Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada
Curso de Ciências da Computação

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA E À ADMINISTRAÇÃO FINANCEIRA INTERVALAR

Gabriella do Carmo Pantoja Duarte

Natal - RN
2007

GABRIELLA DO CARMO PANTOJA DUARTE

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA E À ADMINISTRAÇÃO FINANCEIRA INTERVALAR

Monografia apresentada à disciplina Relatório de Graduação, ministrada pela professora Anamaria Martins Moreira para fins de avaliação da disciplina e como requisito para a conclusão do curso de Ciências da Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientador: Prof. Dr. Benjamin René Callejas Bedregal

Natal - RN
2007

GABRIELLA DO CARMO PANTOJA DUARTE

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA E À ADMNISTRAÇÃO FINANCEIRA INTERVALAR

Monografia apresentada à disciplina Relatório de Graduação, ministrada pela professora Anamaria Martins Moreira para fins de avaliação da disciplina e como requisito para a conclusão do curso de Ciências da Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MONOGRAFIA APROVADA EM 28/11/2007

BANCA EXAMINADORA

Professor: Benjamin René Callejas Bedregal
UFRN

Administradora: Ivanosca Andrade da Silva
UFRN

Mestrando: Roque Mendes Prado Trindade
UFRN

Aos meus pais e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido a benção de nascer do amor dos meus pais e por ter me proporcionado a conclusão dessa etapa de minha vida.

Aos meus pais pelo amor, carinho, compreensão, respeito e confiança em mim creditados.

Ao meu orientador Prof. Benjamin René Callejas Bedregal pela paciência e incentivo, sempre transmitindo conhecimentos valiosos e dando apoio e motivação que tornaram possível a conclusão desta monografia.

A todos os professores com os quais tive a oportunidade e o prazer de aprender e que contribuíram, decisivamente, para a minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

Aos colegas de graduação por terem me aturado todos os dias, inclusive domingos e feriados (dia e noite) passados no DIMAP para a conclusão de nossos trabalhos. Pelas risadas, discussões, conselhos, enfim, pelos diversos momentos vividos e pelo importantíssimo elo de amizade formado.

Aos meus amigos Allysson e Rubim por me ajudarem a esclarecer dúvidas surgidas durante a concretização do presente trabalho.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta monografia.

RESUMO

O seguinte trabalho apresenta um estudo de como aplicar os conceitos da matemática intervalar, uma teoria cujo foco é o tratamento de imprecisões, a alguns conceitos introdutórios de fundamental importância da matemática financeira, ferramenta imprescindível na análise de gestão empresarial. Aborda as razões pelas quais a matemática intervalar é considerada tão importante, bem como suas características e definições, além de mostrar como sua aderência aos conceitos financeiros pode servir para o aprimoramento de resultados empresariais. Estabelece os objetivos da matemática financeira e explicita alguns de seus principais conceitos. Finaliza com as conclusões sobre o trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Palavras-chave: matemática financeira intervalar, matemática intervalar, matemática financeira, administração financeira.

ABSTRACT

This work presents a study of how to apply the concepts of interval mathematics, a theory whose focus is the treatment of inaccuracies, to some introductory and important concepts of the financial mathematics, essential tool in the analysis of business management. It explains why interval mathematics is so important, as well as its characteristics and its definitions. Also, it makes emphasis to the importance of interval mathematics application in the financial mathematics and shows how it can serve for the improvement of business results. It establishes the objectives of the financial mathematics and shows its main concepts. It finishes with the conclusions about this subject and suggestions for researches in future.

Keywords: interval mathematics, financial mathematics, financial administration.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

max	Máximo em relação a um conjunto de números reais
min	Mínimo em relação a um conjunto de números reais
amp	Amplitude de um intervalo
med	Ponto médio de um intervalo
dist	Distância entre dois intervalos
Dom	Domínio da função
CD	Contra-domínio da função
IR	Conjunto dos intervalos de números reais
R	Conjunto dos números reais
f	Função
F	Extensão intervalar
CIR	Representação canônica intervalar
$\rightarrow$	Implica
$\in$	Pertence
$\notin$	Não Pertence
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\wedge$	E
$\subseteq$	Está contido ou igual a
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\pm$	Mais ou menos
$\sum$	Somatório
C	Capital
n	Número de períodos
i	Taxa unitária de juros
j	Juros simples

J	Juros compostos
r	Taxa percentual de juros
q	Número de períodos de capitalização
PV	Valor presente
FV	Valor futuro
M	Montante
E	Entrada de caixa
S	Saída de caixa
i_f	Taxa efetiva
i_q	Taxa equivalente
I	Taxa de Inflação
P	Índice de preço do produto
D_r	Desconto racional
V_r	Valor descontado
N	Valor nominal
D_c	Desconto comercial ou bancário
FC	Fluxo de caixa
VPL	Valor presente líquido
TIR	Taxa interna de retorno
CVL	Análise custo/volume/lucro
TMA	Taxa mínima de atratividade
PBs	*Payback* simples
PBd	*Payback* descontado
MC	Margem de contribuição
PE	Ponto de equilíbrio
MS	Margem de segurança
RT	Receita total
CV	Custos variáveis
DV	Despesas variáveis
CF	Custos fixos
MCu	Margem de contribuição unitária

VPI	Valor presente intervalar
VPLI	Valor presente líquido intervalar
PBIs	Payback simples intervalar
PBId	Payback descontado intervalar
MCIu	Margem de contribuição unitária intervalar
PEI	Ponto de equilíbrio intervalar

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

O sucesso de um processo de tomada de decisão consiste na capacidade de antecipar os acontecimentos futuros. Tal processo reflete a essência da dinâmica empresarial, na qual o êxito de qualquer negócio depende da qualidade das decisões tomadas por seus administradores nos vários níveis organizacionais. As decisões nesses processos são tomadas a partir de dados e informações levantados a partir do comportamento do mercado e do desempenho interno da empresa. Entretanto, esse processo decisório assume certas complexidades e riscos, uma vez que vigora em um ambiente de incertezas. Desequilíbrios nas taxas de juros, competitividade acirrada, desajustes de mercado, dentre outros fatores exigem uma maior capacidade analítica das unidades decisórias com relação aos riscos que corre uma empresa.

Tem-se a matemática financeira como uma forte aliada no auxílio da maximização e qualificação de resultados empresariais. No entanto, apurar de modo exato e, conseqüentemente, seguro os custos de uma empresa torna-se uma tarefa difícil, devido à imprecisão e variabilidade dos fatores necessários para tal. Tradicionalmente, a incerteza na economia e nas finanças é descrita por modelos estatísticos. Essa descrição é a base da matemática financeira atual. Entretanto, em muitos casos seria mais viável obter uma solução contida em um intervalo, uma vez que nem sempre é possível se ter conhecimento do valor exato com o qual se deve trabalhar. Assim, uma solução seria aplicar os conceitos da matemática intervalar, uma teoria cujo foco é o tratamento de imprecisões, aos conceitos da matemática financeira, ferramenta imprescindível na análise de gestão empresarial.

1.2 BREVE INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA INTERVALAR

A matemática intervalar surgiu no final da década de 50 com Ramon E. Moore [38] visando dar suporte a problemas que lidam com a incerteza. Os números representados como intervalos servem como controladores da propagação do erro, uma vez que garantem que a resposta correta de determinado problema pertence ao intervalo obtido. Muitos objetos imprescindíveis na resolução de problemas do dia-a-dia não são finitamente representáveis em máquinas, fazendo com que a solução para esses tipos de problemas se embase em aproximações que induzem a erros.

Existem três fontes de erros em computação numérica, sendo essas [34]: a propagação de erros de dados e parâmetros iniciais, erro de arredondamento e erro de truncamento. Na primeira fonte de erro, a representação de um fenômeno do mundo físico através de um modelo matemático raramente é descrita de forma correta, sendo necessárias várias simplificações do mundo físico a fim de se ter um modelo matemático com o qual se possa trabalhar. Algumas grandezas como temperatura, tempo, distância, etc. são obtidas de instrumentos com precisão limitada, fazendo com que a incerteza de tais parâmetros acarrete, posteriormente, na incerteza dos resultados. Logo, pode-se afirmar que a modelagem computacional de eventos físicos apresenta limitações em termos de confiabilidade dos parâmetros e dados utilizados, os quais são obtidos através de medições. A representação desses valores no sistema de ponto flutuante dos computadores digitais gera erros adicionais, uma vez que nem sempre os números são armazenados com exatidão. Surgem, assim, os erros de arredondamento e/ou truncamento, os quais estão presentes também na execução dos cálculos numéricos. Tais erros são tratados pela aritmética intervalar e pelos arredondamentos direcionados, que serão vistos mais adiante e garantem o controle rigoroso dos erros nos resultados de computações numéricas.

O *Míssil Patriot* em fevereiro de 1991, o acidente na plataforma *Sleipner* em agosto de 1991 e a explosão do foguete *Ariane5* em junho de 1996 são exemplos marcantes de problemas de representação. Tais catástrofes são resultado da limitação da máquina em não conseguir tratar os números em toda a sua extensão, posto que a representação do número real não pode ser feita de forma finita.

As principais idéias da matemática intervalar surgiram nos EUA com a dissertação de PhD de Ramon E. Moore , defendida em Stanford. Mais tarde, o centro das computações intervalares moveu-se para a Europa, principalmente para a Alemanha, lugar em que surgiu o primeiro jornal especializado em computação intervalar [4]. Atualmente, o interesse pela matemática intervalar é vasto e vigora em todo o mundo.

Várias áreas de interesse científico, tais como física, estatística, sistemas Fuzzy, bioinformática, computação gráfica, engenharia mecânica, engenharia química, mecânica quântica, dentre outras, dependem de cálculos mais precisos e são, dessa forma, grandes incentivadoras da teoria intervalar.

No Brasil, o uso de computações intervalares é cada vez mais freqüente, já tendo consistido, por exemplo, na análise de declive de regiões geográficas [2], na análise de calcificações em mamografias [32], na estimativa de carga de fluxo de potência em redes elétricas [6], análise de circuitos elétricos [19], dentre outros.

Nas áreas de economia e finanças, entretanto, a aplicação da matemática intervalar ainda é muito restrita, tendo poucos estudos relacionados ao assunto e se reduzindo a apenas algumas aplicações descritas em [27] e em [30]. Contudo, os resultados são bastante satisfatórios, o que leva à motivação de se explorar a aplicação da matemática intervalar nos cálculos empresariais.

1.3 OBJETIVOS

Com o intuito de obter melhores resultados nos cálculos empresariais, o presente trabalho tem como objetivo estudar de que modo podem-se aplicar os conceitos da matemática intervalar a alguns conceitos introdutórios da matemática financeira.

Para as empresas, a garantia de obter resultados cada vez mais seguros é imprescindível, uma vez que o almejo é sempre o maior lucro possível. Entretanto, como já foi mencionado, apurar de modo preciso os custos de uma empresa é, muitas vezes, inviável, devido à imprecisão de fatores necessários para tal apuração.

Dessa forma, a matemática intervalar torna-se um auxílio fundamental para a obtenção de cálculos mais seguros, visto que é permitido ao gestor empresarial conhecer o tamanho da incerteza com a qual ele se depara.

1.4 ABORDAGEM DOS CAPÍTULOS

A organização deste trabalho é feita de forma a conduzir o leitor a compreender a idéia da matemática intervalar e a importância de conectá-la aos conceitos da matemática financeira atual.

No capítulo 1, foi apresentada a motivação para se unir a matemática intervalar à matemática financeira, seguida de uma breve introdução à matemática intervalar, enfocando, sucintamente, sua idéia principal e a importância de seu estudo.

No capítulo 2, serão apresentadas as razões de sua importância, fazendo-se uma comparação com o sistema de ponto flutuante existente nos computadores atuais. Ainda nesse capítulo, serão abordadas as definições básicas da matemática intervalar, como se dão as operações aritméticas para intervalos e algumas definições do conjunto dos intervalos de reais. Além disso, é apresentada a definição de extensões intervalares.

O capítulo 3, por sua vez, visa estabelecer a importância da matemática financeira e seus conceitos básicos mais utilizados.

No capítulo 4, serão aplicados os conceitos da matemática intervalar a alguns conceitos introdutórios de máxima importância da matemática financeira tradicional.

Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões obtidas durante a realização do trabalho e a proposta para trabalhos futuros na área.

2 MATEMÁTICA INTERVALAR

2.1 RAZÕES DE SUA IMPORTÂNCIA

Dentre os fatores de maior importância na computação de cálculos numéricos encontra-se a precisão dos resultados. Ou seja, o objetivo é a obtenção de valores cada vez mais precisos e com o menor erro possível. Pode-se afirmar que a representação dos números reais no sistema de ponto flutuante dos computadores não é exata, visto que a representação do número real não pode ser feita de modo finito. A exatidão dos resultados pode ser comprometida quando se projeta o espaço contínuo do mundo real para o espaço discreto da notação de ponto flutuante [15].

A matemática intervalar tem por objetivo responder à questão da exatidão e da eficiência que aparece na prática da computação de cálculos numéricos. Sua utilização consiste no controle rigoroso da propagação dos erros dos dados e parâmetros iniciais ao longo do processo computacional provocada por sucessivos erros de arredondamentos e/ou truncamentos.

2.1.1 Intervalo x Ponto Flutuante

O sistema de ponto flutuante dos computadores atuais não é capaz de representar exatamente os números reais, tampouco os resultados de operações com esses números. Além disso, “como um sistema algébrico, suas características e propriedades algébricas são extremamente pobres quando comparadas com as do sistema de números reais.” [18].

A representação de um número em ponto flutuante apresenta diversas desvantagens, dentre elas [26]:

- Ausência de controle de erros nas computações numéricas, fato que, muitas vezes, proporciona resultados errôneos com a aparência de serem corretos. Isto é, o procedimento é realizado corretamente, entretanto o resultado perde o significado em virtude da inexatidão da representação numérica e de arredondamentos e/ou truncamentos aplicados nas operações.

- Ausência de métodos responsáveis por julgar ou estabelecer a qualidade dos resultados gerados por operações em ponto flutuante. Ou seja, ausência de validação dos resultados.

- A variedade de sistemas existente em ponto flutuante disponíveis no mercado, o que acarreta no fato de que cálculos efetuados em máquinas distintas proporcionam resultados distintos.

Dessa forma, como o computador é uma máquina finita, ele é capaz de representar somente uma aproximação finita do número real. Caso não são sejam tomados cuidados especiais, um algoritmo numérico implementado em um computador pode produzir aproximações da solução com pouca ou nenhuma exatidão [26].

Atualmente, os computadores modernos desempenham as operações básicas em ponto flutuante com um alto grau de exatidão, no entanto, os resultados de algumas computações podem se apresentar de maneira demasiadamente errônea. Um exemplo disso é apresentado a seguir [26]:

$$10^{50} + 812 - 10^{50} + 10^{35} + 511 - 10^{35} = 1323 \qquad (1)$$

Ao somar esses números da direita para a esquerda, a maioria dos computadores irá retornar zero como resultado. Tal erro ocorre devido ao fato de o formato do ponto flutuante desses computadores não ser apto a operar com um grande intervalo de dígitos requeridos para esse cálculo.

Outro exemplo é a expressão [15]:

$$\frac{1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832}{107751} \tag{2}$$

Em que x = 192119201 e y = 35675640.

Quando calculado em um ambiente de programação comum, o resultado da expressão, ao substituir os valores de x e y, é o valor 0.0077215. No entanto, o valor correto seria 1783.

Um outro exemplo mais famoso é o seguinte [52], em que:

$$y = 333.75b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5.5b^8 + \frac{a}{2b} \tag{3}$$

Sendo a = 77617.0 e b = 33096.0.

Rump [52] computou essa função em um IBM S/370 e usou precisões aritméticas simples, dupla e estendida, cujos resultados foram os seguintes:

a. Precisão simples : y = 1.172603... ;
b. Precisão dupla : y = 1.1726039400531... ;
c. Precisão estendida : y = 172603940053178... ;

Esses resultados levam à falsa conclusão de que o IBM S/370 fez os cálculos corretamente. Na verdade, esses resultados estão demasiadamente incorretos, uma vez que o resultado ideal está no intervalo:

$$- 0.82739605994682135 \pm 5 \times 10^{-17} \quad (4)$$

Todos esses exemplos nos levam a crer que a computação em ponto flutuante pode ser extremamente perigosa, principalmente se for levado em consideração que vidas podem depender de aplicações computacionais que levam a resultados incorretos, como o que ocorreu, por exemplo, com o *Míssil Patriot*, com a plataforma *Sleipner* e com o foguete *Ariane5*.

Com isso, o uso da matemática intervalar torna-se uma forte alternativa na resolução de problemas caracterizados pela falta de exatidão.

São listadas, a seguir, algumas funcionalidades em que o intervalo se sobressai em relação ao ponto flutuante [20]:

- **Na garantia de que os resultados computados estão corretos**: os intervalos apresentam a garantia de que a resposta matematicamente correta está contida no intervalo obtido. No sistema de ponto flutuante não há informação a respeito de sua exatidão.

- **Na resolução de problemas de otimização global**: no sistema de ponto flutuante não se pode provar, geralmente, que o mínimo ou o máximo encontrado é o mínimo ou máximo global. Para isso, seriam necessárias computações exaustivas do valor da função para cada entrada. Os intervalos, por sua vez, excluem subespaços os quais não contêm o mínimo ou máximo local. Além disso, não há necessidade de inúmeros refinamentos.

- **No fato de suportar corretamente a re-ordenação de computações:** no sistema de ponto flutuante, (a + b) + c não é, necessariamente, igual a: a + (b + c). Por exemplo, tomando-se a = 1020, b = 1 e c = -1020 em algum sistema com padrão IEEE 754 de aritmética do ponto flutuante. A primeira expressão resulta em exatamente zero (0), enquanto que a segunda resulta em exatamente um (1). Em conseqüência disso, os compiladores são inibidos a realizarem muitas transformações algébricas, as quais melhorariam o desempenho (ou a exatidão), em virtude da diferença nos resultados. Em contraste, o intervalo pode ter diferentes extremos, mas nele sempre estará contido o resultado correto.

- **Na distinção entre falhas no fluxo de controle do programa e falhas numéricas do programa:** no sistema de ponto flutuante, mudanças no sistema de um computador podem alterar os resultados de certas operações. Um algoritmo diferente, um compilador diferente, um processador diferente, ou até um sistema operacional diferente pode acarretar nessa alteração. Quando os resultados numéricos diferem, não há maneira de saber se isso ocorreu devido a uma falha existente na lógica ou simplesmente devido à variação normal inerente ao sistema de ponto flutuante. Com intervalos, funcionamentos diferentes que exigem computar a mesma coisa, devem sempre gerar intervalos sobrepostos. Se não ocorrer a sobreposição, então há um erro na lógica, ou até mesmo um erro de hardware.

2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

2.2.1 A Reta Real

A **reta real R** é a representação geométrica do conjunto de todos os números reais, providos de suas operações aritméticas: soma, subtração, produto, inverso e quociente. A representação dos pontos da reta real é dada através de letras latinas minúsculas, como *a*, *b*, *c*, etc. A figura a seguir mostra tal representação.

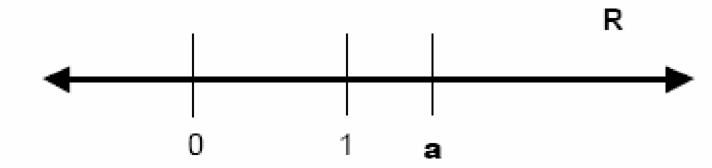

Figura 2.1: A reta Real

2.2.2 Intervalo de Números Reais

Um intervalo de reais é uma representação da forma A = [*a*; *b*], em que *a* e *b* pertencem ao conjunto dos números reais R, e tal que $a \leq b$.

Logo, o conjunto $\{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$ é **um intervalo de números reais** ou simplesmente um **intervalo**.

$$A = [a; b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\} \quad (5)$$

Com essa definição, tem-se que um intervalo possui natureza dual: ora é visto como um conjunto de números reais, ora como um par de números reais.

