constantes "0" e "1"). Eles devem retornar um valor verdade (verdadeiro ou falso). Considerando-se apenas 2 operandos (verdadeiro sendo "1" e falso sendo "0") temos que a conjunção entre estes operandos resultará em um valor conforme a regra de operação de multiplicação booleana. Já a disjunção resultará um valor segundo a regra de soma booleana, por tal motivo, a aritmética booleana é estuda. Não apresentaremos aqui detalhes das operações booleanas mas mostraremos a "tabela verdade" com todos os resultados possíveis.

Vale ressaltar que os conectivos podem ser combinados para reproduzir o resultado de outro conectivo. Como por exemplo usando a negação ($\neg$) e a implicação ($\rightarrow$) como operandos primitivos derivamos a disjunção ($\vee$) pela seguinte fórmula ($\neg x \rightarrow y$). Desta maneira é possível com apenas estes dois conectivos conseguir o mesmo resultado dos outros operadores. Neste caso mostramos fórmulas onde apresentamos a bi-implicação e a implicação como conectivos de onde derivaremos outros. Seguindo por um caminho diferente dos artigos publicados na área colocamos a bi-implicação em posição de destaque em relação aos outros conectivos.

Os conectivos proposicionais na lógica clássica do ponto de vista semântico e sintático são apresentados a seguir com algumas propriedades mínimas usadas para a generalização destes conectivos.

2.1 NEGAÇÃO ($\neg$)

Captura informações do tipo "não *x*". Sendo **P** um operando temos que **¬P** é verdade se e somente se **P** é falso.

As propriedades a seguir são as propriedades usadas para generalizar a negação.

Condição de borda: $\neg 0 = 1$ e $\neg 1 = 0$;

Monotonicidade: Se $P \leq Q$ então $\neg P \geq \neg Q$

2.2 CONJUNÇÃO ($\wedge$)

Captura afirmações do tipo "*x* e *y*". Sendo **P** e **Q** dois operandos temos que **P** $\wedge$ **Q** é verdade se **P** é verdade e **Q** é verdade.

As seguintes propriedades são usadas mais adiante como base para a generalização da conjunção.

Comutatividade: $P \wedge Q = Q \wedge P$;

Associatividade: $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$;

Monotonicidade: Se $Q \leq R$ então $P \wedge Q \leq P \wedge R$;

Condição de contorno: $P \wedge 1 = P$.

2.3 DISJUNÇÃO ($\vee$)

Captura afirmações do tipo "*x* ou *y*". Sendo **P** e **Q** dois operandos temos que **P** $\vee$ **Q** é verdade se **P** é verdade ou **Q** é verdade.

As seguintes propriedades são usadas mais adiante como base para a generalização da conjunção.

Comutatividade: $P \vee Q = Q \vee P$;

Associatividade: $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$;

Monotonicidade: Se $Q \leq R$ então $P \vee Q \leq P \vee R$;

Condição de contorno: $P \vee 0 = P$.

2.4 IMPLICAÇÃO ($\rightarrow$)

Captura afirmações do tipo "Se *x* então *y*". Sendo **P** e **Q** dois operandos (valores verdades) temos que **P** $\rightarrow$ **Q** é falsa se, e somente se, o antecedente **P** é verdadeiro e o conseqüente **Q** é falso.

A caracterização dos conectivos através da bi-implicação é restrita pois para todas as combinações de valores verdade verdadeiros (ou falsos) a saída terá necessariamente uma quantidade par desses valores verdades. Assim faz-se necessário contar com um conectivo que fornecesse uma quantidade ímpar de valores verdades verdadeiros (ou falsos) para auxiliar na caracterização daqueles conectivos com respostas também ímpares (como por exemplo a conjunção). O conectivo escolhido foi a implicação já que não é interesse deste trabalho tratar a conjunção e disjunção como conectivos primitivos. Sendo assim a implicação junto à bi-implicação podem ser considerados como primitivos, ou seja, a partir deles poderiam-se obter os outros conectivos.

2.5 BI-IMPLICAÇÃO ($\leftrightarrow$)

Captura afirmações do tipo "*x* se e somente se *y*". Sendo **P** e **Q** dois operandos temos que **P** $\leftrightarrow$ **Q** é verdade se, e somente se **P** e **Q** são ou ambos verdadeiros ou ambos falsos.

A bi-implicação é capaz de determina se duas expressões são iguais do ponto de vista de sua valoração verdade. Essa característica pode ser usada para comparar se propriedades são idênticas dando uma noção lógica para a igualdade (=) onde inexiste diferenças. Em termos computacionais cria-se um outro meio de se tratar a ausência de diferenças.

Existem varias formas de se obter o mesmo valor da Bi-implicação, na lógica clássica, por meio de fórmulas. Entre elas podemos destacar:

$$P \leftrightarrow Q = \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q))$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q = \neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)$$

As seguintes propriedades são usadas mais adiante como base para a generalização da bi-implicação.

Comutatividade: $P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

Verdade da igualdade: $P \leftrightarrow P = 1$

Elemento Neutro: $P \leftrightarrow 1 = P$

Falsidade da desigualdade: $P \leftrightarrow \neg P = 0$

Monotonicidade a direita: Se $P \leq Q \leq R$ então $P \leftrightarrow Q \geq P \leftrightarrow R$

Monotonicidade a esquerda: Se $P \leq Q \leq R$ então $Q \leftrightarrow R \geq P \leftrightarrow R$

Associatividade: $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$

Princípio da troca a esquerda: $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) = Q \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$

Princípio da troca a direita: $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) = R \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$

Contrapositivo da negação: $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$

TABELAS DE VERDADE

Os resultados dos conectivos mencionados neste capítulo são mostrados na Tabela Verdade a seguir:

x	y	¬x	x∧y	x∨y	x→y	x↔y
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabela 1 – Tabela de verdade para os conectivos proposicionais clássicos

Usando a Tabela Verdade nas fórmulas da bi-implicação apresentadas obtemos o mesmo resultado que a bi-implicação.

x	y	$x \leftrightarrow y$	$\neg(\neg(x \wedge y) \wedge (x \vee y))$	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$	$\neg(\neg x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge \neg y)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Tabela 2 – Fórmulas para a bi-implicação

É importante conhecer este resultado pois servirá de referencial para determinar as propriedades desejadas na bi-implicação nebulosa.

2.6 BI-IMPLICAÇÃO E IMPLICAÇÃO COMO CONECTIVOS PRIMITIVOS

Mostramos a seguir como é possível descrever outros conectivos tendo a bi-implicação e implicação como conectivos primitivos, além de que selecionamos propriedades dos conectivos para construirmos a generalização na lógica nebulosa.

2.6.1 Negação

A negação pode ser reescrita em função apenas da bi-implicação e da constante “0” da seguinte forma:

$$\neg \mathbf{P} = \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{0}$$

De forma semelhante $x \leftrightarrow 0$ tem as mesmas propriedades.

Condição de borda: $0 \leftrightarrow 0 = 1$ e $1 \leftrightarrow 0 = 0$;

Monotonicidade: Se $P \leq Q$ então $P \leftrightarrow 0 \geq Q \leftrightarrow 0$

Pela própria definição da bi-implicação obtemos os mesmos resultados deste conectivo para as suas propriedades. Outra propriedade importante(mas não necessária) para a sua generalização é o fato da negação ser involutiva $\neg\neg P = P$, assim $(P \leftrightarrow 0) \leftrightarrow 0 = P$.