Os pontos do conjunto dos intervalos de reais serão denotados por letras latinas maiúsculas, tais como A, B, C, etc.

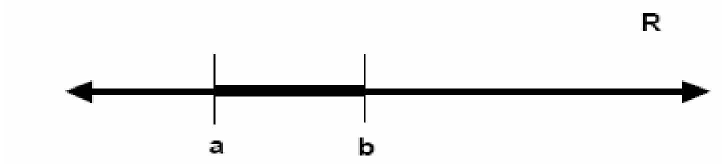

Figura 2.2: Um intervalo [*a*; *b*] na Reta Real R

Alguns exemplos de intervalos são A = [4; 9] , B = [-1; 7], C = [0; 1].

É importante observar que um intervalo A = [*a*; *b*] representa todos os números reais contidos nele.

Sabendo-se que um intervalo é representado por um par de elementos em que o primeiro elemento do par representa o limite inferior e o segundo, o limite superior, quando esses dois extremos são iguais, o intervalo é dito **degenerado**. Dessa forma, o intervalo [2; 2] apenas representa o número real 2, uma vez que o único elemento desse intervalo é o próprio número 2.

2.2.3 O Conjunto IR

Define-se o **conjunto IR** como sendo o conjunto de todos os intervalos reais, ou seja:

$$IR = \{[a; b] \ / \ a, b \in R, a \leq b\} \tag{6}$$

Assim, vale a seguinte cadeia de inclusões: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq IR$.

2.2.4 Igualdade entre Intervalos

A **igualdade entre intervalos** dá-se da seguinte maneira:

Sejam A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] dois intervalos de IR.
Então A = B se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. (7)

2.2.5 Ordem da Informação

Sejam dois intervalos A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*], a **ordem da informação** define que $[a; b] \sqsubseteq [c; d] \Leftrightarrow [a; b] \subseteq [c; d] \Leftrightarrow a \leq c$ e $d \leq b$ [36]. Dessa maneira, um intervalo passa a representar, não apenas um conjunto que contém um número real *x*, mas também um conjunto que informa sobre *x*.

Exemplo: A relação [3; 4] $\sqsubseteq$ [π; π] determina que o intervalo [3; 4] informa sobre π.

2.2.6 Ordem de Inclusão

Sejam dois intervalos A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*], a **ordem de inclusão** define que [*a*; *b*] ≤ [*c*; *d*] ⇔ *c* ≤ *a* e *b* ≤ *d* [36].

2.2.7 Ordem de Kulisch-Miranker

Sejam dois intervalos A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*], a **ordem de Kulisch-Miranker** define que [*a*; *b*] $\leq_k$ [*c*; *d*] ⇔ ∀*x* ∈ [*a*; *b*] ∃*y* ∈ [*c*; *d*], *x* ≤ *y* ∧ ∀*y* ∈ [*c*; *d*] ∃*x* ∈ [*a*; *b*], *x* ≤ *y* ⇔ *a* ≤ *c* e *b* ≤ *d* [36].

2.3 OPERAÇÕES ARITMÉTICAS EM IR

Sejam A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] ∈ IR, as operações aritméticas com intervalos são executadas sobre os extremos de seus intervalos.

2.3.1 Soma Intervalar

Sejam dois intervalos reais A e B ∈ IR, em que A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*]. Define-se a soma de A com B como sendo:

$$A + B = [a; b] + [c; d] = \{x + y \,/\, x \in [a; b] \wedge y \in [c; d]\} \quad (8)$$

E a soma de A com B é dada por:

$$A + B = [(a + c); (b + d)] \quad (9)$$

Exemplo: Sejam os intervalos A = [1; 2] e B = [3; 4]. Tem-se que A + B = [(1 + 3); (2 + 4)] = [4; 6]. A figura a seguir demonstra graficamente a disposição dos intervalos A e B e sua soma intervalar.

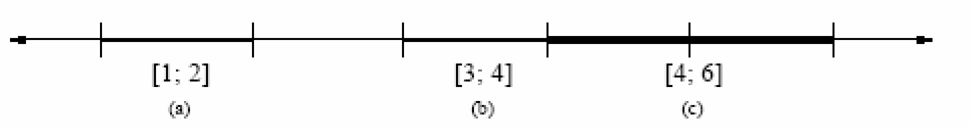

Figura 2.3: (a) Intervalo A = [1; 2]; (b) Intervalo B = [3; 4]; (c) Intervalo A + B = [4; 6].

2.3.1.1 Propriedades Algébricas da Soma

Sejam A, B e C intervalos reais $\in$ IR. As seguintes propriedades algébricas se aplicam à soma de intervalos em IR:

Fechamento: Se A $\in$ IR e B $\in$ IR, então A + B $\in$ IR;
Associatividade: A + (B + C) = (A + B) + C;
Comutatividade: A + B = B + A;
Elemento Neutro: $\exists$ 0 = [0; 0] $\in$ IR, tal que A + 0 = 0 + A = A.

2.3.2 Pseudo-Inverso Aditivo

Seja A $\in$ IR um intervalo de números reais, em que A = [a; b]. Define-se o pseudo-inverso aditivo de A como sendo:

$$- A = \{- x \,/\, x \in A\} \quad (10)$$

E o pseudo-inverso aditivo de A é dado por:

$$- A = [-b; -a] \quad (11)$$

O pseudo-inverso aditivo é assim chamado devido ao fato de nem sempre a igualdade A – A = 0 ser verdadeira. Por exemplo, seja um intervalo A = [0; 2], conseqüentemente – A = [-2; 0]. Assim, A – A = [-2; 2] ≠ [0; 0], porém [0; 0] $\subseteq$ A – A. É importante ressaltar que A – A = [0; 0] se, e somente se, A é um intervalo degenerado.

2.3.3 Subtração Intervalar

Sejam dois intervalos de números reais A, B $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*]. Define-se a subtração de A com B como sendo:

$$A - B = [a; b] - [c; d] = \{x - y \,/\, x \in [a; b] \wedge y \in [c; d]\} \qquad (12)$$

E a subtração de A com B é dada por:

$$A - B = A + (-B) = [(a - d); (b - c)] \qquad (13)$$

Exemplo: Sejam A = [3; 9] e B = [-1; 4]. Tem-se A – B = [(3 – 4); 9 + (-1)] = [-1; 8].

2.3.4 Multiplicação Intervalar

Sejam dois intervalos de números reais A, B $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*]. Define-se a multiplicação de A com B como sendo:

$$A * B = [a; b] * [c; d] = \{x * y \,/\, x \in [a; b] \wedge y \in [c; d]\} \qquad (14)$$

E a multiplicação de A com B é dada por:

$$A * B = [min(a*c, a*d, b*c, b*d); max(a*c, a*d, b*c, b*d)] \qquad (15)$$

Exemplo: Sejam os intervalos A = [-1; 3] e B = [2; 4]. Tem-se que A * B = [*min*((-1)*2, (-1)*4, 3*2, 3*4); *max*((-1)*2, (-1)*4, 3*2, 3*4)] = [*min*(-2, **-4**, 6, 12); *max*(-2, -4, 6, **12**)] = [-4; 12].

2.3.4.1 Propriedades Algébricas da Multiplicação

Sejam A, B e C intervalos reais $\in$ IR. As seguintes propriedades algébricas se aplicam à multiplicação de intervalos em IR:

Fechamento: Se A $\in$ IR e B $\in$ IR, então A * B $\in$ IR;
Associatividade: A * (B * C) = (A * B) * C;
Comutatividade: A * B = B * A;
Elemento Neutro: $\exists$ 1 = [1; 1] $\in$ IR, tal que A * 1 = 1 * A = A;
Subdistributividade: A * (B + C) $\subseteq$ (A * B) + (A * C).

2.3.5 Pseudo-Inverso Multiplicativo

Seja um intervalo de número reais A $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*] e 0 $\notin$ A. Define-se o pseudo-inverso multiplicativo de A como sendo :

$$A^{-1} = \left\{ \frac{1}{x} \;/\; x \in A \right\} \tag{16}$$

E o pseudo-inverso multiplicativo de A é dado por:

$$A^{-1} = \frac{1}{A} = \frac{1}{[a;b]} = \left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a} \right] \tag{17}$$

Se *b* < 0 e *a* > 0, ou seja, o número zero não deve pertencer ao intervalo A.

É importante ressaltar que A * A^{-1} = [1; 1] se, e somente se, A é um intervalo degenerado.

2.3.6 Divisão Intervalar

Sejam dois intervalos de números reais A, B $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] com 0 $\notin$ B. Define-se a divisão de A por B como sendo:

$$\frac{A}{B} = \frac{[a;b]}{[c;d]} = \left\{\frac{x}{y} : x \in [a;b] \wedge y \in [c;d]\right\} \tag{18}$$

E a divisão de A por B é dada por:

$$\frac{A}{B} = \text{A * B}^{-1} \left[min\left(\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right); max\left(\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right)\right] \tag{19}$$

Sendo *c* > 0 ou *d* < 0.

Exemplo: Sejam A = [-4; 8] e B = [2; 4]. Tem-se que:

$$\frac{A}{B} = \left[min\left(\frac{(-4)}{4},\frac{(-4)}{2},\frac{8}{4},\frac{8}{2}\right); max\left(\frac{(-4)}{4},\frac{(-4)}{2},\frac{8}{4},\frac{8}{2}\right)\right] = [-2; 4]$$

2.4 DEFINIÇÕES EM IR

2.4.1 Intervalo Simétrico

Seja A um intervalo de números reais $\in$ IR. A é dito simétrico se – A = A.

Exemplos: [-2; 2], [0; 0], [-3; 3].

2.4.2 Amplitude de um Intervalo

A **amplitude** de um intervalo A $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*] é dada pela diferença dos seus limites inferior e superior, ou seja:

$$amp([a;\, b]) = b - a \geq 0. \tag{20}$$

Exemplo: Seja A = [-3; 4]. Então *amp*(A) = 4 – (-3) = 7.

2.4.3 Ponto Médio de um Intervalo

Seja A = [*a*; *b*] $\in$ IR um intervalo de números reais. Define-se o **ponto médio** do intervalo A como sendo o número real $\frac{a+b}{2}$.

Ou seja, $med(A) = med([a;\, b]) = \frac{a+b}{2}$. (21)

Exemplo: Seja A = [2; 8]. Então $med(A) = \frac{2+8}{2} = 5$.

2.4.4 Distância entre Intervalos

Sejam A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] dois intervalos de números reais $\in$ IR. Define-se a **distância** de A e B como sendo o número real não negativo *max*(|*a* – *c*|, |*b* – *d*|).

Ou seja, $dist(A,B) = dist([a;\, b], [c;\, d]) = max(|a - c|, |b - d|)$. (22)

Exemplo: Seja A = [4; 6] e B = [-1; 3].

Então *dist*(A, B) = *max*(|4 – (-1)|, |6 – 3|) = *max*(5, 3) = 5.

2.4.5 Módulo de um Intervalo

Seja A = [*a*; *b*] um intervalo de números reais ∈ IR. Define-se o **módulo** do intervalo A como sendo o número real não negativo *dist*(A, 0), o qual corresponde à distância de A ao zero.

Ou seja, $|A| = |[a; b]| = dist(A, 0) = max(|a|, |b|) \geq 0$. (23)

Exemplo: Seja A = [-1; 2]. Então $|A| = max(|(-1)|, |2|) = 2$.

2.5 FUNÇÃO INTERVALAR

2.5.1 Função

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma **função** *f* de X em Y é um subconjunto do produto cartesiano X × Y definido por:

$$\{(x, f(x)) \mathbin{/} x \in X, f(x) \in Y\}$$

de modo que para cada elemento *x* de X existe um único elemento *y* de Y tal que $y = f(x)$.

Notação: f : $X \rightarrow Y$
$X \rightarrow f(x) = y$

Toda função $f : X \rightarrow Y$ é constituída de três partes: **domínio** (conjunto X = Dom(*f*)) em que a variável livre *x* pode assumir qualquer valor, o **contra-domínio** (conjunto Y = CD(*f*)), em que a variável dependente *y* ou *f*(*x*) pode encontrar seus valores e a **lei de formação**, representada por *y* ou *f*(*x*), a qual equivale à fórmula que processa valores de X e encontra valores de Y.

2.5.2 Imagem de Função

Seja uma função $f : X \rightarrow Y$. Diz-se que a **imagem** de f é o conjunto $I(f) = f(X)$ formado pelos valores de $y = f(x)$ que f assume em todos os pontos de $x \in X$. Dessa forma :

$$I(f) = f(X) = \{y = f(x) \in Y / x \in X\} \tag{24}$$

2.5.3 Função Intervalar

Seja f : $X \rightarrow Y$ uma função.
$X \rightarrow F(X)$

Se $X = Dom(f) \subseteq IR$ e $Y = CD(f) \subseteq IR$, então diz-se que f é uma **função intervalar** de uma variável intervalar.

Exemplo: $f : IR \rightarrow IR$
$X \rightarrow F(X) = [-1; 4] * X + [5; 8]$ é uma função intervalar.

É importante mencionar que em IR não vale a distribuidade da soma em relação à multiplicação, acarretando em uma dependência das funções intervalares em relação a sua expressão.

Por exemplo, sejam duas funções intervalares F(X) e G(X), em que:

$F(X) = [1; 3] * X^2 – [2; 3] * X + [-2; 1]$
$G(X) = X * ([1; 3] * X – [2; 3]) + [-2; 1]$

Para X = [1; 2], tem-se:
$F(X) = ([1; 3] * [1; 2]^2) – ([2; 3] * [1; 2]) + [-2; 1]$
$F(X) = ([1; 3] * [1; 4]) – [2; 6] + [-2; 1]$

F(X) = [1; 12] – [2; 6] + [-2; 1]

F(X) = [-5; 10] + [-2; 1]

F(X) = [-7; 11]

G(X) = [1; 2] * ([1; 3] * [1; 2] – [2; 3]) + [-2; 1]

G(X) = [1; 2] * ([1; 6] – [2; 3]) + [-2; 1]

G(X) = ([1; 2] * [-2; 4]) + [-2; 1]

G(X) = [-4; 8] + [-2; 1]

G(X) = [-6; 9]

Logo, para X = [1; 2], F(X) ≠ G(X). Assim, pode-se dizer que expressões diferentes, em alguns casos, representam funções diferentes.

2.5.4 Extensão Intervalar

A **extensão intervalar** é definida da seguinte forma [53]: uma função F : IR → IR é uma extensão intervalar de uma função f : R → R se para todo $x \in$ R, $F([x;x]) = [f(x); f(x)]$.

Exemplo: Seja $f(x) = 3x + x$ e um intervalo degenerado X = [2; 2] $\subseteq$ Dom(f) = R. Substituindo x real por X intervalo, tem-se : F(X) = [3; 3] * [2; 2] + [2; 2] = [6; 6] + [2; 2] = [8; 8]. Sabendo-se que $f(2) = 6 + 2 = 8$, então tem-se que $F([2; 2]) = [f(2); f(2)]$. Logo, F é uma extensão intervalar da função real f.

2.5.5 Inclusão Monotônica

A **inclusão monotônica** é definida da seguinte forma [53]: sejam A e B dois intervalos de números reais $\in$ IR, se A $\subseteq$ B, então F(A) $\subseteq$ F(B).

Tal propriedade é importante, uma vez que admite que quanto menor for o erro nos dados de entrada, menor será o erro do intervalo resultante.

2.5.6 Representação Intervalar

A **representação intervalar** (ou corretude) é definida da seguinte maneira [53]: uma função intervalar *F* é correta com respeito a uma função real *f* se satisfaz a seguinte propriedade:

$$x \in [a; b] \Rightarrow f(x) \in F([a; b]) \qquad (25)$$

2.5.6.1 Representação Canônica Intervalar

De acordo com Hickey [24], um sistema de aritmética intervalar ideal deve apresentar as seguintes propriedades: (1) Corretude; (2) Totalidade; (3) Fechamento; (4) Otimalidade; e (5) Eficiência.

Enquanto que a representação intervalar diz respeito à propriedade da corretude, a representação canônica intervalar (*CIR*), além da corretude, diz respeito à otimalidade, uma vez que sempre retorna o melhor intervalo contendo a imagem de *f*.

Teorema 2.5.6.1.1 [53]: Seja $f : R \rightarrow R$ uma função real. Se *f* é uma função real não-assintótica , então a função intervalar:

$$CIR(f)([a; b]) = [min\ f([a; b]); max\ f([a; b])]) \qquad (26)$$

é bem definida e é uma representação intervalar chamada **representação canônica intervalar** para *f*.

obs.: Uma função é dita assintótica se para qualquer intervalo [*a*; *b*], o conjunto $\{f(x) / a \leq x \leq b\}$ ou não tem *supremum* ou não tem *infimum.*

2.5.7 Funções Intervalares Básicas

2.5.7.1 Função Quadrado Intervalar

Seja um intervalo de números reais A $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*]. Define-se o quadrado de A como sendo:

$$A^2 = \{x^2 \,/\, x \in A\} \tag{27}$$

E o quadrado do intervalo A é dado por [54]:

$$F: \quad IR \rightarrow IR$$
$$A \rightarrow F(A)$$

$$\text{Em que } F(A) = A^2 = [a;\, b]^2 = \begin{cases} [a^2; b^2], se\ 0 \leq a \\ [b^2; a^2], se\ b < 0 \\ [0; max\ (a^2, b^2)], senão. \end{cases} \tag{28}$$

É importante observar que $A^2 \subseteq A * A$.

Exemplo: Seja A = [-1; 2]. Então A² = [-1; 2]² = [0; 4], entretanto A * A = [-1; 2] * [-1; 2] = [*min*((-1)*(-1), (-1)*2, 2*(-1), 2*2); *max*(((-1)*(-1), (-1)*2, 2*(-1), 2*2)] = [-2; 4] ≠ [0; 4]. Contudo, [0; 4] $\subseteq$ [-2; 4].

2.5.7.2 Função Potência Intervalar

Seja um intervalo de números reais A $\in$ IR, em que A = [*a*; *b*]. Define-se a função potência intervalar de A como sendo:

$$A^n = \{x^n \,/\, x \in A\} \tag{29}$$

E é dada por [40]:

F : IR → IR

A → F(A)

$$\text{Em que } F(\text{A}) = \text{A}^n = \begin{cases} [0; max(|a|,|b|)^n], se\ n\ é\ par\ e\ 0 \in A \\ [b^n; a^n], se\ n\ é\ par\ e\ b < 0 \\ [a^n; b^n], senão. \end{cases} \quad (30)$$

Exemplo: Seja A = [-2; 2]. Então A^3 = [-8; 8].

2.5.7.3 Função Ln Intervalar

Seja um intervalo de números reais A ∈ IR, em que A = [a; b]. A função Ln Intervalar de A é dada por [40]:

Ln : IR → IR

A → ln(IR)

Em que Ln(A) = Ln([a; b]) = [ln(a); ln(b)], com IR = {[a; b] ∈ IR/ b > 0}. (31)

Exemplo: Seja A = [1; e]. Então Ln(A) = Ln([1; e]) = [ln(1); ln(e)] = [0; 1].

2.5.7.4 Função Raiz Quadrada Intervalar

Seja um intervalo de números reais A ∈ IR, em que A = [a; b] e 0 ≤ a. Define-se a função raiz quadrada intervalar de A como sendo:

$$\sqrt{A} = \{\sqrt{x} \ / \ x \in \text{A}\} \quad (32)$$

E é dada por [40]:

$$\sqrt{A} = \sqrt{[a;b]} = [\sqrt{a};\sqrt{b}] \tag{33}$$

Exemplo: Seja A = [16; 25]. Então $\sqrt{A}$ = $\sqrt{[16;25]}$ = [4; 5].

2.6 EXTENSÕES INTERVALARES

Na aritmética intervalar, algumas computações produzem intervalos cujos limites podem ser estreitos enquanto que outras podem produzir limites demasiadamente largos. Uma solução para a produção de limites melhores é rearranjar a expressão de modo que cada parâmetro do intervalo apareça somente uma única vez. Por exemplo, suponha a seguinte expressão:

$B = \dfrac{A}{(A-2)}$, em que B e A são intervalos de números reais $\in$ IR.

A expressão pode ser reorganizada de modo que a ocorrência de A seja diminuída:

$$B = 1 + \frac{2}{(A-2)} \tag{34}$$

Dessa forma, a expressão reorganizada origina um resultado mais estreito do intervalo de saída B.

Isso ocorre devido ao fato de A não representar um único número real apenas, mas sim o conjunto de todos os números reais contidos nele. Em relação aos cálculos, a computação do intervalo B na expressão não rearranjada equivale a encontrar a escala dos valores de uma função de duas variáveis independentes. Ou seja, essa equação poderia ser reescrita como $B = \dfrac{A1}{(A2-2)} = \dfrac{[a_1;b_1]}{([a_2;b_2] - [2;2])}$. Nesse caso, o intervalo A1 pode estar em seu valor máximo enquanto que A2 pode estar em seu valor mínimo [57].

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dentre as várias definições, a **matemática financeira**, segundo [17], "é a ciência que estuda o dinheiro no tempo". Avalia-se a maneira como esse dinheiro está sendo ou será empregado a fim de maximizar um resultado, o qual se espera que seja positivo. Com as ferramentas adequadas pode-se também comparar entre duas ou mais alternativas, aquela que mais benefícios trará, ou menos prejuízo acarretará. Na economia atual, dita globalizada, não se concebe qualquer projeto, seja de que área, em que o aspecto financeiro não seja um dos mais relevantes para sua execução.

Um exemplo do cotidiano é a decisão de comprar uma televisão em 10 vezes "sem juros" ou poupar o dinheiro para que o mesmo produto seja comprado à vista. O dilema é como avaliar monetariamente tal decisão. Dessa forma, a matemática financeira ocupa-se em estudar e fornecer as ferramentas adequadas para que a tomada de decisão seja feita com a maior segurança possível.

Se na vida pessoal as decisões financeiras que tomamos são passíveis de nos afetar durante um longo período de tempo, na vida de uma empresa, por sua vez, qualquer decisão tomada erroneamente pode ser fatal, posto que seu faturamento, na maioria das vezes, é bastante superior à renda de uma família. É importante observar que essas decisões são, basicamente, as mesmas. Contudo, os fatores distintivos são os efeitos e o grau de precisão com os quais os cálculos são efetivados.

Assim, instituições financeiras, tais como bancos, seguradoras, fundos de investimentos, dentre outras, vêm demonstrando cada vez mais interesse em aprofundar os estudos sobre como se obter o maior lucro possível usando como ferramenta a matemática financeira.

3.1 ELEMENTOS BÁSICOS

A seguir serão apresentados os elementos básicos da matemática financeira a fim de se elucidar um melhor entendimento sobre o assunto, sendo os termos mais comumente usados nos relacionamentos financeiros:

Capital: o capital é o valor aplicado através de alguma transação financeira. Também conhecido como Principal, Valor Atual, Valor Presente ou Valor Aplicado. Entretanto sua maior importância não é a maneira como é chamado, mas sim o fato de que é sobre ele que incidirão os encargos financeiros, também conhecidos como juros.

Juros: juros representam a remuneração do capital empregado em alguma atividade produtiva. Receber uma quantia hoje ou no futuro não é, evidentemente, a mesma coisa. Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por certo período de tempo envolve um sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros [59]. Os juros podem ser capitalizados segundo os regimes de juros simples ou juros compostos.

Montante: montante é a soma do capital com os juros. Pode também ser chamado de Valor Futuro (capital empregado mais à soma dos juros no tempo correspondente).

As notações mais utilizadas nos relacionamentos financeiros são:

C	capital
n	número de períodos (dias, meses, anos, nº de parcelas)
J	juros decorridos **n** períodos
r	taxa percentual de juros
i	taxa unitária de juros (**i = r/100**)

PV	principal ou valor atual
M	montante de capitalização simples
FV	montante de capitalização composta

Tabela 3.1: notações mais utilizadas nos relacionamentos financeiros.

3.2 COMPATIBILIDADE DE DADOS

Nas fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem, necessariamente, estar expressos na mesma unidade de tempo.

É imprescindível para o uso de fórmulas financeiras que se transforme a taxa de juro para o intervalo de tempo definido pelo prazo da operação, ou vice-versa, o que for considerado mais apropriado para os cálculos. Somente após a definição do prazo e da taxa de juro na mesma unidade de tempo é que as formulações da matemática financeira podem ser operadas [5].

3.3 JUROS SIMPLES

Os **juros simples** são proporcionais ao tempo decorrido e incidem apenas sobre o capital inicial.

O valor dos juros simples é calculado a partir da seguinte expressão:

$$J = C * i * n \tag{35}$$

Em que: J = valor dos juros expresso em unidades monetárias;
C = capital;
i = taxa de juros, expressa em sua forma unitária;
n = prazo.

Exemplo: Um capital de R$80.000,00 é aplicado à taxa de 2,5% ao mês durante um trimestre. Para determinar o valor dos juros acumulado nesse período:

C = R$80.000,00	n = 3 meses
i = 2,5% ao mês (0,025)	J = ?

$J = C * i * n$

J = 80.000 * 0,025 * 3

J = R$6.000,00

3.3.1 Juro Exato e Juro Comercial

Nas operações com juros simples, é comum que os bancos comerciais adotem uma convenção diferente para a contagem do prazo. Assim, o número de dias pode ser definido de duas maneiras:

a. Tempo exato: é utilizado o calendário do ano civil com 365 dias, gerando **juros exatos**;

b. Tempo comercial: o mês é admitido com 30 dias e o ano com 360 dias, gerando **juros comerciais** ou **ordinários**.

Por exemplo, 12% ao ano equivale à taxa diária de:

a. Juro Exato: 0,12/365 = 0,032877% ao dia;
b. Juro Comercial: 0,12/360 = 0,033333% ao dia.

Logo, o juro comercial é ligeiramente superior ao exato.

3.4 MONTANTE SIMPLES

Um determinado capital, quando aplicado a uma taxa periódica de juros por determinado tempo produz um valor acumulado denominado montante, e identificado em juros simples por M. Logo, o montante M é a soma do capital aplicado com os juros gerados:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{J} \tag{36}$$

No entanto, sabe-se que: $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{C} * \boldsymbol{i} * \boldsymbol{n}$

Assim, fazendo-se $M = C + C * i * n = C * (1 + i * n)$, tem-se que:

$$\boldsymbol{M = C * (1 + i * n)} \tag{37}$$

Exemplo: Um capital de R\$1.000,00 é aplicado à taxa de 2% ao mês durante um trimestre. Para determinar o valor do montante ao final desse período:

C = R\$1.000,00
i = 2% ao mês (0,02)
n = 3 meses
$J = C * i * n$ = 1.000 * 0,02 * 3 = R\$60,00
M = ?

$M = C + J$ = 1.000 + 60 = R\$1.060,00

3.5 JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital, formando o montante do período. Esse montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante (constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores), e assim por diante [5]. Assim, temos que:

Instante	Capital inicial	Montante
0	C	C
1	C_1	$C_1 = C + J = C + Ci = C(1 + i)$
2	C_2	$C_2 = C_1 (1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	C_3	$C_3 = C_2 (1 + i) = C(1 + i)^2 (1 + i) = C(1 + i)^3$
...	...	...
n	$C_n = M$	$C_n = M = C(1 + i)^n$

Tabela 3.2: dedução da fórmula envolvendo valores futuro e presente.

Dessa forma, podemos deduzir:

$$\boldsymbol{FV = PV * (1 + i)^n} \text{ ou } \boldsymbol{PV = \frac{FV}{(1+i)^n}} \quad (38)$$

Em que: ***FV*** = valor futuro (montante);
PV = valor presente (capital);
i = taxa de juros, expressa em sua forma unitária;
n = prazo.

Sabe-se que o valor monetário dos juros é apurado pela diferença entre o montante (*FV*) e o capital (*PV*), podendo-se obter a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{J = FV - PV} \quad (39)$$

Mas como $FV = PV * (1 + i)^n$, tem-se que:

$$\boldsymbol{J = PV * [(1 + i)^n - 1]} \qquad (40)$$

Exemplo: Para determinar qual o montante (*FV*) e o juro (*J*) obtido no final de 4 meses por uma aplicação de R$1.000,00 em um banco que paga juros compostos à taxa de 5% ao mês:

$FV = PV * (1 + i)^n$
PV = R$1.000,00
$n = 4$
i = 5% ao mês (0,05)
FV = ?
J = ?

$FV = 1.000 * (1 + 0,05)^4$ = R$1.215,51
$J = FV – PV$ = 1.215,51 – 1.000,00 = R$215,51

3.6 FLUXO DE CAIXA

Sabe-se que a matemática financeira se preocupa com o estudo das relações dos movimentos monetários que se estabelecem ao longo do tempo. Tais movimentos são identificados temporalmente através de um conjunto de entradas e saídas de caixa definido como **fluxo de caixa**. Logo, o fluxo de caixa é um gráfico contendo informações sobre entradas e saídas de capital realizadas em determinados períodos.

Normalmente, um fluxo de caixa contém as entradas e as saídas de capital marcadas na linha de tempo com início no instante t=0. Um típico exemplo é o gráfico do fluxo de caixa de uma pessoa:

$\boldsymbol{E_k}$	E_o						
	↑						
t	0	1	2	3	...	n-1	n
		↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\boldsymbol{S_k}$		S_1	S_2	S_3	...	S_{n-1}	S_n

Tabela 3.3: fluxo de caixa – empréstimo bancário

Essa tabela representa um empréstimo bancário realizado por uma pessoa de forma que ela restituirá tal empréstimo em n parcelas iguais nos meses seguintes, representados na linha do tempo *t*. E_k é o valor que entrou no caixa da pessoa (recebimento) e S_k serão os valores das parcelas que sairão do caixa da pessoa (aplicação).

Exemplo: Uma pessoa pediu um empréstimo de R$10.000,00 hoje e pagará R$5.500,00 em 30 dias e R$6.500,00 em 60 dias.

10.000		
↑		
0	1	2
	↓	↓
	5.500	6.500

Tabela 3.4: exemplo de fluxo de caixa

3.7 TAXAS DE JUROS

Entende-se por taxa como sendo um índice numérico relativo cobrado sobre um capital para a realização de alguma operação financeira [59]. A seguir serão apresentadas as diversas formas de tratar as taxas de juros e serão definidas as seguintes taxas: nominal, efetiva, equivalente, taxa de inflação e taxa real.

3.7.1 Taxa Nominal

A **taxa nominal** é a que aparece nos contratos financeiros e ocorre quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquela ao qual a taxa está referida [37].

Exemplos:

a. 1000% ao ano com capitalização mensal;
b. 300% ao semestre com capitalização mensal;
c. 250% ao ano com capitalização trimestral.

A taxa nominal de juros relativa a uma operação financeira pode ser calculada através da seguinte fórmula [37]:

$$\textit{\textbf{Taxa Nominal (i)}} = \frac{\textit{\textbf{J}}}{\textit{\textbf{valor nominal do empréstimo}}} \qquad (41)$$

Exemplo: Um empréstimo de R$100.000,00 deve ser quitado ao final de um ano pelo valor monetário de R$150,000,00. A taxa nominal de juros é dada da seguinte forma:

Sabendo-se que $J = FV - PV$, tem-se que J = R$150.000,00 – R$100.000,00 = R$50.000,00.

E o valor nominal do empréstimo é de R$100.000,00.

Logo, $i = \dfrac{50.000}{100.000} = 0{,}50 = 50\%$.

3.7.2 Taxa Efetiva

A **taxa efetiva** é aquela que é apurada durante todo o prazo *n*, sendo formada exponencialmente através dos períodos de capitalização, ou seja, através dos intervalos de tempo em que os juros são agregados ao capital [5]. Em outras palavras, taxa efetiva é o processo de formação de juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização.

Exemplos:

a. 2% ao mês com capitalização mensal;
b. 300% ao ano com capitalização anual.

Nos exemplos, a unidade de tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

A taxa efetiva de juros pode ser obtida através da seguinte expressão [5]:

$$\textbf{\textit{Taxa Efetiva}}\ (i_f) = (1 + i)^q - 1 \qquad (42)$$

Em que q representa o número de períodos de capitalização dos juros.

Exemplo: Uma taxa de 3,8% ao mês determina um montante efetivo de juros de 56,44% ao ano, ou seja :

$i_f = (1 + 0{,}038)^{12} - 1 = 56{,}44\%$ ao ano.

3.7.3 Taxa Equivalente

Duas taxas são ditas **equivalentes** quando aplicadas a um mesmo capital e em um mesmo intervalo de tempo produzem o mesmo montante.

Exemplo: Em juros simples, um capital de R$500.000,00, se aplicado a 2,5% ao mês ou 15% ao semestre pelo prazo de um ano (12 meses), produz o mesmo montante. Ou seja:

R$500.000,00 * 0,025 * 12 = R$150.000,00
R$500.000,00 * 0,15 * 2 = R$150.000,00

A taxa equivalente pode ser calculada através da seguinte expressão [5]:

$$\textbf{\textit{Taxa Equivalente}} \ (i_q) = (1+i)^{\frac{1}{q}} - 1 \qquad (43)$$

Em que q é o número de períodos de capitalização.

Exemplo: Taxa mensal equivalente à taxa nominal de 12% ao ano :

q = 12 meses

$i_q = (1+0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}948879\%$ ao mês.

3.7.4 Taxa de Inflação

Inflação é o aumento generalizado de preços da economia, ou seja, em um determinado período de tempo, a inflação representa o aumento médio de preços. A **taxa de inflação** é medida através da seguinte expressão [5]:

$$\textbf{\textit{Taxa de Inflação}} \ (I) = \left(\frac{\Delta P}{P_0}\right) * 100\% = \left(\frac{P_1 - P_0}{P_0}\right) * 100\% \qquad (44)$$

Em que P é o índice de preço do produto.

Exemplo: Se em 1º de janeiro o preço de um produto é de R$500,00 e em 31 de dezembro do mesmo ano o preço do mesmo produto é R$700,00, de quanto foi a inflação no período?

O acréscimo no preço foi de R$200,00 e esse resultado corresponde à inflação. Logo:

R$500,00 -------- 100%
R$ 200,00 -------- *I* %

$$I = \left(\frac{700-500}{500}\right) * 100\% = \left(\frac{200}{500}\right) * 100\% = 40\%$$

A taxa de inflação é de 40%.

3.7.5 Taxa Real

A **taxa real** é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação, ou seja, denota um resultado apurado livre dos efeitos inflacionários [5]. Em outras palavras, representa o que se ganhou ou perdeu verdadeiramente, sem a interferência das variações verificadas nos preços. A relação da taxa real com a taxa nominal e com a taxa de inflação dá-se através da seguinte expressão [5]:

$$\textbf{\textit{Taxa Real}}\ (\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\mathbf{1} + \textbf{\textit{taxa nominal}}\ (\boldsymbol{i})}{\mathbf{1} + \textbf{\textit{taxa de inflação I}}}\right) - \mathbf{1} \qquad (45)$$

É importante observar que se a taxa de inflação for nula no período, isto é, *I* = 0, temos que as taxas nominal e real são coincidentes.

Exemplo: Numa operação financeira com taxas pré-fixadas, um banco empresta R$120.000,00 para ser pago em um ano com R$150.000,00. Sendo a inflação, durante o período do empréstimo, igual a 10%, as taxas nominal e real desse empréstimo são calculadas a seguir:

A taxa nominal é dada por:

$$i = \frac{(150.000 - 120.000)}{120.000} = \left(\frac{30.000}{120.000}\right) = 0{,}25$$

Como a taxa de inflação no período é: *I* = 10% = 0,10:

$$r = \left(\frac{1+0{,}25}{1+0{,}10}\right) - 1 = \left(\frac{1{,}25}{1{,}10}\right) - 1 = 0{,}1364 = 13{,}64\%$$

Entretanto, se a taxa de inflação *I* fosse igual a 30%, teria-se:

$$r = \left(\frac{1+0{,}25}{1+0{,}30}\right) - 1 = \left(\frac{1{,}25}{1{,}30}\right) - 1 = -0{,}0385 = -3{,}85\%$$

Ou seja, a taxa real seria negativa.

3.8 DESCONTOS

Desconto é o abatimento que se faz no valor de uma dívida quando ela é negociada antes da data de seu vencimento [37]. Notas promissórias, duplicatas e letras de câmbio são alguns dos documentos que atestam dívidas e são chamados de títulos de crédito.

Um exemplo é o fato de o proprietário de uma duplicata com vencimento em 20 de fevereiro de 2008 precisar de dinheiro em 20 de janeiro de 2008. Uma vez que a duplicata tem o valor e o vencimento determinados, não pode ser cobrada do devedor antes do vencimento. O proprietário resolve, então, “vender” o título de crédito (a duplicata) a uma instituição financeira, recebendo um valor menor do que aquele representado pela duplicata. Essa operação chama-se desconto.

O valor da duplicata é chamado **valor nominal** e representa o valor da data do vencimento; o valor líquido recebido da instituição financeira é o **valor atual** (ou valor descontado); e o desconto é a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

Sob outro ângulo, pode-se notar que o valor nominal corresponde ao valor futuro (montante), o valor atual ao valor presente (capital) e o desconto ao juro [25].

Desconto = Valor Nominal – Valor Descontado

As operações de desconto podem ser realizadas tanto sob o regime de juros simples como no de juros compostos. Em ambos os regimes são identificados dois tipos de desconto: desconto racional (ou "por dentro") e desconto comercial ou bancário (ou "por fora").

3.8.1 Desconto Simples

O desconto simples, como já foi dito, ocorre sob o regime de juros simples. O uso desse tipo de desconto é amplamente adotado em operações de curto prazo.

3.8.1.1 Desconto Racional Simples ("por dentro")

O **desconto racional** incorpora os conceitos e relações básicas de juros simples. Dessa forma, tendo-se D_r como sendo o valor do desconto racional, C o capital (ou valor atual), i a taxa periódica de juros e n o prazo do desconto (número de períodos que o título é negociado antes de seu vencimento), tem-se a seguinte expressão de juros simples [5]:

$$\boldsymbol{D_r = C * i * n} \qquad (46)$$

Pela própria definição de desconto, em que o desconto é o valor nominal menos o valor descontado, e introduzindo-se o conceito de valor descontado no lugar de capital no cálculo do desconto, tem-se [5]:

$$\boldsymbol{D_r = N - V_r} \qquad (47)$$

Em que N é o valor nominal e V_r é o valor descontado racional (ou valor atual) na data da operação.

Fazendo a referência aos cálculos de capital e montante simples em que: $M = C * (1 + i * n)$, sendo N o valor nominal correspondente ao montante M e o valor atual ou descontado V_r correspondente ao capital C, tem-se que [5]:

$$\boldsymbol{N = V_r * (1 + n * i)} \qquad (48)$$

E dessa maneira, substituindo na fórmula de desconto racional, obtém-se:

$$D_r = N - V_r = V_r * (1 + n * i) - V_r = V_r * i * n$$

Assim, a fórmula do desconto racional simples é dada através da expressão [5]:

$$\boldsymbol{D_r = V_r * i * n} \qquad (49)$$

Exemplo: Um título de valor nominal R$10.000,00 é descontado 4 meses antes do vencimento, à taxa de juros simples de 3% ao mês. O desconto racional simples é calculado a seguir:

N = R$10.000,00

i = 3 % ao mês (0,03)

n = 4 meses

Se $N = V_r * (1 + n * i)$, então $V_r = \frac{N}{(1+n*i)}$. Logo, $V_r = \frac{10.000}{(1+4*0{,}03)} = 8.928{,}57$

$D_r = N - V_r = 10.000 – 8.928{,}57 = 1.071{,} 43$

3.8.1.2 Desconto Bancário ou Comercial Simples (“por fora”)

Ao contrário dos juros “por dentro”, que calculam os encargos sobre o capital efetivamente liberado na operação, ou seja, sobre o valor presente (capital), o critério “por fora” apura os juros sobre o montante, indicando custos adicionais ao tomador de recursos.