2.6.2 Conjunção

A conjunção pode ser obtida usando outros conectivos e tais conectivos são para este caso primitivos. A combinação a seguir é equivalente a conjunção $\mathbf{P \wedge Q}$:

$$\mathbf{P \wedge Q = P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)}$$

De igual modo a fórmula $P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ tem as mesmas propriedades.

Comutatividade: $P \leftrightarrow (P \rightarrow Q) = Q \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$;

Associatividade: $P \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \leftrightarrow (Q \rightarrow R))) = (P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \leftrightarrow ((P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow R)$;

Monotonicidade: Se $Q \leq R$ então $P \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \leq P \leftrightarrow (P \rightarrow R)$;

Condição de Contorno: $P \leftrightarrow (P \rightarrow 1) = P$.

O conhecimento destas propriedades em função da bi-implicação e implicação permitem estudar a generalização da conjunção a partir da bi-implicação nebulosa.

2.6.3 Disjunção

A disjunção pode ser obtida usando outros conectivos e tais conectivos são para este caso primitivos. A combinação a seguir é equivalente a conjunção $\mathbf{P \vee Q}$:

$$\mathbf{P \vee Q = P \leftrightarrow (Q \rightarrow P)}$$

De igual modo a fórmula $P \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ deve ter as mesmas propriedades.

Comutatividade: $P \leftrightarrow (Q \rightarrow P) = Q \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$;

Associatividade: $P \leftrightarrow ((Q \leftrightarrow (R \rightarrow Q)) \rightarrow P) = (P \leftrightarrow (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (R \rightarrow (P \leftrightarrow (Q \rightarrow P)))$;

Monotonicidade: Se $Q \leq R$ então $P \leftrightarrow (Q \rightarrow P) \leq P \leftrightarrow (R \rightarrow P)$;

Condição de Contorno: $P \leftrightarrow (0 \rightarrow P) = P$.

O conhecimento destas propriedades em função da bi-implicação e implicação permitem estudar a generalização da disjunção a partir da bi-implicação e implicação nebulosa.

2.7 OUTROS CONECTIVOS

Além dos conectivos apresentados temos outros que são pouco conhecidos pois se costuma obter o resultado de suas operações por combinação dos operadores acima. Não é interesse deste trabalho estudar os conectivos nesta seção, são mencionados com o propósito de mostrar que existem outros conectivos.

Adaga de Quine

A $\downarrow$ B é verdadeiro somente se ambos, A e B, forem falsos. Trata-se, portanto, da negação da disjunção.

Disjunção Exclusiva

A $\underline{\vee}$ B entre duas fórmulas A e B é verdadeira somente se apenas uma delas for verdadeira. Trata-se, portanto, da negação da bi-implicação.

Traço de Sheffer

A | B só é falsa se ambos A e B forem verdadeiros. Trata-se, portanto, da negação da conjunção.

3 GENERALIZAÇÃO DOS CONECTIVOS PROPOSICIONAIS CLÁSSICOS PARA CONECTIVOS CLÁSSICOS

Como descrever padrões culturais ou abstratos? A lógica clássica proposicional já se mostrou incapaz de lidar com incertezas da linguagem natural. As t-normas, t-conormas, implicações e negações nebulosas são ferramentas para descrever situações onde a verdade é imprecisa, subjetiva ou variável. O valor verdade nebuloso é uma aproximação do quão verdade é uma expressão, tem um grau de verdade dentro de um intervalo [0,1]. Sendo "0" o falso absoluto e "1" a verdade absoluta. Nela é admitido que algo não precisa ser uma verdade absoluta mas pode ser uma meia verdade.

Este valor verdade vai ser obtido pelas ferramentas baseando-se nos conectivos proposicionais clássicos. As operações com tais conectivos irão apresentar algumas propriedades apenas. A lógica nebulosa trabalha, via funções matemáticas, com uma quantidade menor de propriedades, pois as funções nem sempre preservam as propriedades, preocupando-se em reproduzir os valores mostrados nas tabelas anteriores. Outras propriedades podem ser reproduzidas, mas serão consideradas como classes dentro das t-normas, t-conormas, implicações e negações nebulosas. Para que fosse feita uma extensão dos operadores lógicos para os conceitos de incerteza da lógica Nebulosa são utilizadas regras matemáticas que produzem os valores da Tabela Verdade na seção referente a lógica clássica.

É preciso mencionar as definições das operações sobre os elementos dos conjuntos numéricos, pois os resultados dessas operações devem preservar o domínio, a imagem e as condições de borda. Como estamos tratando da lógica nebulosa, o domínio e a imagem das operações são os mesmo, [0,1], e os extremos dos valores possíveis são o números 0 e 1.

3.1 NEGAÇÃO

A negação nebulosa é uma função unária no intervalo fechado [0,1] que simula a negação da lógica clássica. Tem importância para este trabalho pois algumas formas canônicas dependem da negação.

Toda função decrescente que mapeia N:[0,1] → [0,1] será uma negação nebulosa se atende as seguintes propriedades:

N1: N(0) = 1 e N(1) = 0;

N2: Se x ≤ y então N(x) ≥ N(y)

Será uma negação estrita se, além disso ela for:

N3: N é continua;

N4: N é estritamente decrescente;

E será uma negação forte se também for involutiva:

N5: N(N(x)) = x, ∀x ∈ [0,1].

Uma negação forte que também tiver a propriedade x + N(x) ≤ 1 será uma negação que nós batizaremos de negação pseudo-complementar. Claramente se x + N(x) = 1 para todo x, então ela seria complementar.

Ponto de equilíbrio será o valor e único tal que N(e) = e, onde e ∈ [0,1]

Negações nebulosas contínuas têm *ponto de equilíbrio* tal que para todo x < e, N(x) > e e para todo x > e, N(x) < e.

São exemplos de negações nebulosas as seguintes funções[1]:

Negação complemento (N_C)	1 - x
Negação Complemento Intuicionista (N_I)	$(1 - \sqrt{x})^2$
Negação de Sugeno (N_S)	(1 - x)/(1 + x)

Tabela 3 - Negações nebulosas

3.2 T-NORMAS

As t-normas foram introduzidas por Schweizer e Sklar em [2] para modelar distâncias em espaços métricos probabilísticos. É uma função binária que é associativa, comutativa, monotônica e com 1 como elemento neutro. A partir de uma t-norma é possível obter as outras funções como t-conormas e implicações nebulosas. As quatro primeiras propriedades são consideradas consenso entre os autores da área de lógica nebulosa (fuzzy) sendo assim elas são as propriedades mínimas que determinam o que é uma t-norma. Outras propriedades podem ser acrescentadas e caracterizar assim classes de t-normas. A t-norma é uma operação binária no intervalo fechado [0,1]. Ela é uma ferramenta indispensável para a lógica nebulosa pois ela é capaz de apresentar o mesmo comportamento da conjunção (conectivo "e") para os valores clássicos (0 e 1).