A modalidade de desconto “por fora” é amplamente adotada pelo mercado, notadamente em operações de crédito bancário e comercial a curto prazo.

O valor do desconto bancário ou comercial D_c, no regime de juros simples é determinado pelo produto do valor nominal do título N, da taxa de desconto periódica “por fora” contratada na operação i e do prazo de antecipação definido para o desconto n.

Como $D_c = N - V_r$ e $V_r = N * (1 – i * n)$, tem-se que $D_c = N – N * (1 – i * n) = N * i * n$. Dessa maneira, o **desconto bancário ou comercial simples** pode ser calculado através da expressão [5]:

$$\boldsymbol{D_c = N * i * n} \qquad (50)$$

Exemplo: Utilizando o mesmo exemplo do tópico de desconto racional simples: Um título de valor nominal R$10.000,00 é descontado 4 meses antes do vencimento, à taxa de juros simples de 3% ao mês. O desconto bancário ou comercial simples é calculado a seguir:

N = R$10.000,00
i = 3 % ao mês (0,03)
n = 4 meses
$D_c = N * i * n = 10.000 * 0,03 * 4 = 1.200,00$.

É importante observar que o desconto bancário ou comercial é maior que o desconto racional simples para o mesmo exemplo. Se o desconto é maior, o valor entregue pelo banco ao dono do título no momento do resgate (Valor Descontado = Valor Nominal – Desconto) é menor do que seria sob o desconto racional.

3.8.2 Desconto Composto

O **desconto composto**, utilizado basicamente em operações de longo prazo, pode ser identificado em dois tipos: desconto racional composto (“por dentro”) e desconto bancário ou comercial composto (“por fora”).

3.9.2.1 Desconto Racional Composto (“por dentro”)

Como o desconto racional composto é estabelecido segundo as relações do regime de juros compostos, o valor descontado racional V_r equivale ao valor presente (capital) de juros compostos.

Dessa forma, fazendo referência à fórmula de capital em juros compostos, em que $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$, sendo o valor descontado V_r equivalente a *PV*, ou seja, ao capital e o valor nominal *N* equivalente a *FV*, ou seja, ao montante, tem-se que:

$$\boldsymbol{V_r = \frac{N}{(1+i)^n}} \tag{51}$$

Mas como $D_r = N - V_r = N - \frac{N}{(1+i)^n}$, colocando *N* em evidência, a fórmula do desconto racional composto é dada a seguir [5]:

$$\boldsymbol{D_r = N * \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)} \tag{52}$$

Exemplo: Uma pessoa deseja descontar uma nota promissória 3 meses antes de seu vencimento. O valor nominal desse título de crédito é de R$50.000,00. Sendo a taxa de desconto racional 4,5% ao mês, o valor do desconto racional composto é calculado a seguir:

N = R$50.000,00
i = 4,5% ao mês (0,045)
n = 3 meses

$$D_r = N * \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = 50.000 * \left(1 - \frac{1}{(1+0{,}045)^3}\right) = \text{R\$ } 6.185{,}17.$$

3.8.2.2 Desconto Comercial ou Bancário Composto (“por fora”)

O desconto comercial ou bancário composto caracteriza-se pela incidência sucessiva da taxa de desconto sobre o valor nominal do título de crédito, o qual é deduzido, em cada período, dos descontos obtidos em períodos anteriores.

O valor do desconto comercial ou bancário D_c, no regime de juros compostos é determinado pela seguinte expressão [5]:

$$\boldsymbol{D_c = N * [1 - (1 - i)^n]} \tag{53}$$

Em que N é o valor nominal do título, i é a taxa de desconto periódica “por fora” e n o prazo de antecipação definido para o desconto.

Exemplo: Utilizando o mesmo exemplo do tópico de desconto racional composto: Uma pessoa deseja descontar uma nota promissória 3 meses antes de seu vencimento. O valor nominal desse título de crédito é de R$50.000,00. Sendo a taxa de desconto comercial 4,5% ao mês, o valor do desconto comercial ou bancário composto é calculado a seguir:

N = R$50.000,00
i = 4,5% ao mês (0,045)
n = 3 meses

$D_c = N * [1 - (1 - i)^n] = 50.000 * [1 - (1 - 0{,}045)^3]$ = R$6.450,81

É importante observar que o desconto comercial ou bancário composto também é maior que o desconto racional composto. Se o desconto é maior, o valor entregue pelo banco ao dono do título no momento do resgate (Valor Descontado = Valor Nominal - Desconto) é menor do que seria sob o desconto racional.

3.9 ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

Diariamente, diretores, gestores e controladores têm a tarefa de tomar decisões a respeito de aspectos relacionados à empresa que dirigem. Muitas delas irão solucionar um grande problema, ao passo que outras dizem respeito ao cotidiano da empresa ou ao seu futuro imediato. Outras, ainda, estão relacionadas a investimentos, ou seja, em que aplicar o dinheiro hoje a fim de que a empresa se torne melhor no futuro. Algumas dessas decisões sobre investimentos podem ser chamadas de decisões estratégicas, uma vez que a lógica que as sustenta não é operacional ou rotineira, mas de longo prazo, visando tornar a empresa bem sucedida. Tais decisões implicam investir tempo, dinheiro e energia em um projeto ou empreendimento cujos resultados são desconhecidos, já que ocorrerão no futuro, isto é, em um ambiente de risco e/ou incerteza [45].

É imprescindível que uma tomada de decisão de investimento empresarial passe previamente por uma análise econômica, a qual pode atender os seguintes objetivos:

a. Definir, dentre vários projetos, o mais rentável;
b. Calcular a rentabilidade de um determinado projeto de investimento;
c. Determinar o volume mínimo de vendas que um projeto de investimento precisa gerar para que seja considerado rentável;
d. Definir o tamanho ideal de um projeto de investimento.

Dessa forma, a análise de investimentos visa permitir que o administrador financeiro tome a decisão ótima, isto é, aquela que maximiza a riqueza do investidor, considerando a vida útil do projeto envolvido.

Alguns métodos são utilizados para que seja feita essa análise de investimentos, sendo os mais utilizados o *Valor Presente Líquido* (*VPL*), a *Taxa*

Interna de Retorno (*TIR*), o *Período Payback* (*Simples e Descontado*) e a *Análise Custo/Volume/Lucro* (*CVL*).

Basicamente, toda operação financeira é representada em termos de fluxos de caixa, ou seja, em fluxos futuros esperados de recebimentos e pagamentos de caixa. A avaliação desses fluxos é dada através da comparação entre os valores presentes, calculados segundo o regime de juros compostos a partir de uma dada taxa de juros, das saídas e das entradas de caixa [5].

Para cada empresa, o valor do dinheiro no tempo é expresso por um parâmetro denominado *Taxa Mínima de Atratividade* (*TMA*), a qual é específica para cada empresa e representa a taxa de retorno que a empresa está disposta a aceitar em um investimento de risco (projeto empresarial).

3.9.1 Valor Presente Líquido (*VPL*)

O método do **Valor Presente Líquido** (*VPL*) para análise de fluxos de caixa é obtido através da diferença entre o valor presente dos benefícios (ou pagamentos) previstos de caixa e o valor presente do fluxo de caixa inicial (valor do investimento).

O cálculo do *VPL* é expresso da seguinte forma [5]:

$$VPL = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{FC_j}{(1+i)^j} \right) - FC_0 \qquad (54)$$

Em que FC_j representa o valor de entrada (ou saída) de caixa previsto para cada intervalo de tempo e FC_0 é o fluxo de caixa verificado no momento inicial, podendo ser um investimento, um empréstimo ou um financiamento.

Podem-se ter as seguintes possibilidades para o *Valor Presente Líquido* (*VPL*) de um projeto de investimento:

***VPL* > 0**: Significa que o investimento é economicamente atrativo, pois o valor presente das entradas de caixa é maior que o valor presente das saídas de caixa;

***VPL* = 0**: O investimento é indiferente, uma vez que o valor presente das entradas de caixa é igual ao valor presente das saídas de caixa;

***VPL* < 0**: Indica que o investimento não é economicamente viável, já que o valor presente das entradas de caixa é menor que o valor presente das saídas de caixa.

Exemplo: Uma empresa está avaliando um investimento no valor de R$750.000,00 do qual se esperam benefícios anuais de caixa de R$250.000,00 no primeiro ano, R$320.000,00 no segundo ano, R$380.000,00 no terceiro ano e R$280.000,00 no quarto ano. A empresa definiu que a taxa de desconto a ser aplicada aos fluxos de caixa do investimento é de 20%. Dessa maneira:

$$VPL = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{FC_j}{(1+i)^j} \right) - FC_0$$

i = 0,20 e FC_0 = R$750.000,00

$$VPL = \left(\frac{250.000,00}{(1,20)} + \frac{320.000,00}{(1,20)^2} + \frac{380.000,00}{(1,20)^3} + \frac{280.000,00}{(1,20)^4} \right) - 750.000,00$$

VPL = (208.333,33 + 222.222,22 + 219.907,41 + 135.030,86) – 750.000,00

VPL = 785.493,82 – 750.000,00

***VPL* = R$ 35.493,82**

Mesmo descontando os fluxos de caixa pela taxa de 20% ao ano, o *VPL* é superior a zero, indicando que esse investimento é viável. Entretanto, ao se elevar a taxa de desconto para 30% ao ano, por exemplo, o *VPL* apresenta-se negativo, indicando que o investimento não é viável.

$I = 0,30$

$$VPL = \left(\frac{250.000,00}{(1,30)} + \frac{320.000,00}{(1,30)^2} + \frac{380.000,00}{(1,30)^3} + \frac{280.000,00}{(1,30)^4} \right) - 750.000,00$$

VPL = (192.307,69 + 189.349,11 + 172.963,13 + 98.035,78) – 750.000,00

VPL = 652.655,71– 750.000,00

***VPL* = - R$97.344,29**

Dessa forma, à medida que a taxa de desconto vai se distanciando de 0%, o valor presente dos fluxos de caixa decresce, acarretando, então, um *VPL* cada vez menor.

3.9.1.1 Vantagens e Desvantagens do *VPL*

O *VPL* é um dos métodos mais utilizados pelos especialistas em finanças para decisão de investimentos. Tal fato dá-se em virtude de considerar o valor temporal do dinheiro, por não ser influenciado por decisões menos qualificadas (preferências do gestor, métodos de contabilização, rentabilidade da atividade atual) e por utilizar todos os fluxos de caixa futuros gerados pelo projeto, refletindo toda a movimentação de caixa. Além disso, permite uma decisão mais acertada quando há dois tipos de investimentos, uma vez que ao considerar os fluxos de caixa futuros a valores presentes, os fluxos podem ser adicionados e analisados conjuntamente, evitando a escolha de um mau projeto devido à sua associação a um bom projeto [8].

Em contraste, uma grande desvantagem do *VPL*, assim como dos demais métodos, é a estimação de fluxos de caixa futuros. Além disso, é exigido que a taxa a ser usada para seu cálculo seja corretamente determinada.

Outra limitação do *VPL* é a posição estratégica da empresa. Determinado projeto pode apresentar *VPL´s* negativos, mas que funcionam como verdadeiras estratégias que, futuramente, irão beneficiar a organização. Estratégias de lançamento em novos produtos ou de expansão podem apresentar *VPL´s* negativos, mas são decisões que, muitas vezes, são necessárias tanto para empresa dominar novos mercados ou até mesmo para sobreviver [61].

A solução para saber se esse método irá acarretar em uma boa decisão de investimento consiste na situação de sua utilização. Mais importante do que utilizar um método em si, é interpretar o resultado que ele aponta e as circunstâncias em que foi aplicado. Ao se usar o *VPL* em situação de baixo risco e certa estabilidade na economia, o método irá apresentar conclusões dificilmente contestadas. Entretanto, esse ambiente é considerado utópico, visto que acontecimentos inesperados ocorrem, em todo momento, no âmbito empresarial. Dessa forma, o *VPL* pode ter parte de suas deficiências supridas ao ser complementado com outros critérios.

3.9.2 Taxa Interna de Retorno (*TIR*)

A **Taxa Interna de Retorno** (*TIR*) é a taxa de juros (desconto) a qual iguala, em determinado momento do tempo, o valor presente das entradas (recebimentos) com o das saídas (pagamento) previstas de caixa [5]. Em outras palavras, a *TIR* corresponde à taxa de desconto que faz com que todas as receitas sejam equivalentes a todas as despesas de um fluxo de caixa, ao longo do tempo.

A *Taxa Interna de Retorno* (*TIR*) pode ser calculada através da seguinte expressão [5]:

$$FC_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \tag{55}$$

Em que FC_0 é o valor do fluxo de caixa no momento zero, FC_j são fluxos previstos de entradas ou saídas de caixa em cada período de tempo e *i* é a taxa de desconto que iguala, em determinada data, as entradas com as saídas de caixa previstas. Em outras palavras, *i* representa a *TIR*.

A *Taxa Interna de Retorno* de um investimento pode ser comparada com a *Taxa Mínima de Atratividade*:

TIR > TMA: Significa que o investimento é economicamente viável;
TIR = TMA: O investimento está em uma situação econômica de indiferença;
TIR < TMA: O investimento não é economicamente atrativo.

Entre vários investimentos, o melhor será aquele que tiver a maior *Taxa Interna de Retorno*.

Exemplo: Uma empresa está avaliando um investimento de R$70.000,00 com expectativa de benefícios de caixa de R$20.000,00 no primeiro ano, R$40.000,00 no segundo ano, R$45.000,00 no terceiro ano e R$30.000,00 no quarto ano. Para apurar a *Taxa Interna de Retorno*:

$FC_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j}$, em que FC_0 = R\$70.000,00.

$$70.000,00 = \frac{20.000,00}{(1+i)} + \frac{40.000,00}{(1+i)^2} + \frac{45.000,00}{(1+i)^3} + \frac{30.000,00}{(1+i)^4}$$

Efetuando esse cálculo, apura-se uma *Taxa Interna de Retorno* i = 30% ao ano. Isso quer dizer que ao se descontarem os vários fluxos previstos de caixa pela *TIR* calculada, o valor atualizado será exatamente igual ao montante do investimento de R$70.000,00.

3.9.2.1 Vantagens e Desvantagens da *TIR*

A grande vantagem do método *TIR* é permitir que todo o projeto se resuma a um único número: a sua rentabilidade intrínseca. A *TIR* não depende de nenhum parâmetro que não os fluxos de caixa esperados para o projeto. Além disso, tem um critério de aceitação definido: *TIR* > *TMA*, tornando a análise dos investimentos simplificada [1].

Entretanto, entre suas principais desvantagens, tem-se o risco de se usar esse método no caso de haver mais de uma inversão de sinal. Quando isso ocorre, podem-se encontrar várias *TIR´s* positivas. Usando uma delas, pode-se acarretar em um erro. A *TIR* pode levar a equívocos quando utilizada para comparar diferentes projetos, podendo não diferenciar projetos lucrativos daqueles que causam prejuízos.

Por exemplo, suponha os seguintes projetos [1]:

Projeto	**FC_0**	**FC_1**	***TIR***	***VPL* (10%)**
A	- 100	150	50%	$\frac{150}{1,1} - 100 = 36,36$
B	100	-150	50%	$-\frac{150}{1,1} + 100 = -36,36$

Tabela 3.5: exemplo *TIR* - desvantagem

Ambos os projetos têm uma *TIR* de 50%. Entretanto, esse método não foi idôneo de distinguir entre o projeto que daria prejuízo (B) e o que daria lucro (A).

Assim como nos demais métodos, também existe a dificuldade de determinar com exatidão os fluxos de caixa esperados. Além disso, quanto maior o número de períodos, maior será o número de raízes, dificultando o cálculo.

O método da *TIR* deve ser usado, então, por pessoas que conheçam todas as suas armadilhas e saibam como contorná-las e, ainda assim, somente se o fluxo de caixa a ser analisado contiver uma única inversão de sinal [1].

3.9.3 Período *Payback* : Simples e Descontado

O método *Payback* visa calcular o número de períodos ou quanto tempo o investidor irá levar para recuperar o investimento realizado. Existem duas formas de analisar um projeto de investimento pelo critério do *Payback*: *Payback Simples* e *Payback Descontado*.

3.9.3.1 *Payback Simples*

O período de *Payback Simples* é quanto tempo um investimento leva para pagar de volta ao seu dono o investimento inicial. Obtém-se essa medida contando quantos períodos o projeto necessita para que se acumule um retorno igual ao do investimento realizado. Assim sendo, quando se comparam investimentos semelhantes, o critério é optar pelo projeto que ofereça o menor período de *Payback* [1].

O período de *Payback Simples* (*PBs*) pode ser calculado da seguinte maneira:

$$PBs = \frac{\textit{Valor do Investimento}}{\textit{Valor do Fluxo Periódico Esperado}} \quad (56)$$

Exemplo:

Projeto	**A**	**B**
Investimento Inicial	R$42.000,00	R$45.000,00
Ano	**Entradas de Caixa (A)**	**Entradas de Caixa (B)**
1	R$14.000,00	R$30.000,00
2	R$14.000,00	R$15.000,00
3	R$14.000,00	R$10.000,00
4	R$14.000,00	R$10.000,00
5	R$14.000,00	R$10.000,00
***Payback Simples* (*PBs*)**	**3,0 anos**	**2,0 anos**

Tabela 3.6: exemplo *Payback Simples*

O projeto A apresenta período *Payback* de 3 anos $\left(\frac{\text{R\$42.000,00}}{\text{R\$14.000,00}}\right)$ ao passo que o projeto B apresenta período *Payback* de 2 anos. Nesse caso, as entradas de caixa são acumuladas até a recuperação do investimento inicial (R$30.000,00 + R$15.000,00). Se o período de *Payback* máximo aceitável pela empresa for de 2,5 anos, o projeto A deve ser descartado.

3.9.3.2 *Payback Descontado*

O *Payback Descontado* visa corrigir a maior deficiência do *Payback Simples*: não considerar o valor do dinheiro no tempo. Esse objetivo é alcançado em virtude do desconto ao valor presente dos fluxos de caixa do projeto sob análise.

Pelo método do *Payback Descontado*, a primeira coisa a se fazer é determinar a taxa de remuneração do dinheiro no tempo considerada pelo investidor. Em seguida, devem-se calcular todos os valores presentes dos fluxos de caixa. Então, tudo se passa como no critério do período *Payback Simples*, entretanto o tempo necessário para o pagamento do investimento inicial é calculado com base nos seus valores presentes e não nos valores dos fluxos [1].

Dessa forma, os passos para se calcular o *Payback Descontado* são os seguintes:

a. Primeiramente, calculam-se todos os valores presentes das entradas de caixa através da fórmula [46]:

$$VP = \sum_{n=1}^{n} \frac{FC_n}{(1+i)^n} \quad (57)$$

Em que *FC* são os fluxos de caixa, *n* os períodos e *i* a taxa de retorno.

b. O momento do tempo em que o valor presente acumulado das entradas de caixa equivaler ao valor do investimento inicial realizado é o *Payback Descontado*.

c. Entretanto, caso esteja localizado em um intervalo de tempo do fluxo de caixa, seu valor será quebrado, podendo ser calculado através da seguinte fórmula [46]:

$$PBd = \text{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\text{Investimento Inicial} - \text{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\text{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}} \right) \quad (58)$$

Exemplo: Uma empresa precisa escolher entre dois projetos mutuamente excludentes A e B. Deseja-se saber qual o melhor investimento, supondo uma taxa de desconto de 10% ao ano. O valor do investimento e as entradas de caixa estão apresentados nas tabelas a seguir:

Anos	***Payback Descontado* Aceitável: 4 anos**		
	Projeto A: Investimento Inicial de R$10.000,00		
	Entradas de Caixa	**Entradas de Caixa Descontadas (VP)**	***Payback* Acumulado**
1	R$3.000,00	R$2.727,27	R$2.727,27
2	R$3.000,00	R$2.479,34	R$5.206,61
3	R$3.000,00	R$2.253,94	R$7.460,55
4	R$3.000,00	R$2.049,04	R$9.509,59
5	R$3.000,00	R$1.862,76	R$11.372,35

Tabela 3.7: *Payback Descontado* - Projeto A

$$\mathbf{VP_A} = \left[\frac{3.000,00}{(1+0,10)^1} + \frac{3.000,00}{(1+0,10)^2} + \frac{3.000,00}{(1+0,10)^3} + \frac{3.000,00}{(1+0,10)^4} + \frac{3.000,00}{(1+0,10)^5}\right]$$

$\mathbf{VP_A}$ = 2.727,27 + 2.479,34 + 2.253,94 + 2.049,04 + 1.862,76

$\mathbf{VP_A}$ **= R$11.372,35**

Pela fórmula (58) do *Payback Descontado*, tem-se que:

$$PBd_A = \textit{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\textit{Investimento Inicial} - \textit{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\textit{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}}\right)$$

$$PBd_A = 4 + \left(\frac{10.000,00 - 9.509,59}{1.862,76}\right)$$

PBd_A = 4 + 0,26

PBd_A **= 4,26 anos = 4 anos, 3 meses e 4 dias**

Entretanto, como o *Payback* máximo aceitável é de 4 anos, o projeto A é descartado.

Anos	*Payback Descontado* Aceitável: 4 anos		
	Projeto B: Investimento Inicial de R$8.000,00		
	Entradas de Caixa	Entradas de Caixa Descontadas (VP)	*Payback* Acumulado
1	R$2.800,00	R$2.545,45	R$2.545,45
2	R$2.800,00	R$2.314,05	R$4.859,50
3	R$2.800,00	R$2.103,68	R$6.963,18
4	R$2.800,00	R$1.912,44	R$8.875,62
5	R$2.800,00	R$1.738,58	-

Tabela 3.8: *Payback Descontado* - Projeto B

$$\mathbf{VP_B} = \left[\frac{2.800,00}{(1+0,10)^1}+\frac{2.800,00}{(1+0,10)^2}+\frac{2.800,00}{(1+0,10)^3}+\frac{2.800,00}{(1+0,10)^4}+\frac{2.800,00}{(1+0,10)^5}\right]$$

$\mathbf{VP_B}$ = 2.545,45 + 2.314,05 + 2.103,68 + 1.912,44 + 1.738,58

$\mathbf{VP_B}$ = R$10.614,20

Pela fórmula (58) do *Payback Descontado*, tem-se que:

$$PBd_B = \text{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\text{Investimento Inicial} - \text{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\text{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}}\right)$$

$$\boldsymbol{PBd_B} = 3 + \left(\frac{8.000,00 - 6.963,18}{1.912,44}\right)$$

$\boldsymbol{PBd_B}$ = 3 + 0,54

$\boldsymbol{PBd_B}$ **= 3,54 anos = 3 anos, 6 meses e 15 dias**

Como o projeto B apresenta o menor *Payback Descontado* e ainda encontra-se dentro do limite admitido pela empresa, ele é aceito.

3.9.3.3 Vantagens e Desvantagens do Período *Payback* : Simples e Descontado

a. *Payback Simples*

A grande vantagem desse critério é a sua simplicidade. Além disso, é útil para investidores ansiosos pelo retorno do investimento inicial, já que transmite uma idéia de quanto tempo terão que esperar para que isso aconteça. Segundo [1], serve como medida indireta e aproximada da liquidez de um projeto.

Entretanto, duas desvantagens comprometem esse método. A primeira é um problema conceitual grave: ele não considera o valor do dinheiro no tempo. E a segunda grande desvantagem é que o método não apresenta nenhuma atenção ao fluxo de caixa posterior ao período de *Payback*. Assim, um projeto pode retornar mais rapidamente o investimento inicial, mas não criar muita riqueza depois disso, ao passo que outro pode demorar mais para reembolsar os valores investidos, mas trazer muita riqueza em seguida [1].

b. *Payback Descontado*

A grande vantagem desse método em relação ao *Payback Simples* é que ele considera o valor do dinheiro no tempo. Entretanto, não é prudente considerar tal método como decisão de investimento, uma vez que não contempla os fluxos de caixa após o período de recuperação, bem como ocorre no *Payback Simples*. Assim, esse método pode levar a escolha de um projeto que tenha um prazo de retorno muito baixo, desconsiderando outro com período mais longo, mas que possa gerar maior riqueza para o proprietário, ou seja, que apresente um *VPL* maior.

Além disso, o período de recuperação normalmente é definido de forma arbitrária pelo administrador. Logo, há um elevado grau de subjetividade, uma vez que depende do estabelecimento de um *Payback* “aceitável”.

Sendo ao mesmo tempo de fácil identificação e interpretação, porém com deficiências graves para decisões de longo prazo, o *Payback Descontado* é comumente usado pelas empresas para decisões que representem menor impacto e, portanto, com características menos importantes, relativas a pequenos procedimentos gerenciais necessários para o funcionamento do cotidiano da empresa [8].

3.9.4 Análise Custo/Volume/Lucro (*CVL*)

A Análise Custo/Volume/Lucro consiste em uma ferramenta básica de avaliação utilizada pelos gestores financeiros. Tal análise permite que seja examinado o comportamento das receitas e custos totais, dos resultados de operações decorrentes de mudanças ocorridas nos níveis de saída (vendas), de preços de vendas, custos variáveis por unidade ou custos fixos, dentre outros. Os administradores utilizam esse tipo de análise como um auxílio para responder questões que envolvam expectativas quanto ao que acontecerá com o lucro caso haja modificações nos preços de venda, nos custos e no volume vendido. Segundo [17], ela é usada pela empresa para determinar o nível de operações necessárias para cobrir todos os custos operacionais e para avaliar a lucratividade associada a vários níveis de venda.

> A Análise Custo/Volume/Lucro ajuda a entender a inter-relação entre o custo, o volume e o lucro de uma organização, focalizando as interações entre os seguintes elementos: preço dos produtos; volume ou nível de atividade; custo variável unitário; custo fixo total e *mix* dos produtos vendidos. [...] é considerada um instrumento vital em muitas decisões empresariais, como, por exemplo, quais produtos vender ou fabricar, qual política de preços seguir, qual estratégia de mercado adotar e que tipo de instalações produtivas adquirir [14].

Segundo [7], custos fixos equivalem aos custos que permanecem constantes dentro de certo intervalo de tempo, independentemente das variações ocorridas no volume de produções e vendas durante esse período, como por exemplo, aluguel, luz, telefone, dentre outros.

Custos variáveis, por sua vez, são aqueles cujo valor total aumenta ou diminui direta e proporcionalmente com as flutuações ocorridas na produção e vendas [7]. Quando certa empresa vende mil unidades de determinado produto, ela terá custos com a matéria-prima envolvida, com as comissões pagas aos vendedores, etc. Ou seja, esse tipo de custo tem uma variação proporcional ao nível de vendas. Se essa empresa aumenta suas vendas em 20%, os custos variáveis devem aumentar, também, em 20%. São exemplos de custos variáveis: a comissão de vendedores, promoção de produtos, impostos, dentre outros.

Existe ainda uma terceira categoria de custos: os custos semi-fixos, os quais contêm elementos fixos e variáveis. A Análise Custo/Volume/Lucro requer a separação desses elementos de forma a agregá-los, de uma forma claramente definida, nas duas categorias anteriores. Embora uma grande gama dos custos se comporte de forma semi-fixa, deve-se procurar desmembrar o seu comportamento em uma parte fixa e uma variável a fim de que a análise torne-se válida.

Se utilizada adequadamente, a Análise Custo/Volume/Lucro pode constituir-se em um importante subsídio aos administradores no que diz respeito à tomada de decisões corretas, minimizando os riscos inerentes ao processo decisório cotidiano [7].

A Análise Custo/Volume/Lucro abrange os conceitos de Margem de Contribuição e de Ponto de Equilíbrio.

3.9.4.1 Margem de Contribuição (*MC*)

A **Margem de Contribuição** representa o valor com que cada unidade de um produto fabricado e comercializado contribui para cobrir os custos de operação da empresa e gerar lucros. Em outras palavras, ela é o montante disponível para cobrir as despesas fixas e, em seguida, prover os lucros [14]. A Margem de Contribuição (*MC*) pode ser obtida através do seguinte cálculo:

$$\boldsymbol{MC = RT - (CV + DV)} \tag{59}$$

Em que:

RT = Receita Total, ou seja, o valor das vendas;
CV = Custos Variáveis;
DV = Despesas Variáveis.

Quando o valor da Margem de Contribuição for superior ao valor total das despesas fixas, a empresa estará gerando lucro e, quando for inferior, o resultado será entendido como prejuízo.

Tendo as orientações necessárias para entender o que é Margem de Contribuição e como usá-la, certamente a administração e decisões tomadas proporcionarão à empresa melhores condições de competitividade. E com isso, poderão ser obtidos resultados mais eficazes nas negociações.

Exemplo: Supondo que o preço de venda de um determinado produto seja R$100,00, o custo variável unitário deste produto seja R$ 50,00 e a despesa variável tenha o valor de R$ 10,00 (10% do preço de venda), a Margem de Contribuição será de R$ 40,00 (R$ 100,00 – (R$ 50,00 +R$10,00)). Nesse caso, o produto vendido "está contribuindo" com R$ 40,00 para ajudar a pagar os custos fixos e depois formar o lucro líquido da empresa.

3.9.4.2 Ponto de Equilíbrio (*PE*)

Segundo [50], **Ponto de Equilíbrio** equivale ao nível de atividade no qual o valor das vendas totais iguala os custos totais e a entidade não forma lucro e nem sofre prejuízos. O Ponto de Equilíbrio é, portanto, o volume de operações que gera um crédito nulo.

> A análise do ponto de equilíbrio é uma simples, embora poderosa, abordagem para o planejamento do lucro, que estuda as relações entre vendas, custos fixos e custos variáveis. Como o próprio nome diz, a análise requer a derivação de vários relacionamentos entre receitas, custos fixos e variáveis, no sentido de determinar as unidades de produção ou o volume de vendas necessário para que a empresa não tenha lucro nem prejuízo, ou seja, para que ela esteja em equilíbrio [11].

Dependendo da necessidade da empresa ou do gestor, o Ponto de Equilíbrio pode ser adaptado a fim de suprir a carência de certas informações gerenciais. Tal adaptação origina tipos de Ponto de Equilíbrio distintos, os quais são utilizados em diversas situações de planejamento das atividades empresariais.

No caso de querer se obter o Ponto de Equilíbrio em quantidade, ou seja, o quanto (em unidades) deve ser produzido e vendido para que a empresa alcance o equilíbrio entre custos e receitas, tem-se o seguinte cálculo:

$$PE = \frac{CF}{(P - CV)} \quad \text{ou} \quad PE = \frac{CF}{MCu} \tag{60}$$

Uma vez que a Margem de Contribuição Unitária (*MCu*) é igual a $P - CV$, sendo:

PE = Ponto de Equilíbrio;

CF = Custos Fixos;

P = Preço unitário de venda do produto;

CV = Custo variável por unidade.

O Ponto de Equilíbrio também pode ser calculado em valor. De acordo com [7], em determinadas situações, quando o leque de produtos é muito grande e há dificuldade de se obter o *mix* de produtos ideal e suas quantidades no Ponto de Equilíbrio, ou quando existem dificuldades na identificação de custos e despesas fixas para cada produto, deve-se obter uma informação de caráter global expressa monetariamente. Dessa forma, traduz-se o Ponto de Equilíbrio em valor de vendas, isto é, o valor mínimo que deve ser vendido a fim de que a empresa não tenha prejuízo e nem lucro. Esse tipo de Ponto de Equilíbrio pode ser obtido pela divisão dos custos fixos (em R$) pela Margem de Contribuição Unitária (em %).

Os dois tipos mencionados (quantidade e valor) são conhecidos como Ponto de Equilíbrio Contábil e podem ser adaptados para a obtenção de outros tipos de informações, como o Ponto de Equilíbrio Financeiro e o Ponto de Equilíbrio Econômico [41]. O primeiro leva em consideração todos os custos fixos contábeis relacionados com o funcionamento da empresa, bem como todos os custos de oportunidade. O segundo, por sua vez, leva em consideração apenas os custos que serão efetivamente desembolsados no período de análise, ou seja, aqueles que onerarão financeiramente a empresa.

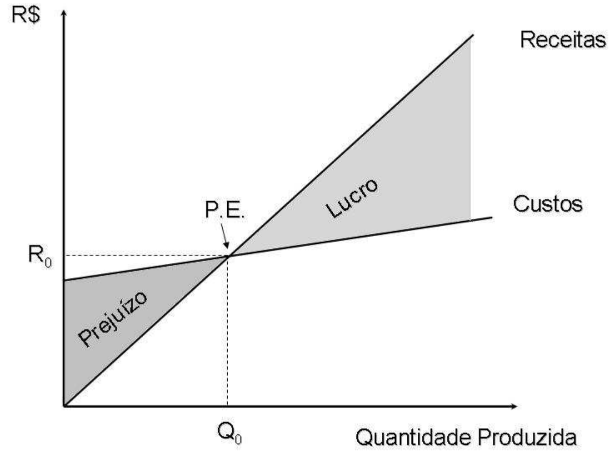

Figura 3.1: Ponto de Equilíbrio entre custos e receitas

De acordo com a figura **3.1** é possível observar que qualquer produção inferior a Q_0 irá resultar em prejuízo. Em contrapartida, qualquer produção superior a Q_0 irá resultar em um custo inferior à receita, ou seja, lucro. O Ponto de Equilíbrio, por sua vez, irá corresponder à quantidade de produção necessária para que os custos se igualem às receitas. Isto é, corresponde ao ponto em que não há nem lucro, nem prejuízo.

Exemplo: Supondo que os custos fixos mensais de uma empresa sejam de R$4.000,00 e a Margem de Contribuição de cada produto seja de R$50,00, a empresa teria que produzir e vender 80 unidades $\left(\dfrac{R\$4.000,00}{R\$50,00}\right)$ para atingir o seu Ponto de Equilíbrio.

3.9.4.3 Vantagens e Desvantagens da Análise *CVL*

A Análise Custo/Volume/Lucro serve para orientar os administradores quanto às metas de venda mínimas. Sua vantagem é ser um critério bastante abrangente, servindo para tomadas de decisões estratégicas, bem como o lançamento de novos produtos, a retirada de produtos da linha de produção ou o dimensionamento da capacidade mínima a ser instalada para viabilizar um projeto [1].

Entretanto, existem algumas dificuldades ao se lidar com esse tipo de análise. Por exemplo, se a empresa produz um único produto, é razoavelmente fácil determinar o Ponto de Equilíbrio. Quando o Ponto de Equilíbrio não é atingido, deve haver a retirada do produto. No entanto, se a empresa produz diferentes produtos, não é uma tarefa fácil alocar corretamente os custos fixos para cada um desses produtos. Além disso, algumas relações intangíveis são difíceis de avaliar. Por exemplo, muitas vezes a existência de um produto alavanca as vendas de outro. Retirar de linha um produto que não atinge o Ponto de Equilíbrio pode, indiretamente, prejudicar as vendas de outro produto com boas vendas [1].

3.9.5 Dificuldades na Análise de Investimentos

A principal dificuldade na análise de investimentos é a obtenção de dados confiáveis, principalmente as projeções de entradas de caixa. Estas se originam, basicamente, das estimativas de vendas. Entretanto, a precisão nunca chega a ser máxima e, uma análise, para ser eficaz, deve estar fundamentada em projeções corretas.

Na prática, decisões financeiras não são tomadas em ambiente de total certeza com relação a seus resultados. Como essas decisões estão fundamentalmente voltadas para o futuro, a variável incerteza torna-se um dos mais significativos aspectos do estudo das operações do mercado financeiro e das finanças corporativas.

Risco, na linguagem do administrador financeiro, nada tem a ver com dar certo ou errado, ter prejuízo ou lucro. Diz respeito apenas às chances de se ter um resultado diferente daquele esperado [5].

> A idéia do risco, de forma mais específica, está diretamente associada às probabilidades de ocorrência de determinados resultados em relação a um valor médio esperado. É um conceito voltado para o futuro, revelando uma possibilidade de perda [5].

Os métodos de análise de investimentos vistos anteriormente são comumente enriquecidos com algumas técnicas mais sofisticadas, como árvores de decisão, regras de Laplace, análise de Monte Carlo, análise de sensibilidade, método de Hertz, regra de Hurwicz, dentre outras. No presente trabalho, no entanto, serão utilizados os conceitos intervalares para lidar com o risco e a incerteza relacionados com os dados de projetos empresariais.

4 MATEMÁTICA FINANCEIRA INTERVALAR

Ao longo do tempo, as empresas vão acirrando cada vez mais sua competitividade no mercado. Em uma economia cada vez mais globalizada, torna-se imprescindível a introdução de novas tecnologias de produção, assim como novas técnicas de gestão empresarial.

Aos profissionais das finanças já não basta conhecer apenas as técnicas clássicas de administração financeira. A eles são cobradas tomadas de decisões de cunho determinante para a sobrevivência da empresa.

O objetivo econômico das empresas, em geral, é a obtenção de lucros cada vez maiores, ou seja, da maximização de suas riquezas. Para tal, é necessário que todo o planejamento ocorra de forma correta para que não haja desvios significativos de metas estabelecidas e para que se assegure o resultado planejado.

Contudo, o ambiente financeiro não é um ambiente totalmente estável, apresentando várias complexidades e riscos, os quais existem em praticamente toda atividade empresarial. Qualquer decisão tomada no presente visando algum resultado no futuro está sujeita a algum grau de risco e, conseqüentemente, a uma alteração. Por exemplo, a incerteza sobre condições econômicas gerais, representadas por produto nacional, taxas de juros ou inflação, afeta uma grande maioria de empresas com certa intensidade. Assim, apurar de modo exato e seguro os custos de uma empresa torna-se uma tarefa árdua, uma vez que os fatores para essa apuração estão sujeitos à imprecisão e variações.

Na matemática financeira atual são usadas técnicas de estatística para que seja minimizada a incerteza de dados empresariais. A experiência anterior também é uma forte aliada da matemática financeira atual. Quando registrada em dados, demonstrada conscientemente através de estatísticas e avaliações coerentes e, ainda, aplicada com bom senso e ferramental adequado, essa experiência se transforma em conhecimento que proporciona uma ajuda sobre previsões e riscos. Entretanto, apesar de existirem tais subsídios, decisões errôneas ainda são tomadas constantemente. A qualidade das informações é a diretriz para a qualidade da decisão a ser tomada. Dados errados, desatualizados ou mal interpretados acarretam em decisões equivocadas.

Além disso, nem sempre é possível saber o valor exato com o qual se deva trabalhar. Nesse caso, aproximações podem levar a resultados desastrosos e acarretar em uma decisão errônea. Assim, em muitos casos é mais viável obter uma solução contida em um intervalo. Uma possibilidade para a gestão de riscos de uma empresa é o auxílio de técnicas da matemática intervalar, uma teoria a qual enfoca o tratamento de imprecisões, como já foi visto. Dessa forma, é possível que se obtenham cálculos mais seguros e, conseqüentemente, uma maior qualidade nos resultados empresariais.

> Tratar custos imprecisos através de intervalos não torna o resultado final do custo mais exato, mas permite conhecer o tamanho da incerteza. Isso traz ganhos no momento de se tomar decisões baseadas nesses custos (...). Essa informação certamente será útil para que o gestor da empresa tome suas decisões com um maior embasamento, o que se poderá traduzir em melhores decisões para a empresa [58].

Ao utilizar os custos como intervalos, após serem feitas as operações tem-se a garantia de que o valor real estará dentro do intervalo dado como solução. Dessa forma, a tomada de decisão pode ser considerada mais segura, pois o risco que se está correndo é conhecido, uma vez que se têm o melhor e o pior caso.