Toda função que mapeia $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ será uma T-norma se atende as seguintes propriedades:

T1: $T(x; y) = T(y; x), \forall x, y \in [0,1]$;

T2: $T(x; T(y; z)) = T(T(x; y); z), \forall x, y, z \in [0,1]$;

T3: Se $x \leq y$ então $T(x; z) \leq T(y; z), \forall x, y, z \in [0,1]$;

T4: $T(x; 1) = x.$, $\forall x \in [0,1]$;

São propriedades adicionais:

T5: T é continua;

T6: T é continua a esquerda;

T7: $T(x; x) = x, \forall x \in [0,1]$;

T8: $T(x; x) < x, \forall x \in [0,1]$;

T9: $\forall x,y \in]0,1[^2$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $T^n(x;x) < y$, onde $T^n: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $T^0(x) = x$ e $T^{n+1}(x) = T(x; T^n(x))$;

T10: T é continua e $0 < y < z < 1$ então $T(x; y) < T(x; z), \forall x,y, z \in [0,1]$;

T11: T é continua e $T(x; y) = 0$, $\forall x \exists y \in]0,1[$.

São exemplos de t-normas as seguintes funções:

T-norma de Gödel (T_G)	min(x;y)
T-norma de Lukasiewicz (T_L)	max(x + y -1;0)
T-norma produto (T_P)	xy

Tabela 4 – T-normas

Um elemento $x \in [0,1]$ numa t-norma T que satisfaz a propriedade T7 é chamado em [3] de *elemento idempotente*. Os números 0 e 1 são chamados de elementos idempotentes *triviais* de T. Cada elemento idempotente pertencente a]0,1[será chamado de elemento idempotente *não-*

trivial de T. No caso da t-norma T satisfazer a propriedade T8 o elemento é chamado de *elemento sub-idempotente* de T. Em t-normas contínuas (T5) a propriedade T8 é equivalente a propriedade T9.

Maior T-norma

Conforme visto em [4] a maior t-norma é T_G (a t-norma de Gödel ou min(x;y)), ou seja, para qualquer t-norma T e $x,y \in [0,1]$, $T(x;y) \leq T_G(x;y)$. Uma vez que min(x;0) = 0 então para qualquer t-norma T teremos T(x;0) = 0.

3.3 T-CONORMAS

As t-conormas de igual modo às t-normas foram introduzidas para descrever espaços métricos probabilísticos e têm como propriedades ser uma função binária que é associativa, comutativa, monotônica e ter 0 como elemento neutro; estas propriedades são consideradas consenso entre os autores. Outras propriedades descrevem classes de t-conormas. Sendo uma função binária no intervalo fechado [0,1] que simula a disjunção (conectivo "ou") clássica.

Toda função que mapeia $S:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ será uma T-conorma se atende as seguintes propriedades:

S1: $S(x; y) = S(y; x), \forall x, y \in [0,1]$;

S2: $S(x; S(y; z)) = S(S(x; y); z), \forall x, y, z \in [0,1]$;

S3: Se $x \leq y$ então $S(x; z) \leq S(y; z), \forall x, y, z \in [0,1]$;

S4: $S(x; 0) = x, \forall x \in [0,1]$.

São propriedades adicionais:

S5: S é continua;

S6: $S(x; x) = x, \forall x \in [0,1]$;

S7: $S(x; x) > x, \forall x \in [0,1]$;

S8: $\forall x,y \in\ ]0,1[^2$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $S^n(x;x) > y$, onde $S^n: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $S^0(x) = x$ e $S^{n+1}(x) = S(x; S^n(x))$;

S9: S é continua e $0 < y < z < 1$ então $S(x; y) < S(x; z), \forall x,y, z \in [0,1]$;

S10: S é continua e $S(x; y) = 1, \forall x \exists y \in]0,1[$.

São exemplos de t-conormas as seguintes funções:

T-conorma de Zadeh (S_M)	max(x, y)
T-conorma de Lukasiewicz (S_L)	min(x + y, 1)
T-conorma Probabilista (S_P)	x + y – xy

Tabela 5 – T-conormas

De forma semelhante às t-normas, nas t-conormas a propriedade S7 (sub-idempotência) é equivalente à propriedade S8 (arquimediana) somente para t-conormas que também tenham a propriedade S5.

Menor t-conorma

Conforme visto em [4] a menor t-conorma é S_M (a t-conorma de Zadeh ou max(x;y)), ou seja, para qualquer t-conorma S e $x,y \in [0,1]$, $S(x;y) \geq S_M(x;y)$. Uma vez que max(x;1) = 1 então para qualquer t-conorma S teremos S(x;1) = 1.

3.4 IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Elas surgiram parar generalizar a implicação da lógica proposicional clássica e são tratadas como operadores derivados dos outros operadores nebulosos. Sua importância para a lógica nebulosa está no fato das regras nebulosas serem baseadas neste operador. Essas regras são usadas nas inferências nebulosas (modus ponens nebuloso, modus tollens nebuloso), deste modo ela representa uma relação entre duas variáveis. Em processamento de imagem, uma implicação nebulosa é usada para definir um subconjunto que mede a pertinência entre dois conjuntos nebulosos. Em mineração de dados, a implicação nebulosa é usada para expressar a relação entre dois itens numa regra de associação.

As formas canônicas de se obter uma implicação são 3 até o momento, Resíduo, S-implicação e QL-implicação. O resíduo (ou R-implicação) é a forma mais comumente encontrada nos artigos publicados na área para produzir uma implicação e depende unicamente das t-normas. A S-implicação é produzida a partir da t-conorma e negação (será uma (S,N)-implicação se a negação for uma negação forte). Já a QL-implicação é obtida usando t-normas, negação e t-conormas.

Não existe consenso sobre as propriedades mínimas de uma implicação entre os estudiosos da área. O único consenso é o comportamento para os valores "0" e "1" que correspondem aos mesmos da implicação na lógica proposicional clássica. A implicação nebulosa é uma função que representa a implicação ($\rightarrow$).

Toda função que mapeia $I:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ será uma implicação se atende as seguintes propriedades:

I1: $I(0;0) = I(0;1) = I(1;1) = 1$, $I(1;0) = 0$.

São propriedades adicionais:

I2: Se $x \leq z$ então $I(x; y) \geq I(z; y)$, $\forall x,y, z \in [0,1]$;

I3: Se $y \leq z$ então $I(x; y) \leq I(x; z)$, $\forall x,y, z \in [0,1]$;

I4: $I(0; y) = I(x; 1) = 1$, $\forall x, y \in [0,1]$;

I5: $I(1; x) = x$, $\forall x \in [0,1]$;

I6: $I(x; I(y; z)) = I(y; I(x; z))$, $\forall x,y, z \in [0,1]$;

I7: $I(x; y) = 1$ Se e somente se $x \leq y$, $\forall x,y \in [0,1]$;

I8: $I(x; y) = I(N(y); N(x))$, $\forall x,y \in [0,1]$;

I9: I é continua.

Estas propriedades não são independentes, em [3], implicações nebulosas que satisfaçam I6, I7 e I9 satisfazem outras propriedades I1, I2, I3, I5 e I8.

As quatro primeiras propriedades são as mais citadas na literatura sobre o assunto, mas nem essas tem sido aceitas como as minimamente necessárias para definir uma implicação.

As implicações podem ser obtidas canonicamente de três formas:

Seja T uma t-norma. Uma R-implicação é definida como:

$$I(x; y) = \sup\{z \in [0,1] / T(x;z) \leq y\};$$

Se a t-norma tiver a propriedade T6 então ela se torna:

$$I(x; y) = \max\{z \in [0,1] / T(x;z) \leq y\};$$

Caso a R-implicação seja gerada por qualquer uma das formas canônicas acima então a t-norma pode ser recuperada por:

$$T(x; y) = \inf\{t \in [0,1] / I(x;t) \geq y\};$$

A definição de R-implicação vem da lógica Intuicionista.