4.1 METODOLOGIA

Utilizando-se os fundamentos de matemática intervalar a fim de se maximizar a qualidade dos resultados empresariais, tem-se que uma variável cuja determinação não possa ser feita de modo preciso irá ser representada por um intervalo, no qual ela ocorra com determinada margem de segurança. Variáveis que não se encaixam nesse perfil, ou seja, portadoras de valores pontuais, terão tais valores transformados em intervalos degenerados. Dessa forma, em todos os tópicos de matemática financeira tradicional vistos anteriormente, após terem sido aplicadas as operações da aritmética intervalar, os resultados obtidos serão intervalos.

Outra observação é que para os intervalos obtidos será considerada uma precisão de duas casas decimais, uma vez que se está lidando com valores monetários. Para isso, será usado **arredondamento direcionado**, a fim de que se garanta a corretude do intervalo, ou seja, a obtenção do melhor intervalo possível em termos de extensão, o qual, seguramente, contenha a solução real. Nesse tipo de arredondamento, dado um intervalo [*a*; *b*], o limite inferior do intervalo é arredondado para baixo, ou seja, para o maior número representável menor do que *a*. O limite superior, por sua vez, é arredondado para o maior número representável maior do que *b*. Por exemplo, seja o intervalo [0,178654; 0,588754]. A fim de se obter um intervalo com uma precisão de duas casas decimais e utilizando o arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [0,17; 0,59].

4.2 INTERVALIZAÇÃO DE ALGUNS CONCEITOS FINANCEIROS

4.2.1 Juros e Montantes Intervalares

Antes de iniciar o estudo de juros e montantes intervalares, é imprescindível mencionar que sua utilização apenas terá nexo quando forem trabalhadas projeções de situações futuras, nas quais há a presença de estimações e especulações de cunho econômico.

Por exemplo, para a projeção de valores na matemática financeira tradicional, existe a necessidade de se definir taxas prévias, de modo que taxas desconhecidas, como as pós-fixadas, devem ser arbitradas previamente para fins de cálculos. Um exemplo é a taxa de juros da poupança, a qual é definida como sendo 0,5% ao mês mais a TR (taxa referencial), informada diariamente pelo Banco Centra do Brasil [48].

Nesse caso, mesmo a taxa de juros da poupança sendo conhecida (0,5%), ela é acrescida de uma variável que não se conhece previamente (TR). Assim, como não se sabe o valor exato com o qual se deve trabalhar, seria mais viável a obtenção desse valor na forma de um intervalo.

Além de taxas oscilantes, é também imprescindível que as previsões de fluxos de caixa sejam feitas da maneira mais realista possível, visto que estimações feitas de forma errônea podem acarretar em resultados desastrosos, através de decisões equivocadas. Nesse caso, a adesão aos conceitos intervalares acarretaria em cálculos mais seguros e, assim, em um melhora de resultados empresariais.

Já em casos da matemática financeira tradicional em que são utilizadas somente taxas pré-fixadas e variáveis portadoras de valores pontuais, o uso dos conceitos intervalares se torna desnecessário. Nesse caso, seriam obtidos apenas intervalos degenerados, acarretando em respostas equivalentes a soluções já encontradas pela matemática financeira atual, porém com um maior custo computacional.

4.2.1.1 Juros e Montantes Simples Intervalares

Como já visto, entende-se por juros simples como sendo o valor acrescentado a um capital ao término de determinado período. Na matemática financeira tradicional, ele pode ser calculado pela seguinte fórmula: $J = C * i * n$, ou seja, J são os juros produzidos depois de n períodos, do capital P aplicado a uma taxa de juros por período igual a i.

O montante simples, por sua vez, equivale à soma do capital com os juros. Isto é, no final de *n* períodos, o capital resultante, ou montante, será igual ao capital inicial adicionado aos juros produzidos no período. Logo, tem-se que o montante é calculado por: $M = C + J$, que manipulada gera: $M = C * (1 + i * n)$.

Dessa forma, o *Juro Simples Intervalar* será calculado do seguinte modo:

$$[J_1 ; J_2] = [C_1 ; C_2] * [i_1 ; i_2] * [n_1 ; n_2]$$
$$[J_1 ; J_2] = \left[(C_1 * i_1) ; (C_2 * i_2)\right] * [n_1 ; n_2]$$
$$[J_1 ; J_2] = \left[(n_1 * C_1 * i_1) ;\ (n_2 * C_2 * i_2)\right]$$

Assim, a fórmula para o cálculo do *Juro Simples Intervalar* é a seguinte:

$$\mathbf{[J_1 ; J_2] = \left[(n_1 * C_1 * i_1) ;\ (n_2 * C_2 * i_2)\right]} \qquad (61)$$

Em que J_1 e J_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente aos juros simples; C_1 e C_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao capital inicial; por sua vez i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de juros simples e, não diferentemente, n_1 e n_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao prazo.

O *Montante Simples Intervalar*, por sua vez, é calculado como segue:

$$[M_1 ; M_2] = [C_1 ; C_2] * \left([1;1] + \left([i_1 ; i_2] * [n_1 ; n_2]\right)\right)$$
$$[M_1 ; M_2] = [C_1 ; C_2] * \left([1;1] + \left[(i_1 * n_1) ; (i_2 * n_2)\right]\right)$$
$$[M_1 ; M_2] = [C_1 ; C_2] * \left[1 + (i_1 * n_1) ; 1 + (i_2 * n_2)\right]$$
$$[M_1 ; M_2] = \left[C_1 * \left(1 + (i_1 * n_1)\right) ; C_2 * \left(1 + (i_2 * n_2)\right)\right]$$

E a fórmula para o cálculo do *Montante Simples Intervalar* é dada a seguir:

$$\boldsymbol{[M_1;\, M_2] = [C_1 * (1 + (i_1 * n_1)); C_2 * (1 + (i_2 * n_2))]} \qquad (62)$$

Em que M_1 e M_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao montante simples; C_1 e C_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao capital inicial; por sua vez i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de juros simples e, não diferentemente, n_1 e n_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao prazo.

Exemplo: Um empresário deseja comprar, daqui a quatro meses, no aniversário de sua empresa, uma nova máquina a fim de renovar seu parque industrial. Ele deseja saber quanto deverá aplicar na poupança hoje para que consiga efetuar o pagamento dessa máquina. Entretanto, deve-se levar em consideração que o preço do produto irá sofrer variações de acordo com o mercado nesses quatro meses, como por exemplo, alterações no processo inflacionário. Além disso, deve-se considerar também a variação do rendimento da poupança, o qual oscila diariamente. Dessa forma, o valor futuro da operação e a taxa de juros *i* serão obtidos na forma de intervalos, representando a variabilidade e imprecisão desses fatores.

Supõe-se, então, que o valor da máquina varie, em reais, entre R$12.100,00 e R$12.900,00 nos quatro meses e que a poupança renda, a cada mês, entre 0,5% e 0,7%. Assim, tem-se que:

$[M_1; M_2]$ = [12.100; 12.900]

$[i_1; i_2]$ = [0,005; 0,007]

$[n_1; n_2]$ = [4; 4]

$[C_1; C_2]$ = ?

$$[M_1; M_2] = [C_1 * (1 + (i_1 * n_1)); C_2 * (1 + (i_2 * n_2))]$$
$$[12.100; 12.900] = [C_1 * (1 + (0{,}005 * 4)); C_2 * (1 + (0{,}007 * 4))]$$
$$[12.100; 12.900] = [(C_1 * 1{,}02); (C_2 * 1{,}028)]$$

Nesse caso, tem-se uma igualdade entre intervalos, vista no segundo capítulo, em que sejam A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] dois intervalos de IR, então A = B se, e somente se, *a* = *c* e *b* = *d*. Assim, tem-se:

(a) 12.100 = $C_1 * 1{,}02$

(b) 12.900 = $C_2 * 1{,}028$

1º) Cálculo da equação (a):

$$12.100 = C_1 * 1{,}02$$
$$C_1 = \frac{12.100}{1{,}02}$$
$$C_1 = 11.862{,}745$$

2º) Cálculo da equação (b):

$$12.900 = C_2 * 1{,}028$$
$$C_2 = \frac{12.900}{1{,}028}$$
$$C_2 = 12.548{,}638$$

Logo, tem-se que $[C_1; C_2]$ = [11.862,745; 12.548,638]. Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [11.862,74; 12.548,64].

Isso equivale dizer que com um investimento abaixo de R$11.862,74, o empresário não conseguirá capital suficiente para comprar a máquina. Já acima de R$12.548,64 ele, provavelmente, de acordo com as estimativas realizadas, obterá a quantia necessária.

Para calcular os juros da operação, utiliza-se a fórmula do *Juro Simples Intervalar*:

$$[J_1 ; J_2] = [(n_1 * C_1 * i_1);\ (n_2 * C_2 * i_2)]$$
$$[J_1 ; J_2] = [(4 * 11.862{,}745 * 0{,}005);\ (4 * 12.548{,}638 * 0{,}007)]$$
$$[J_1 ; J_2] = [237{,}2549;\ 351{,}36186]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [237,25; 351,37].

A fim de se verificar a veracidade dos resultados obtidos, utiliza-se a definição de montante, o qual equivale à soma do capital com os juros. Desse modo, tem-se que:

$$[M_1 ; M_2] = [C_1 ; C_2] + [J_1 ; J_2]$$
$$[M_1 ; M_2] = [11.862{,}745; 12.548{,}638] + [237{,}2549; 351{,}36186]$$
$$[M_1 ; M_2] = [(11.862{,}745 + 237{,}2549); (12.548{,}638 + 351{,}36186)]$$
$$[M_1 ; M_2] \cong [12.100{,}00; 12.900{,}00]$$

4.2.1.2 Juros e Montantes Compostos Intervalares

Quando uma determinada soma de dinheiro está aplicada a juros simples, os juros são sempre calculados sobre o capital inicial. Contudo, quando uma soma está aplicada a juros compostos, os juros são calculados não apenas sobre o capital inicial. Isto é, a taxa de juros incide sobre o capital inicial acrescido dos juros acumulados até o período anterior. Os juros compostos são mais utilizados pelo mercado financeiro, pois refletem melhor a realidade e a maioria das operações financeiras (empréstimos pessoais, compras a prazo, etc.) utiliza esse tipo de juros.

Na matemática financeira tradicional, os juros compostos podem ser calculados através da seguinte fórmula: $J = PV * [(1 + i)^n – 1]$, em que *PV* (Valor Presente) equivale ao capital inicial, *n* ao prazo da aplicação e *i* à taxa de juros.

O montante composto, por sua vez, é denominado Valor Futuro (*FV*) e, assim como no regime de juros simples, também corresponde à soma do capital aplicado aos juros gerados. Sua fórmula é a seguinte: $FV = PV * (1 + i)^n$.

Desse modo, o *Juro Composto Intervalar* será calculado da seguinte maneira:

$$[J_1;J_2] = [PV_1;PV_2] * \left([1;1] + [i_1;i_2]\right)^n - [1;1]$$
$$[J_1;J_2] = [PV_1;PV_2] * [(1+i_1);(1+i_2)]^n - [1;1]$$

É importante observar que o intervalo $[(1+i_1);(1+i_2)]^n$ sempre cairá em um mesmo caso da Função Potência Intervalar:

$$F(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n = \begin{cases} [0;max(|a|,|b|)^n], se\ n\ é\ par\ e\ 0 \in A \\ [b^n;a^n], se\ n\ é\ par\ e\ b < 0 \\ \mathbf{[a^n;b^n],\ senão.} \end{cases}$$

Em que A é um intervalo de números reais pertencente ao conjunto IR.

Ou seja, como é inerente da função somar o valor da taxa de juros *i* com o número um, sempre se obterá um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para o limite superior, visto que a taxa de juros nunca portará valor negativo. Dessa forma, a resolução do intervalo sempre cairá na terceira situação: $[a^n; b^n]$. Assim,

$$[J_1; J_2] = [PV_1; PV_2] * [(1+i_1)^n; (1+i_2)^n] - [1;1]$$
$$[J_1; J_2] = [PV_1 * (1+i_1)^n;\ PV_2 * (1+i_2)^n] - [1;1]$$
$$[J_1; J_2] = [PV_1 * ((1+i_1)^n - 1); PV_2 * ((1+i_2)^n - 1)]$$

E a fórmula para o cálculo do *Juro Composto Intervalar* é dada a seguir:

$$\mathbf{[J_1; J_2] = [PV_1 * ((1+i_1)^n - 1);\ PV_2 * ((1+i_2)^n - 1)]} \qquad (63)$$

Em que J_1 e J_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao valor dos juros compostos; PV_1 e PV_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao capital inicial ou valor presente e i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de juros compostos.

O *Valor Futuro Intervalar*, por sua vez, é calculado do seguinte modo:

$$[FV_1; FV_2] = [PV_1; PV_2] * \left([1;1] + [i_1; i_2]\right)^n$$
$$[FV_1; FV_2] = [PV_1; PV_2] * [(1+i_1); (1+i_2)]^n$$

Novamente, a resolução de $[(1+i_1);(1+i_2)]^n$ sempre cairá no caso $[a^n; b^n]$ da Função Potência Intervalar (30), uma vez que tanto o limite inferior $(1+i_1)$ quanto o limite superior $(1+i_2)$ do intervalo portam valor positivo. Assim,

$[FV_1;FV_2] = [PV_1;PV_2] * [(1+i_1)^n;(1+i_2)^n]$

$[FV_1;FV_2] = [PV_1 * (1+i_1)^n;PV_2 * (1+i_2)^n]$

A fórmula para o cálculo do *Valor Futuro Intervalar* é dada a seguir:

$$\mathbf{[FV_1;FV_2] = [PV_1 * (1+i_1)^n;PV_2 * (1+i_2)^n]} \tag{64}$$

Em que FV_1 e FV_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao valor futuro (montante); PV_1 e PV_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao capital inicial ou valor presente e i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de juros compostos.

Exemplo: Uma pessoa deseja ter conhecimento de quanto, em média, deve investir na poupança, atualmente, a fim de ter condições de pagar sua viagem a Lisboa planejada para daqui a cinco anos. Para tal, ela leva em consideração que terá gastos com passagens (ida e volta), hospedagem, passeios, compras, alimentação e um capital de reserva para ocasiões de emergência, considerando que sua viagem terá a duração de três semanas. Entretanto, o valor desses gastos daqui a cinco anos sofrerá alterações de acordo com o mercado, como por exemplo, alterações inflacionárias e alterações no valor do euro. Existem, também, possíveis alterações com relação ao risco (sensibilidade) inerente de cada componente do custo da viagem. Por exemplo, no caso da passagem, o seu preço varia conforme sua disponibilidade em época de compra (baixa ou alta estação). Assim, a pessoa em questão deve fazer uma projeção embasando-se nas estimativas de seus gastos futuros.

Além disso, a taxa de juros *i* obtida pela poupança também sofrerá variações, uma vez que oscila diariamente de acordo com as condições do mercado. Dessa forma, tanto o valor futuro da operação (montante) quanto o valor da taxa de juros *i* da poupança serão demonstrados por intervalos a fim de representar a variabilidade e imprecisão de tais fatores.

A seguir, segue um modelo da estimativa dos custos que a pessoa deverá arcar para realizar sua viagem a Lisboa daqui a cinco anos:

Custos	**Estimativas de Valor (em R$)**
Passagens (ida e volta)	[2.150,17; 2.480,76]
Hospedagem	[1.638,60; 1.890,00]
Passeios	[1.030,00; 1.100,00]
Alimentação	[1.650,00; 1.890,00]
Compras	[889,00; 1.200,00]
Capital de reserva	[700,00; 930,00]
TOTAL	**[8.057,77; 9.490,76]**

Tabela 4.1: estimativa de gastos da viagem

Feita a estimativa dos gastos da viagem, é necessário que se faça uma estimativa de quanto o rendimento da poupança irá oscilar a cada ano. Supõe-se, então, que a cada ano a poupança renda entre 8% e 10%. Assim, tem-se que:

$[FV_1;FV_2]$ = [8.057,77; 9.490,76]

$[i_1;i_2]$ = [0,08; 0,10]

$[n_1;n_2]$ = [5; 5]

$[PV_1;PV_2]$ = ?

$$[FV_1;FV_2] = [PV_1 * (1+i_1)^n ; PV_2 * (1+i_2)^n]$$

$$[8.057,77; 9.490,76] = [PV_1 * (1 + 0,08)^5; PV_2 * (1 + 0,1)^5]$$

Nesse caso, tem-se uma igualdade entre intervalos, vista no segundo capítulo, em que sejam A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] dois intervalos de IR, então A = B se, e somente se, *a* = *c* e *b* = *d*. Assim, tem-se:

(a) $8.057,77 = PV_1 * (1 + 0,08)^5$
(b) $9.490,76 = PV_2 * (1 + 0,10)^5$

1º) Cálculo da equação (a):

$8.057,77 = PV_1 * (1 + 0,08)^5$

$8.057,77 = PV_1 * 1,469328$

$$PV_1 = \frac{8.057,77}{1,469328}$$

$PV_1 = 5.483,9831$

2º) Cálculo da equação (b):

$9.490,76 = PV_2 * (1 + 0,10)^5$

$9.490,76 = PV_2 * 1,61051$

$$PV_2 = \frac{9.490,76}{1,61051}$$

$PV_2 = 5.893,0152$

Desse modo, $[PV_1; PV_2]$ = [5.483,9831; 5.893,0152]. Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [5.483,98; 5.893,02].

Isso significa dizer que com um investimento abaixo de R$5.483,98, feito atualmente, a pessoa não conseguirá capital suficiente para efetivar sua viagem daqui a cinco anos. Já acima de R$5.893,02 ela, provavelmente, de acordo com as estimativas sobre os custos da viagem, obterá a quantia necessária.

Para saber o valor dos juros obtidos no final desses cinco anos, utiliza-se a fórmula do *Juro Composto Intervalar*:

$$[J_1;J_2] = [PV_1 * ((1+i_1)^n - 1); PV_2 * ((1+i_2)^n - 1)]$$

$$[J_1;J_2] = [5.483,98 * ((1+0,08)^5 - 1);\ 5.893,02 * ((1+0,1)^5 - 1)]$$

$$[J_1;J_2] = [5.483,98 * (1,469328 - 1);\ 5.893,02 * (1,61051 - 1)]$$

$$[J_1;J_2] = [2.573,7853;\ 3.597,7476]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo: [2.573,78; 3.597,75].

A fim de se verificar a veracidade dos resultados obtidos, utiliza-se a definição do valor futuro, o qual equivale à soma do capital (valor presente) com os juros incididos sobre ele. Desse modo, tem-se que:

$$[FV_1;FV_2] = [PV_1;PV_2] + [J_1;J_2]$$

$$[FV_1;FV_2] = [5.483,9831; 5.893,0152] + [2.573,7853;\ 3.597,7476]$$

$$[FV_1;FV_2] = [8.057,7684; 9.490,7628]$$

Utilizando-se arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [8.057,76; 9.490,77], o qual equivale ao valor do montante intervalar projetado pela pessoa em questão.

4.2.2 Fluxo de Caixa Intervalar

Como visto anteriormente, o fluxo de caixa corresponde a uma previsão das entradas e saídas dos recursos monetários de uma empresa durante determinado período. Dessa forma, o controlador de fluxo de caixa deve ser idôneo de ter uma visão geral sobre todas as funções da empresa, como por exemplo, pagamentos, recebimentos, compra de matéria-prima, salários e outros, uma vez que é imprescindível prever o que se poderá gastar no futuro dependendo do que se consome atualmente. Essa previsão deve ser feita com base nos dados levantados nas projeções econômico-financeiras atuais da empresa, levando em consideração, contudo, a memória de dados que respaldará essa mesma previsão [55].

O principal objetivo de se desenvolver o fluxo de caixa de uma empresa é fornecer informações para a tomada de decisões, tais como prognosticar as necessidades de captação de recursos, bem como prever os períodos em que haverá sobras ou necessidades desses recursos.