São exemplos de R-implicações as seguintes funções:

Implicação de Gödel (I_G)	1 se $x \leq y$ y do contrário
Implicação de Lukasiewicz (I_L)	$\min(1 - x + y; 1)$
Implicação do Produto (I_P)	1 se $x \leq y$ y/x do contrário

Tabela 6 – R-implicações

Seja S uma t-conorma e N uma negação nebulosa. Uma S-implicação é definida como:

$$I(x;y) = S(N(x);y), \forall x,y \in [0,1];$$

Como foi mencionado anteriormente alguns autores trabalham N como a negação forte, recebendo o nome de (S,N)-implicação[5], enquanto outros não usam a negação forte.

São exemplos de S-implicação as seguintes função:

Implicação de Gödel (I_G)	1 se $x \leq y$ y do contrário
Implicação de Reichenbach (I_T)	$1 - x + xy$
Implicação Mais Estrita (I_M)	1 se $x = 0$ y do contrário

Tabela 7 – S-implicações

Seja S uma t-conorma, T uma t-norma e N uma negação. Uma QL-implicação é definida como:

$$I(x;y) = S(N(x);T(x;y)), \forall x,y \in [0,1].$$

Em relação a negação nebulosa ela não precisa ser necessariamente uma negação forte.

São exemplos de QL-implicação as seguintes função:

Implicação de Gödel (I_G)	1 se $x \leq y$ y do contrário
Implicação de Zadeh	max(1 - x;min(x;y))
Kleene-Dienes	max(1 – x;y)

Tabela 8 – QL-implicações

Note que a implicação de Gödel se repetiu em todas as tabelas de exemplos para as implicações pois é classificada como R-implicação, S-implicação e QL-implicação.

3.5 RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES DE GENERALIZAÇÃO

Certas propriedades reproduzem comportamentos observados na lógica proposicional clássica tais como a lei da contraposição, isto é, $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$ que é expressa em lógica nebulosa pela propriedade *I8:* $I(x; y) = I(N(y); N(x)),\ \forall x,y \in [0,1]$. Assim uma vez que $\neg x = x \rightarrow 0$ poderíamos, por exemplo, construir uma negação da forma N(x) = I(x;0). É possível definir a partir de uma t-norma T, por exemplo, operadores que generalizem outros operadores e vice-versa. [6, 7, 2, 8].

Exemplo:

Disjunção: S(x; y) = 1 – T(1 – x; 1 - y);

Conjunção: T(x; y) = 1 – S(1 – x; 1 – y)

Essas fórmulas nebulosas sempre vão refletir fórmulas clássicas.

Algumas outras relações são encontradas dentre os conectivos nebulosos. Se $\forall x,y, z \in [0,1]$, S(x;T(y;z)) = T(S(x;y);S(x;z)) é dito que a t-conorma S é distributiva em relação a t-norma T. De igual modo, $\forall x,y, z \in [0,1]$, T(x;S(y;z)) = S(T(x;y);T(x;z)) é dito que a t-norma T é distributiva em relação a t-conorma S. Um estudo bem conhecido sobre as relações entre os conectivos nebulosos é o Sistema de De Morgam. N-Dual conforme visto em [3] é umas das propriedades do sistema De Morgam.

N-Dual

Seja T uma t-norma e seja S uma t-conorma, T será N-Dual de S se S(x;y) = N(T(N(x);N(y))) e S será N-Dual de T se T(x;y) = N(S(N(x);N(y))). As t-normas exemplificadas neste trabalho são N-duais com as seguintes t-conormas.

T-normas	**T-conormas**
$T_G(x;y) = \min(x;y)$	$S_m(x;y) = \max(x;y)$
$T_L(x;y) = \max(x + y - 1 ; 0)$	$S_L(x;y) = \min(x + y; 1)$
$T_P(x;y) = xy$	$S_P(x;y) = x + y - xy$

Tabela 9 – Funções N-duais

3.6. ELEMENTO NILPOTENTE PARA T-NORMAS E T-CONORMAS

Seja T uma t-norma, então para todo $n \in$ N defina a função T^n: $[0,1] \to [0,1]$ por $T^0(a) = a$ e $T^{n+1}(a) = T(a;T^n(a))$, $\forall a \in [0,1]$. Um elemento a será nilpotente se existir um $k \in$ N tal que:

$$T^k(a) = 0.$$

Seja S uma t-conorma, então para todo $n \in$ N defina a função S^n: $[0,1] \to [0,1]$ por $S^0(a) = a$ e $S^{n+1}(a) = S(a;S^n(a))$, $\forall a \in [0,1]$. Um elemento a será nilpotente se existir um $k \in$ N tal que:

$$S^k(a) = 1.$$

Os elementos nilpotentes estão presentes nas funções que tenham a propriedade T11 e S10, para a t-norma e t-conorma respectivamente. Como as duas funções são N-duais entre si explica-se os resultados opostos para seus valores nilpotentes.

4 BI-IMPLICAÇÃO NEBULOSA

A Bi-implicação nebulosa deverá respeitar os valores obtidos na Tabela Verdade para os valores verdades clássicos. Nada podendo se dizer a respeito dos valores no intervalo aberto entre 0 e 1. Informações sobre esses valores intermediários só podem ser obtidos se forem levados em conta propriedades que generalizem a bi-implicação.

4.1 PROPRIEDADES DA BI-IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Conforme visto em [9] a bi-implicação (B(x;y)) nebulosa será uma generalização que satisfará a seguinte propriedade:

B0: $B(0;0) = B(1;1) = 1$; $B(0;1) = B(1;0) = 0$;

São propriedades razoáveis:

B1: $B(x; y) = B(y; x), \forall x, y \in [0,1]$;

B2: $B(x; x) = 1, \forall x \in [0,1]$;

B3: $B(x; 1) = x, \forall x \in [0,1]$;

B4: $B(x; N(x)) = 0; x \neq N(x), \forall x \in [0,1]$;

B5: Se $x \leq y \leq z$ então $B(x; y) \geq B(x; z), \forall x,y, z \in [0,1]$;

B6: Se $x \leq y \leq z$ então $B(y; z) \geq B(x; z), \forall x,y, z \in [0,1]$;

B7: $B(x; B(y; z)) = B(B(x; y); z), \forall x,y, z \in [0,1]$;

B8: $B(x; B(y; z)) = B(y; B(x; z)), \forall x,y, z \in [0,1]$;

B9: $B(x; B(y; z)) = B(z; B(y; x)), \forall x,y, z \in [0,1]$;

B10: $B(x; y) = B(N(x); N(y)), \forall x, y \in [0,1]$;

Observe que as propriedades B5 e B6 dão a noção de similaridade, ou seja, enquanto B(x;y) estiver mais perto de 1, mais similares podem ser considerados x e y.

4.2 FORMAS CANÔNICAS

As formas canônicas neste caso são transformadas que utilizam outras funções de generalização da lógica nebulosa e gera uma nova função nebulosa. Para determinarmos como construir um *forma canônica* buscamos fórmulas que fossem capazes de representar a bi-implicação na lógica proposicional clássica. A combinação destes conectivos apresenta a mesma resposta para as mesmas entradas numa bi-implicação. Também partimos de um "caminho" diferente para determinar uma forma canônica que constou de construir funções que generalizassem a bi-implicação. Como elas tinha elementos em comum verificou-se a possibilidade de existir uma fórmula equivalente na lógica proposicional clássica, o quê se confirmou como verdade. Esta fórmula será apresentada nesse capítulo.