> O planejamento financeiro determina as diretrizes de mudança numa empresa. É necessário porque faz com que sejam estabelecidas as metas da empresa para motivar a organização e gerar marcos de referência para a avaliação de desempenho. As decisões de investimento e financiamento da empresa não são independentes, sendo necessário identificar sua interação, e num mundo incerto, a empresa deve esperar mudanças de condições, bem como surpresas [51].

Assim, é essencial que essas previsões sejam feitas da forma mais realista possível, uma vez que estimações feitas de forma errônea podem acarretar em resultados desastrosos, através de decisões equivocadas.

Uma solução a fim de se obter uma maior qualidade das estimações de entradas e saídas de caixa seria, então, a adesão aos conceitos intervalares, uma vez que especulações seriam tratadas na forma de intervalos, fato que acarretaria em cálculos mais seguros e, conseqüentemente, em um aperfeiçoamento dos resultados empresariais.

Exemplo: A seguir segue um modelo e fluxo de caixa baseado em previsões.

PREVISÕES DE ENTRADAS E SAÍDAS DE CAIXA		
Ano 2008	**Janeiro**	**Fevereiro**
Saldo Inicial de Caixa (R$)	**[2.300,00; 2.300,00]**	**[5.970,00; 7.610,00]**
Estimativas das Entradas de Caixa		
Vendas	[8.000,00; 8.900,00]	[8.000,00; 9.000,00]
Outros	[500,00; 590,00]	[600,00; 650,00]
TOTAL DE ENTRADAS (R$)	**[8.500,00; 9.490,00]**	**[8.600,00; 9.650,00]**
Estimativas das Saídas de Caixa		
Compras	[1.200,00; 1.700,00]	[1.100,00; 1.300,00]
Aluguel	[400,00; 400,00]	[400,00; 400,00]
Salários	[1.800,00; 1.800,00]	[1.800,00; 1.800,00]
Despesas	[210,00; 280,00]	[220,00; 290,00]
Água, luz e telefone	[360,00; 400,00]	[360,00; 400,00]
Outros	[210,00; 250,00]	[320,00; 400,00]
TOTAL DE SAÍDAS (R$)	**[4.180,00; 4.830,00]**	**[4.200,00; 4.590,00]**
SALDO FINAL (R$)	**[5.970,00; 7.610,00]**	**[9.980,00; 13.060,00]**

Tabela 4.2: exemplo Fluxo de Caixa Intervalar

É importante mencionar que a variável cuja determinação não possa ser feita com total precisão será representada por um intervalo, no qual ela ocorra com determinada margem de segurança, como por exemplo, os valores das contas de água, luz e telefone, os quais variam todo mês conforme o consumo. Variáveis que não se encaixam nesse perfil, ou seja, portadoras de valores pontuais, terão tais valores transformados em intervalos degenerados, como é o caso do valor do aluguel e dos salários pagos aos funcionários.

O saldo final esperado de cada mês é obtido a partir do seguinte cálculo:

$$\textbf{\textit{Saldo Final Esperado}} = \textbf{\textit{Total de Entradas}} - \textbf{\textit{Total de Saídas}} + \textbf{\textit{Saldo Inicial}} \quad (65)$$

- Cálculo do saldo final esperado do mês de janeiro:

= [8.500,00; 9.490,00] - [4.180,00; 4.830,00] + [2.300,00; 2.300,00]
= [3.670,00; 5.310,00] + [2.300,00; 2.300,00]
= **[5.970,00; 7.610,00]**

- Cálculo do saldo final esperado do mês de fevereiro:

= [8.600,00; 9.650,00] - [4.200,00; 4.590,00] + [5.970,00; 7.610,00]
= [4.010,00; 5.450,00] + [5.970,00; 7.610,00]
= **[9.980,00; 13.060,00]**

4.2.3 Taxas Intervalares de Juros

As taxas de juros são determinadas no mercado financeiro, basicamente, em função da oferta e procura de recursos financeiros. Entretanto, quanto maior for a incerteza do retorno do capital investido (em conseqüência do prazo, ambiente econômico, etc.), maior deverá ser a taxa de juro [25].

Uma taxa de juros, quando eficiente, deve remunerar [3]: o risco envolvido no investimento, uma vez que de investimentos mais arriscados devem-se exigir taxas de juros proporcionalmente maiores; as expectativas inflacionárias, que representam a perda do poder aquisitivo; o lucro exigido pelo credor, que representa uma compensação pela não aplicação do dinheiro em outro investimento; os diversos custos administrativos envolvidos na operação.

O conceito de valor do dinheiro no tempo decorre da constatação de que uma unidade monetária hoje vale mais do que uma unidade monetária amanhã, independente da inflação e da taxa de câmbio apuradas no período. A taxa de juros é importante por refletir logicamente esse conceito [3].

Algumas taxas de juros são consideradas flutuantes ou variáveis, visto que oscilam a cada período de capitalização, ou seja, são fixadas novas taxas a cada período de capitalização embasando-se em alguma taxa referencial de juro previamente combinada, como por exemplo, a Libor, Taxa Anbid, TR, etc.

Um exemplo prático seria o caso de uma operação de empréstimo estrangeiro com três anos de prazo sendo utilizada uma taxa de juro básica correspondente à taxa Libor (*London Interbank Offered Rate*) semestral, acrescida de *spread* fixo de 1% ao ano, durante todo o prazo da operação. Nesse caso, os juros seriam pagos a cada seis meses e a taxa de juros poderia variar a cada período de capitalização (semestral, no caso), em função da Libor praticada pelo mercado no início de cada período de capitalização [25].

Situação parecida ocorre com a taxa de juros da poupança, a qual é definida como sendo 0,5% ao mês mais a TR (taxa referencial), informada diariamente pelo Banco Centra do Brasil.

Nesses casos, por se tratarem de estimativas e não se conhecendo, exatamente, o valor com o qual se deva trabalhar, seria mais viável a utilização de conceitos intervalares, uma vez que se teria a garantia de que o valor real estaria contido no intervalo obtido como solução, de acordo com as estimativas realizadas.

4.2.3.1 Taxa Efetiva Intervalar

A taxa efetiva ocorre quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele ao qual a taxa está referida. Esse tipo de taxa equivale ao processo de formação de juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização. Em outras palavras, é a taxa de juro do período de capitalização que, efetivamente, será aplicada sobre o capital, independente da taxa nominal contratada.

Na matemática financeira tradicional, sua obtenção é possível através da seguinte fórmula: $(e) = (1 + i)^q - 1$, em que q representa o número de períodos de capitalização dos juros.

Desse modo, a *Taxa Efetiva Intervalar* pode ser obtida pelo seguinte cálculo:

$$[e_1;e_2] = ([1;1] + [i_1;i_2])^q - [1;1]$$

$$[e_1;e_2] = [(1+i_1);(1+i_2)]^q - [1;1]$$

No caso de $[(1+i_1);(1+i_2)]^q$, como é próprio da função somar o valor da taxa de juros i com o número um, sempre se obterá um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para o limite superior, posto que a taxa de juros nunca portará valor negativo. Dessa maneira, a resolução do intervalo $[(1+i_1);(1+i_2)]^q$ sempre cairá na terceira situação $[a^n;b^n]$ da Função Potência Intervalar (30). Logo,

$$[e_1;e_2] = [(1+i_1);(1+i_2)]^q - [1;1]$$

$$[e_1;e_2] = [(1+i_1)^q;(1+i_2)^q] - [1;1]$$

$$[e_1;e_2] = [(1+i_1)^q - 1;(1+i_2)^q - 1]$$

A fórmula da *Taxa Efetiva Intervalar* é dada a seguir:

$$\mathbf{[e_1;e_2] = [(1+i_1)^q - 1;(1+i_2)^q - 1]} \qquad (66)$$

Em que e_1 e e_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa efetiva, ao passo que i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente à taxa nominal de juros.

Exemplo: Estima-se que uma aplicação na poupança paga juros anuais entre 8% e 10% com capitalização mensal entre 0,66% e 0,84%, uma vez que:

$$\frac{[8;10]}{[12;12]} = \left[min\left(\frac{8}{12},\frac{8}{12},\frac{10}{12},\frac{10}{12}\right); max\left(\frac{8}{12},\frac{8}{12},\frac{10}{12},\frac{10}{12}\right)\right] = [0,6666666, 0,8333333]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [0,66; 0,84].

Dessa forma, a *Taxa Efetiva Intervalar* dessa aplicação é dada por:

$[i_1;i_2] = [0,0066;\ 0,0084]$

q = 1 ano (12 meses)

$$[e_1;e_2] = [(1+i_1)^q - 1; (1+i_2)^q - 1]$$

$$[e_1;e_2] = [(1+0,0066)^{12} - 1; (1+0,0084)^{12} - 1]$$

$$[e_1;e_2] = [(1,0821391584 - 1); (1,1055898528 - 1)]$$

$$[e_1;e_2] = [0,0821391584; 0,1055898528]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [0,08; 0,11]. Isso significa dizer que a taxa efetiva estará, provavelmente, de acordo com as estimativas de rendimento da poupança, entre 8% e 11% ao ano.

4.2.3.2 Taxa Intervalar de Inflação

Como já foi visto, a inflação corresponde a um processo pelo qual ocorre aumento generalizado nos preços dos bens e serviços, acarretando na perda do poder aquisitivo da moeda. Há vários fatores que podem gerar inflação. O aumento muito grande do preço de um item básico na economia pode contaminar os demais preços provocando uma alta generalizada. É o caso do petróleo e da energia elétrica, por exemplo. O excesso de consumo também provoca inflação, visto que os produtos tornam-se escassos, ocasionando aumento de seus preços. Em outra hipótese, se o governo gasta mais do que arrecada, e para pagar suas contas emite papel-moeda, provoca inflação, pois está desvalorizando a moeda, uma vez que criou dinheiro novo sem lastro, sem garantia, sem que tenha havido criação de riqueza, de produção [43].

Para entender como os conceitos intervalares podem ser aderidos ao cálculo da taxa de inflação, segue o exemplo:

Exemplo: Denomina-se “cesta de consumo” um conjunto de produtos e serviços (muito maior em casos reais) obtidos através de estudos que visam estimar o consumo de produtos em nível domiciliar. Supõe-se, então, que uma cesta de consumo para uma família hipotética contenha os seguintes itens:

ITENS DA CESTA DE CONSUMO
Arroz
Feijão
Carne
Leite
Óleo

Tabela 4.3: cesta de consumo hipotética

A fim de se obter uma estimativa na variação dos preços dos itens componentes da cesta, foram selecionadas cinco amostras, as quais representam cinco diferentes estabelecimentos (E), sendo os mais representativos no mercado.

Primeiramente, é obtido, no primeiro dia do mês, o preço cobrado por cada estabelecimento para cada item da cesta.

Medição de Preços – dia 1º					
ITENS	**E1 (R$)**	**E2 (R$)**	**E3 (R$)**	**E4 (R$)**	**E5 (R$)**
Arroz (kg)	1,40	1,42	1,38	1,45	1,42
Feijão (kg)	2,45	2,45	2,37	2,29	2,49
Carne (kg)	7,30	7,10	6,90	7,00	7,31
Leite (litro)	2,10	2,25	2,50	2,25	2,12
Óleo (litro)	2,50	2,40	2,40	3,00	2,46

Tabela 4.4: preço dos produtos no primeiro dia do mês

Feito isso, é preciso medir o valor dos produtos novamente no último dia do mês para que seja calculada a variação dos preços nesse período.

Medição de Preços – dia 30					
ITENS	**E1 (R$)**	**E2 (R$)**	**E3 (R$)**	**E4 (R$)**	**E5 (R$)**
Arroz (kg)	1,42	1,43	1,38	1,44	1,43
Feijão (kg)	2,47	2,48	2,39	2,30	2,50
Carne (kg)	7,30	7,20	7,00	7,00	7,31
Leite (litro)	2,15	2,28	2,57	2,28	2,15
Óleo (litro)	2,50	2,39	2,40	3,10	2,48

Tabela 4.5: preço dos produtos no último dia do mês

Sabendo-se os valores iniciais e finais dos itens componente da cesta, pode-se, então, calcular a variação de seus preços, ou seja, a taxa de inflação para o período.

A taxa de inflação é calculada através da fórmula:

$$(I) = \left(\frac{P_1}{P_0} - 1\right) * 100\% \tag{67}$$

Em que P_0 é o preço do produto no período inicial (dia 1º) e P_1 equivale ao preço do produto no período final (dia 30).

Dessa forma, tem-se:

Taxas de Inflação					
ITENS	**E1 (%)**	**E2 (%)**	**E3 (%)**	**E4 (%)**	**E5 (%)**
Arroz (kg)	1,42857	0,70422	0	-0,68966	0,70422
Feijão (kg)	0,81632	1,22448	0,84388	0,43668	0,4016
Carne (kg)	0	1,40845	1,44927	0	0
Leite (litro)	2,38095	1,33333	2,8	1,33333	1,41509
Óleo (litro)	0	-0,41667	0	3,33333	0,813

Tabela 4.6: inflação para o período (mês)

Calculadas as taxas de inflação do período para cada produto componente da cesta, obtêm-se os intervalos correspondentes a essa variação. Ou seja, obtém-se um intervalo para cada produto, cuja menor taxa representa seu limite inferior e a maior taxa o seu limite superior.

ITENS	Intervalos correspondentes à variação dos preços
Arroz (kg)	[-0,68966%; 1,42857%]
Feijão (kg)	[0,4016%; 1,22448%]
Carne (kg)	[0%; 1,44927%]
Leite (litro)	[1,33333%; 2,8%]
Óleo (litro)	[-0,41667%; 3,33333%]
TOTAL	**[0,6286%; 10,23565%]**

Tabela 4.7: intervalos de taxa de inflação

Feito isso, pode-se calcular a *Taxa Intervalar de Inflação* do período através da média aritmética dos intervalos correspondentes à variação dos preços. Assim, tem-se que:

$$Taxa\ Intervalar\ de\ Inflação = \frac{[0{,}6286; 10{,}23565]}{[5; 5]}$$

$$Taxa\ Intervalar\ de\ Inflação = [0{,}12572; 2{,}04713]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [0,12; 2,05]. Isso significa dizer que a taxa de inflação real está entre 0,12% e 2,05% para o período.

4.2.3.3 Taxa Real Intervalar

Na matemática financeira tradicional, a taxa real equivale à taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período de operação. Em outras palavras, ela expurga o efeito inflacionário. Um aspecto interessante sobre esse tipo de taxa de juros é que elas podem ser, inclusive, negativas.

Seu valor é obtido através da seguinte expressão: $(r) = \left(\frac{1+i}{1+I}\right) - 1$, em que *i* representa a taxa nominal e *I* representa a taxa de inflação.

Desse modo, o valor da *Taxa Real Intervalar* pode ser obtido fazendo-se os seguintes cálculos:

$$[r_1;r_2] = \left(\frac{[1;1]+[i_1;i_2]}{[1;1]+[I_1;I_2]}\right) - [1;1]$$

$$[r_1;r_2] = \left(\frac{[(1+i_1);(1+i_2)]}{[(1+I_1);(1+I_2)]}\right) - [1;1]$$

$$[r_1;r_2] = \left[\frac{1+i_1}{1+I_2};\frac{1+i_2}{1+I_1}\right] - [1;1]$$

$$[r_1;r_2] = \left[\left(\frac{1+i_1}{1+I_2}\right) - 1;\left(\frac{1+i_2}{1+I_1}\right) - 1\right]$$

E a fórmula da *Taxa Real Intervalar* é dada a seguir:

$$\mathbf{[r_1;r_2]} = \left[\left(\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{i_1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{I_2}}\right) - \mathbf{1};\left(\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{i_2}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{I_1}}\right) - \mathbf{1}\right] \qquad (68)$$

Em que r_1 e r_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa real; i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente à taxa nominal de juros e I_1 e I_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de inflação.

Exemplo: Se um capital for aplicado por um ano a uma taxa de juros nominal flutuante estimada entre 10% e 12% ao ano e a inflação esperada para esse período for entre 7% e 8%, qual será a *Taxa Real Intervalar* de juros?

$[i_1; i_2] = [0{,}10; 0{,}12]$

$[I_1; I_2] = [0{,}07; 0{,}08]$

$$[r_1; r_2] = \left[\left(\frac{1+i_1}{1+I_2}\right) - 1; \left(\frac{1+i_2}{1+I_1}\right) - 1\right]$$

$$[r_1; r_2] = \left[\left(\frac{1+0{,}10}{1+0{,}08}\right) - 1; \left(\frac{1+0{,}12}{1+0{,}07}\right) - 1\right]$$

$$[r_1; r_2] = [0{,}0185185; 0{,}0467289]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [0,01; 0,05]. Isso equivale dizer que a taxa real de juros para a operação estará, provavelmente, de acordo com as estimativas de rendimento da aplicação e taxa de inflação, entre 1% e 5%.

4.2.4 Descontos Intervalares

Quando uma dívida é contratada, geralmente é escriturado um documento garantindo a operação o qual é denominado título de crédito. São exemplos de títulos de crédito a nota promissória, a duplicata, a letra de câmbio e o cheque pré-datado.

A operação de se liquidar um título antes de seu vencimento envolve uma recompensa, ou um desconto pelo pagamento antecipado. Assim, desconto pode ser entendido como a diferença entre o valor nominal de um título e seu valor atual apurado *n* períodos antes de seu vencimento, como já foi visto.

Uma maneira pela qual podem ser aderidos os conceitos intervalares aos descontos bancários é através de empresas que mantêm vendas a prazo. Estas, por sua vez, podem negociar com o banco uma modificação da taxa de desconto cobrada em virtude da alteração no volume desse tipo de venda.

Por exemplo, quanto maior o número de vendas a prazo, maior será o recebimento de títulos de crédito pela empresa. Sendo esse número maior, ela pode negociar melhores taxas nas operações de desconto de títulos de crédito.

Nesse caso, a empresa poderá apresentar um projeto ao banco com suas novas estimativas de vendas a prazo para que lhe possa ser concedida uma nova taxa de desconto. Assim, como a taxa cobrada pelo banco é pré-fixada, os conceitos intervalares podem ser inseridos nas especulações sobre as vendas a prazo incluídas no plano apresentado, uma vez que não há total precisão sobre a quantidade que será vendida. Dessa forma, é possível se obter, na forma de um intervalo, uma média do valor do desconto que será cobrado pelo banco através das estimativas do volume de vendas a prazo.

4.2.4.1 Desconto Simples Intervalar

4.2.4.1.1 Desconto Racional Simples Intervalar ("por dentro")

Na matemática financeira tradicional, a fórmula do desconto racional simples é dada através da seguinte expressão: $D_r = V_r * i * n$, em que D_r corresponde ao desconto racional, V_r corresponde ao valor descontado racional (ou valor atual) na data da operação, i à uma taxa simples de juros (desconto) e n ao prazo de antecipação. Sabe-se também que o valor de V_r pode ser obtido através do seguinte cálculo: $N = V_r (1 + i * n)$. Dessa maneira, o *Desconto Racional Simples Intervalar* pode ser determinado como segue:

1º) A fim de se obter o valor de V_r *Intervalar* faz-se o seguinte cálculo:

$$[N_1;N_2] = [Vr_1;Vr_2] * \left([1;1] + ([i_1;i_2] * [n_1;n_2])\right)$$

$$[N_1;N_2] = [Vr_1;Vr_2] * \left([1;1] + [(i_1 * n_1);(i_2 * n_2)]\right)$$

$$[N_1;N_2] = [Vr_1;Vr_2] * [1 + (i_1 * n_1); 1 + (i_2 * n_2)]$$

$$\mathbf{[N_1;N_2] = [Vr_1 * (1 + (i_1 * n_1)); Vr_2 * (1 + (i_2 * n_2))]} \tag{69}$$

2º) Cálculo de D_r *Intervalar*:

$$[Dr_1;Dr_2] = [Vr_1;Vr_2] * [i_1;i_2] * [n_1;n_2]$$

$$[Dr_1;Dr_2] = [Vr_1;Vr_2] * [(i_1 * n_1);(i_2 * n_2)]$$

$$[Dr_1;Dr_2] = [(Vr_1 * i_1 * n_1);(Vr_2 * i_2 * n_2)]$$

A fórmula para o cálculo do *Desconto Racional Simples Intervalar* é dada a seguir:

$$\mathbf{[Dr_1;Dr_2] = [(Vr_1 * i_1 * n_1);(Vr_2 * i_2 * n_2)]} \tag{70}$$

Em que Dr_1 e Dr_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao desconto racional simples; Vr_1 e Vr_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao valor atual na data de operação; i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente à taxa de desconto simples e n_1 e n_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo que corresponde ao prazo de antecipação da dívida.