Podemos obter, segundo [9, 10], de forma canônica a bi-implicação nebulosa:

Primeira forma canônica: $B(x;y) = T(I(x;\ y);\ I(y;\ x))$;

Para a primeira forma canônica a função I será R-implicação, S-Implicação ou QL-Implicação. Além dessa forma canônica podemos propor:

Segunda forma canônica: $B(x;y) = S(T(x;y);T(N(x);N(y)))$;

Terceira forma canônica: $B(x;y) = N(T(N(T(x;y));S(x;y)))$.

Quarta forma canônica $B(x;y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))$

Observe que todas elas foram obtidas baseando-se nas fórmulas apresentadas no capítulo 2 sobre o conectivo bi-implicação.

4.2.1 Primeira forma canônica Bi-implicação $B(x;y) = T(I(x;y);\ I(y;x))$.

Esse primeiro modelo engloba as três formas canônicas de implicação (R-implicação, S-implicação e QL-implicação). As provas feitas nessa sessão são válidas para todos os modelos de implicações.

Proposição 4.1

Seja T uma t-norma e I uma implicação nebulosa. Se B(x,y) = T(I(x; y); I(y; x)), então B satisfaz a propriedade B1.

Demonstração:

B(x; y) = T(I(x; y); I(y; x))

= T(I(y; x); I(x; y)) (por T1)

= B(y; x). !

Proposição 4.2

Seja T uma t-norma e I uma implicação nebulosa tal que satisfaz I7. Se B(*x*;*y*) = T(I(x;y); I(y;x)), então B satisfaz a propriedade B2.

Demonstração:

B(x; x) = T(I(x; x); I(x; x))

= T(1; 1) (por I7)

= 1. !

Proposição 4.3

Seja T uma t-norma e I uma implicação nebulosa tal que satisfaz I4 e I5. Se B(*x*;*y*) = T(I(x; y); I(y; x)), então B satisfaz a propriedade B3.

Demonstração:

B(x; 1) = T(I(x; 1); I(1; x))

= T(1; I(y; x)) (por I4)

= T(1; x) (por I5)

= x T4. !

Proposição 4.4

Seja T uma t-norma, I uma implicação nebulosa tal que satisfaz I2, I7 e $x \leq y \leq z$. Se B(*x*;*y*) = T(I(x; y); I(y; x)), então B satisfaz a propriedade B5.

Demonstração:

B(x; y) = T(I(x; y); I(y; x))

= T(1; I(y; x)) (por I7)

= I(y; x) (por T4)

B(x; z) = T(I(x; z); I(z; x))

= T(1; I(z; x)) (por I7)

= I(z; x) (por T4)

Como por I2, I(y; x) ≥ I(z; x)

Então B(x; y) ≥ B(x; z). !

Proposição 4.5

Seja T uma t-norma e I uma implicação nebulosa tal que satisfaz I3, I7 e x ≤ y ≤ z. Se B(*x*;*y*) = T(I(x; y); I(y; x)), então B satisfaz a propriedade B6.

Demonstração:

B(y; z) = T(I(y; z); I(z; y))

= T(1; I(z; y)) (por I7)

= I(z; y) (por T4)

B(x; z) = T(I(x; z); I(z; x))

= T(1; I(z; x)) (por I7)

= I(z; x) (por T4)

Como por I3, I(z; y) ≥ I(z; x)

Então B(z; y) ≥ B(z; x). !

Corolário:

Seja B uma bi-implicação obtida de uma R-implicação na primeira forma canônica. Então B satisfaz B1, B2, B3, B5 e B6

Demonstração:

Direta das proposições **4.1** até **4.5**.

Proposição 4.6

Seja T uma t-norma, S uma t-conorma e N uma negação forte. Se B(*x*;*y*) = T(S(N(x); y); S(N(y); x)), então B satisfaz a propriedade B10.

Demonstração:

$B(x; y) = T(S(N(x); N(N(y)));S(N(y); N(N(x))))$ (por N5)

$= T(S(N(y); N(N(x))); S(N(x); N(N(y))))$ (por T1)

$= T(S(N(N(x)); N(y)); S(N(N(y)); N(x)))$ (por S1)

$= B(N(x); N(y))$. !

4.2.2 Segunda forma canônica $B(x;y) = S(T(x; y); T(N(x); N(y)))$;

Segue a diante as propriedades válidas para a segunda forma canônica e suas respectivas provas.

Proposição 4.7

Seja T uma t-norma, S uma t-conorma e N uma negação forte. Se $B(x;y) = S(T(x; y); T(N(x); N(y)))$, então B satisfaz as propriedades B1, B3 e B10.

Demonstração:

B1: $B(x;y) = S(T(x; y); T(N(x); N(y)))$

$= S(T(y; x); T(N(y); N(x)))$ (por T1)

$= B(y; x)$. !

B3: $B(x;1) = S(T(x; 1); T(N(x); N(1)))$

$= S(x; T(N(x); N(1)))$ (por T4)

$= S(x; T(N(x);0))$ (por N1)

$= S(x;0)$ (pela menor t-conorma)

$= x$ S4. !

B10: $B(x; y) = S(T(N(N(x)); N(N(y))); T(N(x); N(y)))$ (por N5)

$= S(T(N(x); N(y)); T(N(N(x)); N(N(y))))$ (por S1)

$= B(N(x); N(y))$. !

Proposição 4.8

Seja T uma t-norma tal que satisfaz T7, S uma t-conorma tal que satisfaz S10 e N uma negação forte. Se $B(x;y) = S(T(x; y); T(N(x); N(y)))$, então B satisfaz a propriedade B2.

Demonstração:

B(x;x) = S(T(x; x); T(N(x); N(x)))

= S(x; N(x)) (por T7)

= 1. (por S10) !

Proposição 4.9

Seja T uma t-norma tal que satisfaz T11, S uma t-conorma e N uma negação forte. Se B(x;y) = S(T(x; y); T(N(x); N(y))), então B satisfaz a propriedade B4.

Demonstração:

B(x;N(x)) = S(T(x; N(x)); T(N(x); N(N(x))))

= S(T(x; N(x)); T(N(x);x)) (por N5)

= S(T(x; N(x)); T(x; N(x))) (por T1)

= S(0;0) (por T11)

= 0. !

4.2.3 Terceira forma canônica B(x;y) = N(T(N(T(x; y)); S(x; y))).

Segue a diante as propriedades válidas para a terceira forma canônica e suas respectivas provas.

Proposição 4.10

Seja T uma t-norma, S uma t-conorma e N uma negação forte. Se B(x;y) = N(T(N(T(x; y)); S(x; y))), então B satisfaz as propriedades B1 e B3.

Demonstração:

B1: B(x; y) = N(T(N(T(x; y)); S(x; y)))

= N(T(N(T(y; x)); S(x; y))) (por T1)

= N(T(N(T(y; x)); S(y; x))) (por S1)

= B(y; x). !

B3: B(x; 1) = N(T(N(T(x; 1)); S(x; 1)))

= N(T(N(x); S(x; 1))) (por T4)

= N(T(N(x); 1)) (pela menor t-conorma)

= N(N(x)) (por T4)

$= x.$ (por N5) !

Proposição 4.11

Seja T uma t-norma tal que satisfaz T7 e T11, S uma t-conorma tal que satisfaz S6 e N uma negação. Se $B(x;y) = N(T(N(T(x; y)); S(x; y)))$, então B satisfaz a propriedade B2.

Demonstração:

$B(x; x) = N(T(N(T(x; x)); S(x; x)))$

$= N(T(N(x); S(x; x)))$ (por T7)

$= N(T(N(x); x))$ (por S6)

$= N(0)$ (por T11)

$= 1.$!

Proposição 4.12 Seja T uma t-norma N-dual com S, S uma t-conorma N-dual com T e Seja N uma negação forte. Se $B(x;y) = N(T(N(T(x; y)); S(x; y)))$, então B satisfaz a propriedade B10.

Demonstração:

$B(x; y) = N(T(N(N(S(N(x);N(y)))); N(T(N(x);N(y)))))$ (por N-Dual)

$= N(T(S(N(x);N(y)); N(T(N(x);N(y)))))$ (por N5)

$= N(T(N(T(N(x);N(y))); S(N(x);N(y))))$ (por T1)

$= B(N(x);N(y)).$!

4.2.4 Quarta forma canônica $B(x;y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))$.

Segue a diante as propriedades válidas para a quarta forma canônica e suas respectivas provas.

Proposição 4.13

Seja T uma t-norma e N uma negação forte. Se $B(x;y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))$, então B satisfaz as propriedades B1, B3 e B10.

Demonstração:

B1: $B(x; y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))$

$= T(N(T(N(y);x));N(T(N(x);y)))$ (por T1)

$= B(y; x)$. !

B3: $B(x; 1) = T(N(T(N(x);1));N(T(N(1);x)))$

$= T(N(N(x));N(T(N(1);x)))$ (por T4)

$= T(N(N(x));N(T(0;x)))$ (por N1)

$= T(x;N(T(0;x)))$ (por N5)

$= T(x;N(0))$ (pela maior t-norma)

$= T(x;1)$ (por N1)

$= x$. (por T4) !

B10: $B(x; y) = T(N(T(N(x);N(N(y))));N(T(N(y);N(N(x)))))$ (por N5)

$= T(N(T(N(N(y));N(x)));N(T(N(N(x));N(y))))$ (por T1)

$= T(N(T(N(N(x));N(y)));N(T(N(N(y));N(x))))$ (por T1)

$= B(N(x);N(y))$. !

Proposição 4.14

Seja T uma t-norma e N uma negação forte tal que T satisfaz T11. Se $B(x;y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))$, então B satisfaz a propriedade B2.

Demonstração:

$B(x; x) = T(N(T(N(x);x));N(T(N(x);x)))$

$= T(N(0);N(0))$ (por T11)

$= T(1; 1)$ (por N1)

$= 1$. !

Proposição 4.15 Seja T uma t-norma tal que satisfaz T7, T11 e N uma negação forte. Se $B(x;y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))$, então B satisfaz a propriedade B4.

Demonstração:

$B(x;N(x)) = T(N(T(N(x);N(x)));N(T(N(N(x));x)))$

$= T(N(N(x));N(T(N(N(x));x)))$ (por T7)

$= T(x;N(T(x;x)))$ (por N5)

$= T(x;N(x))$ (por T7)

$= 0$. (por T11) !

4.3 EXEMPLOS DE BI-IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Para um melhor entendimento do que ocorre no âmbito da lógica nebulosa, em relação à clássica, é importante conhecer como se comportam determinadas regras (funções) descritas para cada conectivo. Os exemplos de bi-implicações nebulosas apresentadas foram construídas segundo as formas canônicas propostas neste trabalho. Ainda assim existem outras bi-implicações nebulosas além das obtidas pelas formas canônicas. As bi-implicações nebulosas que não foram construídas pelas formas canônicas estão fora deste trabalho. O formato de apresentação das bi-implicações nebulosas constará das funções que serviram de base para construí-las de acordo com a forma canônica usada. Três exemplos são dados em cada caso e eles tiveram a seguinte combinação de funções $\{N_C, T_G, S_M, I_G\}$, $\{ N_I, T_L, S_L, I_L \}$ e $\{ N_S, T_P, S_P, I_P\}$.

Note que anteriormente foi provado que a comutatividade é uma propriedade presente em todas as formas canônicas e portanto embora nas tabelas a seguir só tenhamos considerados valores em que x é menor que y, pela comutatividade também vale para valores em que x for maior que y..

4.3.1 Primeira forma canônica, R-implicação:

$$\mathbf{B(x;y) = T(I(x;y);I(y;x)),\ I(x;\,y) = \sup\{z \in [0,1] /\ T(x;z) \leq y\},\ \forall x,y \in [0,1];}$$

Considerando $\{N_C, T_G, S_M, I_G\}$:

$$B_{1R\text{-}G}(x;y) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = y \\ x \text{ se } x < y \\ y \text{ do contrário} \end{cases}$$

Considerando $\{ N_I, T_L, S_L, I_L \}$:

$$B_{1R\text{-}L}(x;y) = \max(\min(1 - x + y;1) + \min(1 - y + x;1) - 1;0)$$

Considerando { N_S, T_P, S_P, I_P}:

$$B_{1R\text{-}P}(x;y) = \begin{cases} x/y \text{ se } x \leq y \\ y/x \text{ se } y \leq x \end{cases}$$

A seguinte tabela ilustra o comportamento dessas bi-implicações para alguns valores.

x	y	$B_{1R\text{-}G}$	$B_{1R\text{-}L}$	$B_{1R\text{-}P}$
0	0,55	0	0,45	0
0,3	0,75	0,3	0,55	0,4
0,4	0,75	0,4	0,65	0,54
0,7	0,85	0,7	0,85	0,83
0,8	0,9	0,8	0,9	0,89
0,95	1	0,95	0,95	0,95

Tabela 10 – Primeira forma canônica, R-implicações

Observe que, para todos os casos vistos $B_{1R\text{-}G}(x,y) \leq B_{1R\text{-}P}(x,y) \leq B_{1R\text{-}L}(x,y)$.

4.3.2 Primeira forma canônica, S-implicação**:**

$B(x;y) = T(I(x;y);I(y;x))$, $I(x;y) = S(N(x);y)$, $\forall x,y \in [0,1]$;

Considerando {N_C, T_G, S_M, I_G}:

$$B_{1S\text{-}G}(x;y) = \min(\max((1 - x);y);\max((1 - y);x))$$

Considerando { N_I, T_L, S_L, I_L }:

$$B_{1S\text{-}L}(x;y) = \max(\min((1 - \sqrt{x})^2 + y;1) + \min((1 - \sqrt{y})^2 + x;1) - 1;0)$$

Considerando { N_S, T_P, S_P, I_P}:

$$B_{1S\text{-}P}(x;y) = \{[(1 - x)/(1 + x)] + y - [(1 - x)/(1 + x)]y\}\{[(1 - y)/(1 + y)] + x - [(1 - y)/(1 + y)]x\}$$

A seguinte tabela ilustra o comportamento dessas bi-implicações para alguns valores.

x	y	$B_{1S\text{-}G}$	$B_{1S\text{-}L}$	$B_{1S\text{-}P}$
0	0,55	0,45	0,06676	0,290323
0,3	0,75	0,3	0,272504	0,353846
0,4	0,75	0,4	0,303038	0,416327
0,7	0,85	0,7	0,582771	0,634849
0,8	0,9	0,8	0,713779	0,73848
0,95	1	0,95	0,95	0,95

Tabela 11 – Primeira forma canônica, S-implicações

Observe que, para todos os casos vistos $B_{1S\text{-}L}(x,y) \leq B_{1S\text{-}P}(x,y)$ e $B_{1S\text{-}L}(x,y) \leq B_{1S\text{-}G}(x,y)$, mas não é o caso que $B_{1S\text{-}P}(x,y) \leq B_{1S\text{-}G}(x,y)$ ou $B_{1S\text{-}G}(x,y) \leq B_{1S\text{-}P}(x,y)$.

4.3.3 Primeira forma canônica, QL-implicação**:**

$B(x;y) = T(I(x;y);I(y;x)), I(x;y) = S(N(x);T(x;y)), \forall x,y \in [0,1];$

Considerando {N_C, T_G, S_M, I_G}:

$$B_{1QL\text{-}G}(x;y) = \min(\max((1 - x);\min(x;y));\max((1 - y);\min(y;x)))$$

Considerando { N_I, T_L, S_L, I_L }:

$$B_{1QL\text{-}L}(x;y) = \max(\min((1 - \sqrt{x})^2 + \max(x+y - 1;0);1) + \min((1 - \sqrt{y})^2 + \max(y+x - 1;0);1) - 1;0)$$

Considerando { N_S, T_P, S_P, I_P}:

$$B_{1QL-P}(x;y) = \{(1 - x)/(1 + x)+xy – [(1 - x)/(1 + x)]xy\}\{(1 - y)/(1 + y) + xy – [(1 - y)/(1 + y)]xy\}$$

A seguinte tabela ilustra o comportamento dessas bi-implicações para alguns valores.

x	y	B_{1QL-G}	B_{1QL-L}	B_{1QL-P}
0	0,55	0,45	0,06676	0,290323
0,3	0,75	0,3	0	0,215632
0,4	0,75	0,4	0	0,24
0,7	0,85	0,7	0,132771	0,418435
0,8	0,9	0,8	0,413779	0,551869
0,95	1	0,95	0,900641	0,903718

Tabela 12 – Primeira forma canônica, QL-implicações

Observe que, para todos os casos vistos $B_{1QL-L}(x,y) \leq B_{1QL-P}(x,y) \leq B_{1QL-G}(x,y)$.

4.3.4 Segunda forma canônica**:**

B(x;y) = S(T(x; y); T(N(x); N(y)));

Considerando {N_C, T_G, S_M, I_G}:

$$B_{2G}(x;y) = \max(\min(x;y);\min((1 - x);(1 - y)))$$

Considerando { N_I, T_L, S_L, I_L }:

$$B_{2L}(x;y) = \min(\max(x + y – 1;0) + \max((1 - \sqrt{x})^2 + (1 - \sqrt{y})^2 – 1;0);1)$$

Considerando { N_S, T_P, S_P, I_P}:

$$B_{2P}(x;y) = xy + [(1 - x)/(1 + x)][(1 - y)/(1 + y)] – xy[(1 - x)/(1 + x)][(1 - y)/(1 + y)]$$

A seguinte tabela ilustra o comportamento dessas bi-implicações para alguns valores.

x	y	B_{2G}	B_{2L}	B_{2P}
0	0,55	0,45	0,06676	0,290323
0,3	0,75	0,3	0,05	0,284615
0,4	0,75	0,4	0,15	0,342857
0,7	0,85	0,7	0,55	0,600795
0,8	0,9	0,8	0,7	0,721637
0,95	1	0,95	0,95	0,95

Tabela 13 – Segunda forma canônica

Observe que, para todos os casos vistos $B_{2L}(x,y) \leq B_{2P}(x,y) \leq B_{2G}(x,y)$.

4.3.5 Terceira forma canônica**:**

B(x;y) = N(T(N(T(x; y)); S(x; y)));

Considerando $\{N_C, T_G, S_M, I_G\}$:

$$B_{3G}(x;y) = 1 – (min((1 – min(x;y);max(x;y)))$$

Considerando $\{ N_I, T_L, S_L, I_L \}$:

$$B_{3L}(x;y) = (1 - \sqrt{}max((1 - \sqrt{}max(x + y – 1;0))^2 + min(x + y;1) – 1;0))^2$$

Considerando $\{ N_S, T_P, S_P, I_P\}$:

$$B_{3P}(x;y) = \{1 – [(1 - xy)/(1 + xy)](x + y - xy)\}/\{1 + [(1 - xy)/(1 + xy)](x + y - xy)\}$$

A seguinte tabela ilustra o comportamento dessas bi-implicações para alguns valores.

x	y	B_{3G}	B_{3L}	B_{3P}
0	0,55	0,45	0,06676	0,290323
0,3	0,75	0,3	0,05	0,314113
0,4	0,75	0,4	0,15	0,372032
0,7	0,85	0,7	0,55	0,609668
0,8	0,9	0,8	0,7	0,72483
0,95	1	0,95	0,95	0,95

Tabela 14 – Terceira forma canônica

Observe que, para todos os casos vistos $B_{3L}(x,y) \leq B_{3P}(x,y)$ e $B_{3L}(x,y) \leq B_{3G}(x,y)$, mas não é o caso que $B_{3G}(x,y) \leq B_{3P}(x,y)$ ou $B_{3P}(x,y) \leq B_{3G}(x,y)$.

4.3.6 Quarta forma canônica**:**

B(x;y) = T(N(T(N(x);y));N(T(N(y);x)))

Considerando $\{N_C, T_G, S_M, I_G\}$:

$$B_{4G}(x;y) = \min((1 - \min((1 - x);y));(1 - \min((1 - y);x)))$$

Considerando $\{ N_I, T_L, S_L, I_L \}$:

$$B_{4L}(x;y) = \max((1 - \sqrt{\max((1 - \sqrt{x})^2 + y - 1;0)})^2 + (1 - \sqrt{\max((1 - \sqrt{y})^2 + x - 1;0)})^2 - 1;0)$$

Considerando $\{ N_S, T_P, S_P, I_P\}$:

$$B_{4P}(x;y) = \{[1 - y(1 - x)/(1 + x)]/[1 + y(1 - x)/(1 + x)]\}\{[1 - x(1 - y)/(1 + y)]/[1 + x(1 - y)/(1 + y)]\}$$

A seguinte tabela ilustra o comportamento dessas bi-implicações para alguns valores.

x	y	B_{4G}	B_{4L}	B_{4P}
0	0,55	0,45	0,06676	0,290323
0,3	0,75	0,3	1	0,389754
0,4	0,75	0,4	1	0,457999
0,7	0,85	0,7	1	0,659735
0,8	0,9	0,8	1	0,752066
0,95	1	0,95	0,95	0,95

Tabela 15 – Quarta Forma canônica

Observe que, para todos os casos vistos $B_{4P}(x,y) \leq B_{4L}(x,y)$ e $B_{4G}(x,y) \leq B_{4L}(x,y)$, mas não é o caso que $B_{4G}(x,y) \leq B_{4P}(x,y)$ ou $B_{4P}(x,y) \leq B_{4G}(x,y)$.

5 CONCLUSÃO

Para as bi-implicações nebulosas, foram consideradas algumas propriedades mínimas e outras adicionais que elas poderiam satisfazer. As formas canônicas de se obter bi-implicação a partir dos outros conectivos foram analisadas para se determinar quais dessas propriedades eles satisfaziam. E assim generalizar para a lógica nebulosa. A quantidade de pesquisas sobre a bi-implicações nebulosa é reduzida, tomamos conhecimento por periódicos, portais e sites de busca de [9, 11, 12] onde são mais específicos enquanto esse trabalho dedica-se a estudar exclusivamente a bi-implicação; deixando a impressão de que este conectivo foi relegado a uma categoria inferior aos outros. Assim, este trabalho visa re-colocar o conectivo bi-implicação nebulosa em igual patamar aos outros. Isto é motivado, pelo fato de bi-implicação nebulosa ser importante para modelar similaridade.

Das propriedades plausíveis para a bi-implicação nebulosa nem todas valem para as formas canônicas de Bi-implicação. Tomando as definições de t-norma, t-conormas, implicação nebulosa e negação nebulosa constatamos que as formas canônicas apresentaram em comum a propriedade comutatividade (B1), além claro da propriedade mínima: que se comporte como a bi-implicação clássica nos extremos (B0). As outras propriedades dependem da forma em que foi definida a bi-implicação em função dos outros conectivos e das propriedades extras dessas funções. Apenas a primeira forma canônica foi capaz de apresentar uma noção de similaridade pois as propriedades B5 e B6 se verificaram nela. Logo, a primeira forma canônica é a generalização que o trabalho reconhece como a mais indicada para aplicações práticas.

As três primeiras propriedades se mostraram verdadeiras para as quatro formas canônicas, o que nos leva a sugerir que B1, B2 e B3 sejam tratadas como as propriedades mínimas que uma bi-implicação nebulosa deveria satisfazer, conforme apresentado no capítulo 4. As propriedades B4 e B10 foram confirmadas para algumas formas canônicas por tanto não são essenciais.

A bi-implicação nebulosa baseada na t-norma de Lukasiewicz apresentou como resultado da função ser “0” ou “1”, mesmo para diferenças menores que outras devido a propriedade nilpotência desta t-norma. Sendo assim temos bi-implicações não monotônicas.

A pesquisa não esgotou as possibilidades de informações que podem ser obtidas sobre este assunto. Propriedades como B7, B8 e B9 não puderam ser verificadas apenas com as propriedades propostas para as t-normas, t-conormas, implicação nebulosa e negação nebulosa. É possível que para classes de funções ainda não estudadas elas se verifiquem. A possibilidade de usar t-normas distintas para uma forma canônica ainda merece ser estudado num trabalho futuro sobre a bi-implicação.

6 REFERÊNCIAS

[1] ROYCHOWDHURY, S.; PEDRYCK, W. *.An alternative characterization of fuzzy complement functional.* Soft Computing 7 (2003) 563-565. Springer-Verlag 2003.

[2] SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. *Associative functions and abstract semigroups*. Publ. Math. Debrecen, 10:69-81, 1963

[3] SHI, Y.; RUAN, D.; KERRE, E.E. *On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I(x,y) = I(x,I(x,y))$.* **Information Sciences**, 2007.

[4] KLEMENT, Erich Peter; MESIAR, Radko; PAP, Endre. *Triangular Norms.* Trends in logic – Studia Logica Library. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, 2000.

[5] BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. *On the characterizations of (S,N)-implications generate from continuous negations*, In: PROC. 11th CONF. INFORMATION PROCESSING AND MANAGEMENT OF UNCERTAINTY IN KNOWLEDGE-BASED SYSTEM, Paris, France, pp. 436-443, 2006.

[6] BEDREGAL, Benjamín R.C.; SANTIAGO, R.H.N.; CANUTO, Anne M.P. Canuto. *A normal form which preserves 1-tautologies and 0-contradictions in a class of residuum-based propositional fuzzy logics*. In: IEEE PROCEEDING OF INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEM (Fuzz-IEEE 2004), 2004, Budapest. IEEE, 2:647-652, 2004.

[7] KLEMENT, Erich Peter; NAVARA, Mirko. *Survey on different triangular norm based fuzzy logics*. **Fuzzy Sets and Systems** 101:241_251. 1999.

[8] KLEMENT, Erich Peter; MESIAR, Radko; PAP, Endre. *Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties.* **Fuzzy Sets and Systems** 143: 5–26, 2004.

[9] BEDREGAL, Benjamín R.C.; CRUZ, Anderson Paiva. *A characterization of classic-like fuzzy logics*. Submetido a JLC.

[10] MESIAR, Radko; NOVÁK, V. *Operating fitting triangular-norm-based biresiduation*. **Fuzzy Sets and Systems**, 104:77–84, 1999

[11] BEDREGAL, Benjamín R.C.; CRUZ, Anderson Paiva. *A Characterization of Classic-Like Fuzzy Semantics*, Department of Informatics and Applied Mathematics, Laboratory of Logic and Computational Intelligence, Federal University of Rio Grande do Norte, Natal, Brazil. 2005.

[12] BEDREGAL, Benjamín R.C.; CRUZ, Anderson Paiva. *Propositional Logic as a Propositional Fuzzy Logic* Department of Informatics and Applied Mathematics Laboratory of

Logic and Computational Intelligence. Federal University of Rio Grande do Norte, Natal, Brazil. 2005.

[13] BUSTINCE, H.; BARRENECHEA E.; PAGOLA, M. *Restricted equivalence functions.* **Fuzzy Sets and Systems** 157: 2333 – 2346, 2006.

[14] TAKAHASHI, Adriana; BEDREGAL, Benjamín R.C. ***T-Normas, T-Conormas, Complementos e Implicações Intervalares.*** Departamento de Informatica e Matematica Aplicada (DIMAp), Laboratorio de Logica e Inteligencia Computacional (LabLIC), Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Campus Universitario, Lagoa Nova, 59078-970 Natal, RN, Brasil. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/tema/seletas/docs/v7/15-Ta-Be.pdf>. Acesso em: 02 maio 2007.

[15] BUSTINCE, H.; BURILO, P.; SORIA F. *Automorphisms, negations and implications operators*. **Fuzzy Sets and Systems**, 2002.

[16] FODOR, János C. *On fuzzy implication operators.* Computer Center, EOtvOs Lordmd University, H-1502 Budapest 112, P.O. **Fuzzy Sets and Systems** 42: 293-300, North-Holland, Hungary, 1991.

[17] YAGER, Ronald R. *On global requirements for implication operators in fuzzy modus ponens* Machine Intelligence Institute, Iona College, New Rochelle, **Fuzzy Sets and Systems,** NY, USA, July 1998.

[18] FODOR, János C. *Contrapositive symmetry of fuzzy implications.* Department of Computer Science, Egtvds Lorámd University, **Fuzzy Sets and Systems,** Budapest 112, Hungary, 1994.

[19] KLIR , George J.; YUAN, Bo. ***Fuzzy Sets and Fuzzy Logic****: Theory and Applications.* Upper Saddle River, New Jersey, 1995. 1 CD-ROM.

[20] DUBOIS, Didier; PRADE, Henri. ***Fuzzy Sets and Systems****: Theory and Applications.* Academic Press, INC. A Division of Harcourt Brace & Company, 1980. 1 CD-ROM.