Exemplo: A dona de uma loja de roupas femininas vende por mês, normalmente, uma média entre R$3.000,00 e R$3.800,00 com relação a vendas a prazo. O acordo que ela mantém com o banco é o de pagar uma taxa de juros simples pré-fixada de 1% ao mês para esse tipo de venda.

Com a chegada do final de ano, ela fez uma projeção de que suas vendas a prazo iriam aumentar e, assim, estariam entre R$4.500,00 e R$6.000,00 nos últimos três meses do ano, nos quais o movimento é excessivamente maior. Apresentando esse projeto ao banco, ela conseguiu uma redução da sua taxa de desconto para 0,8% por mês para esse período.

Ela deseja saber, de acordo com a nova taxa de desconto cobrada e com a sua estimativa para vendas futuras, quanto, em média, será o valor do desconto sobre suas vendas a prazo se ela antecipar o resgate da dívida. Assim, o *Desconto Racional Simples Intervalar* é calculado como segue:

$[N_1; N_2] = [4.500; 6.000]$

$[i_1; i_2] = [0,008; 0,008]$

$[n_1; n_2] = [3; 3]$

$[Dr_1; Dr_2] = ?$

Para o cálculo de $[Dr_1; Dr_2]$, é necessário que antes seja calculado o intervalo $[Vr_1; Vr_2]$, equivalente ao valor atual na data de operação. Assim,

$$[N_1; N_2] = [Vr_1 * (1 + (i_1 * n_1)); Vr_2 * (1 + (i_2 * n_2))]$$

$$[4.500; 6.000] = [Vr_1 * (1 + (0,008 * 3)); Vr_2 * (1 + (0,008 * 3))]$$

Nesse caso, tem-se uma igualdade entre intervalos, vista no segundo capítulo, em que sejam A = [*a*; *b*] e B = [*c*; *d*] dois intervalos de IR, então A = B se, e somente se, *a* = *c* e *b* = *d*. Dessa forma:

(a) 4.500 = $Vr_1 * (1 + (0{,}008 * 3))$

(b) 6.000 = $Vr_2 * (1 + (0{,}008 * 3))$

1º) Cálculo da equação (a):

4.500 = $Vr_1 * (1 + (0{,}008 * 3))$

4.500 = $Vr_1 * 1{,}024$

$$Vr_1 = \frac{4.500}{1{,}024}$$

$$Vr_1 = 4.394{,}5312$$

2º) Cálculo da equação (b):

6.000 = $Vr_2 * (1 + (0{,}008 * 3))$

6.000 = $Vr_2 * 1{,}024$

$$Vr_2 = \frac{6.000}{1{,}024}$$

$$Vr_2 = 5.859{,}375$$

Assim, tem-se que $[Vr_1; Vr_2] = [4.394{,}5312; 5.859{,}375]$. Calculado o valor de $[Vr_1; Vr_2]$, é possível que se calcule $[Dr_1; Dr_2]$, como segue:

$$[Dr_1; Dr_2] = [(Vr_1 * i_1 * n_1); (Vr_2 * i_2 * n_2)]$$

$$[Dr_1; Dr_2] = [(4.394{,}5312 * 0{,}008 * 3); (5.859{,}375 * 0{,}008 * 3)]$$

$$[Dr_1; Dr_2] = [105{,}46874; 140{,}625]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [105,46; 140,63]. Ou seja, o valor do desconto cobrado pelo banco estará, provavelmente, dentro do intervalo [105,46; 140,63].

A fim de se verificar a veracidade dos resultados obtidos, utiliza-se a definição de valor nominal, o qual equivale à soma do valor descontado com o desconto. Desse modo, tem-se que:

$$[N_1; N_2] = [Vr_1; Vr_2] + [Dr_1; Dr_2]$$

$$[N_1; N_2] = [4.394,5312; 5.859,375] + [105,46874; 140,625]$$
$$[N_1; N_2] \cong [4.500,00; 6.000,00]$$

4.2.4.1.2 Desconto Bancário ou Comercial Simples Intervalar ("por fora")

Da mesma forma que o desconto racional simples, o desconto bancário ou comercial simples também incorpora os conceitos de juros simples. Entretanto, diferentemente daquele, apura os encargos sobre o valor futuro.

Sabe-se que o desconto bancário ou comercial simples da matemática financeira tradicional é obtido através da seguinte expressão: $D_c = N * i * n$, em que D_c é o desconto comercial ou bancário, N o valor nominal do título de crédito, i a taxa de desconto periódica e n o prazo de antecipação definido para o desconto.

Dessa maneira, o *Desconto Bancário ou Comercial Simples Intervalar* é calculado como segue:

$$[Dc_1; Dc_2] = [N_1; N_2] * [i_1; i_2] * [n_1; n_2]$$
$$[Dc_1; Dc_2] = [N_1; N_2] * [(i_1 * n_1); (i_2 * n_2)]$$
$$[Dc_1; Dc_2] = [(N_1 * i_1 * n_1); (N_2 * i_2 * n_2)]$$

A fórmula do *Desconto Bancário ou Comercial Simples Intervalar* é dada a seguir:

$$[Dc_1 ; Dc_2] = [(N_1 * i_1 * n_1) ; (N_2 * i_2 * n_2)] \quad (71)$$

Em que Dc_1 e Dc_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao desconto bancário ou comercial simples; N_1 e N_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao valor nominal do título de crédito; i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente à taxa de desconto simples e n_1 e n_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo que corresponde ao prazo de antecipação definido para o desconto.

Exemplo: Utilizando o mesmo exemplo do tópico *Desconto Racional Simples Intervalar*: a dona de uma loja de roupas femininas vende, normalmente, uma média entre R$3.000,00 e R$3.800,00 com relação a vendas a prazo. O acordo que ela mantém com o banco é o de pagar uma taxa de juros simples pré-fixada de 1% ao mês para esse tipo de venda.

Com a chegada do final de ano, ela fez uma projeção de que suas vendas a prazo iriam aumentar e, assim, estariam entre R$4.500,00 e R$6.000,00 nos últimos três meses do ano, nos quais o movimento é excessivamente maior. Apresentando esse projeto ao banco, ela conseguiu uma redução da sua taxa de desconto para 0,8% por mês para esse período.

Ela deseja saber, de acordo com a nova taxa de desconto cobrada e com a sua estimativa para vendas futuras, quanto, em média, será o valor do desconto sobre suas vendas a prazo se ela antecipar o resgate da dívida.

Assim, o *Desconto Bancário ou Comercial Simples Intervalar* é calculado da seguinte forma:

$[N_1; N_2]$ = [4.500; 6.000]

$[i_1; i_2]$ = [0,008; 0,008]

$[n_1; n_2]$ = [3; 3]

$[Dc_1; Dc_2]$ = ?

$$[Dc_1; Dc_2] = [(N_1 * i_1 * n_1); (N_2 * i_2 * n_2)]$$

$$[Dc_1; Dc_2] = [(4.500 * 0{,}008 * 3); (6.000 * 0{,}008 * 3)]$$

$$[Dc_1; Dc_2] = [108{,}00; 144{,}00]$$

Isso significa dizer que o intervalo $[108{,}00; 144{,}00]$ contém, provavelmente, o valor real do desconto que será cobrado pelo banco à dona da loja, de acordo com as estimativas de vendas a prazo.

4.2.4.2 Desconto Composto Intervalar

4.2.4.2.1 Desconto Racional Composto Intervalar ("por dentro")

Na matemática financeira tradicional, a fórmula para o cálculo do desconto racional composto é dada a seguir: $D_r = N * \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$, em que D_r equivale ao valor do desconto racional composto, N equivale ao valor nominal do título de crédito, i corresponde à taxa de desconto racional e n ao prazo de antecipação da dívida.

Assim, o *Desconto Racional Composto Intervalar* é calculado da seguinte maneira:

$$[Dr_1; Dr_2] = [N_1; N_2] * \left([1;1] - \frac{[1;1]}{([1;1] + [i_1; i_2])^n} \right)$$

$$[Dr_1; Dr_2] = [N_1; N_2] * \left([1;1] - \frac{[1;1]}{[(1+i_1);(1+i_2)]^n} \right)$$

No caso de $[(1+i_1);(1+i_2)]^n$, como é inerente da função somar o valor da taxa de juros *i* com o número um, sempre se obterá um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para o limite superior, visto que a taxa de juros nunca portará valor negativo. Dessa forma, a resolução do intervalo $[(1+i_1);(1+i_2)]^n$ sempre cairá na terceira situação $[a^n; b^n]$ da Função Potência Intervalar (30). Desse modo,

$$[Dr_1; Dr_2] = [N_1; N_2] * \left([1;1] - \frac{[1;1]}{[(1+i_1)^n;(1+i_2)^n]} \right)$$

$$[Dr_1; Dr_2] = [N_1; N_2] * \left([1;1] - \left[\frac{1}{(1+i_2)^n}; \frac{1}{(1+i_1)^n} \right] \right)$$

$$[Dr_1; Dr_2] = [N_1; N_2] * \left[1 - \frac{1}{(1+i_1)^n};\ 1 - \frac{1}{(1+i_2)^n} \right]$$

$$[Dr_1; Dr_2] = \left[N_1 * \left(1 - \frac{1}{(1+i_1)^n} \right); N_2 * \left(1 - \frac{1}{(1+i_2)^n} \right) \right]$$

A fórmula do *Desconto Racional Composto Intervalar* é dada a seguir:

$$\mathbf{[Dr_1; Dr_2] = \left[N_1 * \left(1 - \frac{1}{(1+i_1)^n} \right); N_2 * \left(1 - \frac{1}{(1+i_2)^n} \right) \right]} \quad (72)$$

Em que Dr_1 e Dr_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao desconto racional composto; N_1 e N_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao valor nominal do título de crédito e i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente à taxa de desconto composto.

Exemplo: O dono de uma loja de eletrodomésticos ganha entre R$17.000,00 e R$22.000,00 relativos a vendas a prazo por mês. Entretanto, ele pretende abrir uma nova filial de sua loja e, assim, estima vender entre R$24.000,00 e R$29.000,00 relativos a essas vendas a prazo. Ele apresentou o seu projeto ao banco, o qual atendeu à sua requisição e diminui sua taxa de desconto sobre vendas a prazo para 2,1% ao mês durante os primeiros três anos de sua filial.

O dono da loja deseja saber, então, de acordo com a nova taxa de desconto cobrada e com a sua estimativa para vendas futuras, quanto, em média, será o valor do desconto sobre suas vendas a prazo se ele antecipar o resgate da dívida, uma vez que necessita de capital com certa urgência para investir na abertura de sua nova filial. Assim, o *Desconto Racional Composto Intervalar* é dado por:

$[N_1; N_2]$ = [24.000; 29.000]

$[i_1; i_2]$ = [0,021; 0,021]

n = 3 anos (36 meses)

$[Dr_1; Dr_2]$ = ?

$$[Dr_1; Dr_2] = \left[N_1 * \left(1 - \frac{1}{(1+i_1)^n}\right); N_2 * \left(1 - \frac{1}{(1+i_2)^n}\right)\right]$$

$$[Dr_1; Dr_2] = \left[24.000 * \left(1 - \frac{1}{(1+0{,}021)^{36}}\right); 29.000 * \left(1 - \frac{1}{(1+0{,}021)^{36}}\right)\right]$$

$$[Dr_1; Dr_2] = \left[24.000 * \left(1 - \frac{1}{2{,}11313243}\right); 29.000 * \left(1 - \frac{1}{2{,}11313243}\right)\right]$$

$$[Dr_1; Dr_2] = [12.642{,}453; 15.276{,}298]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [12.642,45; 15.276,30]. Isso significa dizer que o desconto dado pelo banco ao dono da loja estará, provavelmente, de acordo com as estimativas de vendas a prazo, entre R$12.642,45 e R$15.276,30.

4.2.4.2.2 Desconto Comercial ou Bancário Composto Intervalar ("por fora"):

O desconto comercial ou bancário da matemática financeira tradicional é caracterizado pela incidência sucessiva da taxa de desconto sobre o valor nominal do título de crédito. Sua fórmula na matemática financeira tradicional é a seguinte: $D_c = N * [1 - (1 - i)^n]$, em que D_c corresponde ao valor do desconto comercial ou bancário composto, N equivale ao valor nominal do título de crédito, i à taxa de desconto periódica composta e n ao prazo de antecipação da dívida.

Assim, o *Desconto Comercial ou Bancário Composto Intervalar* pode ser calculado do seguinte modo:

$$[Dc_1; Dc_2] = [N_1; N_2] * \left([1;1] - ([1;1] - [i_1; i_2])^n\right)$$

$$[Dc_1; Dc_2] = [N_1; N_2] * \left([1;1] - [(1 - i_2); (1 - i_1)]^n\right)$$

No caso de $[(1 - i_2); (1 - i_1)]^n$, é importante observar que sua resolução sempre cairá em um mesmo caso da Função Potência Intervalar (30).

Isso ocorre devido ao fato de não existirem taxas de desconto maiores ou iguais a 100% ($i \geq 1{,}00$), uma vez que não há sentido em uma transação comercial que não acarreta em nenhum retorno. Ou seja, se a taxa de desconto fosse de 100%, o valor recebido seria nulo.

Assim, como é inerente da função subtrair do número um o valor da taxa de juros *i*, visto que o valor dessa taxa nunca portará valor igual ou maior que 1,00, sempre se obterá um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para o limite superior. Dessa forma, a resolução do intervalo sempre cairá na terceira situação: $[a^n; b^n]$. Dessa maneira,

$$[Dc_1;Dc_2] = [N_1;N_2] * \left([1;1] - [(1-i_2);(1-i_1)]^n \right)$$
$$[Dc_1;Dc_2] = [N_1;N_2] * \left([1;1] - [(1-i_2)^n;(1-i_1)^n] \right)$$
$$[Dc_1;Dc_2] = [N_1;N_2] * [1-(1-i_1)^n; 1-(1-i_2)^n]$$
$$[Dc_1;Dc_2] = [N_1 * (1-(1-i_1)^n); N_2 * (1-(1-i_2)^n)]$$

Logo, a fórmula do *Desconto Comercial ou Bancário Composto Intervalar* é a seguinte:

$$\mathbf{[Dc_1;Dc_2] = [N_1 * (1-(1-i_1)^n); N_2 * (1-(1-i_2)^n)]} \qquad (73)$$

Em que Dc_1 e Dc_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao desconto bancário ou comercial composto; N_1 e N_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao valor nominal do título de crédito e i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente à taxa de desconto composto.

Exemplo: Utilizando o mesmo exemplo do tópico de *Desconto Racional Composto Intervalar*: O dono de uma loja de eletrodomésticos ganha entre R$17.000,00 e R$22.000,00 relativos a vendas a prazo por mês. Entretanto, ele pretende abrir uma nova filial de sua loja e, assim, estima vender entre R$24.000,00 e R$29.000,00 relativos a essas vendas a prazo. Ele apresentou o seu projeto ao banco, o qual atendeu à sua requisição e diminui sua taxa de desconto sobre vendas a prazo para 2,1% ao mês durante os primeiros três anos de sua filial.

O dono da loja deseja saber, então, de acordo com a nova taxa de desconto cobrada e com a sua estimativa para vendas futuras, quanto, em média, será o valor do desconto sobre suas vendas a prazo se ele antecipar o resgate da dívida, uma vez que necessita de capital com certa urgência para investir na abertura de sua nova filial.

Assim, o *Desconto Comercial ou Bancário Composto Intervalar* pode ser calculado da seguinte forma:

$[N_1; N_2]$ = [24.000; 29.000]

$[i_1; i_2]$ = [0,021; 0,021]

n = 3 anos (36 meses)

$[Dc_1;Dc_2]$ = ?

$$[Dc_1;Dc_2] = [N_1 * (1-(1-i_1)^n); N_2 * (1-(1-i_2)^n)]$$

$$[Dc_1;Dc_2] = [24.000 * (1-(1-0,021)^{36}); 29.000 * (1-(1-0,021)^{36})]$$

$$[Dc_1;Dc_2] = [24.000 * (1-0,4657757833); 29.000 * (1-0,4657757833)]$$

$$[Dc_1;Dc_2] = [24.000 * 0,534224216 7; 29.000 * 0,534224216 7]$$

$$[Dc_1;Dc_2] = [12.821,3812008 ; 15.492,5022843]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [12.821,38; 15.492,51]. Isso significa dizer que o desconto dado pelo banco ao dono da loja estará, provavelmente, de acordo com as estimativas de vendas a prazo, entre R$12.821,38 e R$15.492,51.

4.2.5 Análise Intervalar de Investimentos

Como já foi visto, para uma eficaz tomada de decisão na análise de investimento, é imprescindível que se obtenham dados de confiança. Entretanto, há uma imensa dificuldade na obtenção desses dados, uma vez que se originam de estimativas e especulações. Sabe-se que aproximações no ambiente financeiro podem levar a resultados desastrosos e, assim, acarretar em decisões errôneas de projetos.

> Em uma economia dinâmica, não basta simplesmente elaborar o fluxo de caixa e adotar um bom critério para decidir sobre novos investimentos, é preciso acompanhar os números projetados e estar atento para evitar uma situação indesejável ou até mesmo de insolvência. [...] Em um ambiente volátil, uma organização precisa ser flexível para criar maior agilidade nos processos de adaptações e mudanças e, ainda, ser transparente na gestão dos recursos para manter-se competitiva no mercado [8].

Dessa forma, a fim de prestar auxílio à abordagem convencional de análise de investimentos, esse capítulo tem o intuito de mostrar como os fundamentos da matemática intervalar podem ser aderidos a essa parte constituinte da matemática financeira tradicional.

4.2.5.1 Valor Presente Líquido Intervalar

Como visto anteriormente, o *VPL* consiste na diferença entre o valor presente do projeto e o custo do projeto na data atual. Assim, são calculados os valores presentes de todos os fluxos de caixa previstos que se seguem à data zero e posteriormente é subtraído o investimento inicial do projeto.

Entretanto, a determinação desses fluxos de caixa compreende uma das grandes dificuldades na análise de investimentos, visto que são embasados em estimativas e especulações.

Dessa forma, fluxos de caixa futuros serão tratados como intervalos. As demais variáveis que constituem o cálculo do *VPL*: taxa de retorno, investimento inicial e períodos, serão, nos exemplos, tidas como pontuais. Assim, para que sejam feitas as operações aritméticas intervalares adequadamente, tais valores serão transformados em intervalos degenerados.

A fórmula do *VPL Intervalar* é dada a seguir:

$$\boldsymbol{VPLI} = \boldsymbol{CIR(VPL)} = \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{\boldsymbol{EC}}_j}{(1+\overline{\boldsymbol{I}})^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{\boldsymbol{SC}}_l}{(1+\underline{\boldsymbol{I}})^l}\right) - \overline{\boldsymbol{I_0}};\ \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{\boldsymbol{EC}}_j}{(1+\underline{\boldsymbol{I}})^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{\boldsymbol{SC}}_l}{(1+\overline{\boldsymbol{I}})^l}\right) - \underline{\boldsymbol{I_0}}\right] \quad (74)$$

Em que $\underline{\boldsymbol{EC}}$ e $\overline{\boldsymbol{EC}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{\boldsymbol{SC}}$ e $\overline{\boldsymbol{SC}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l*; $\underline{\boldsymbol{I}}$ e $\overline{\boldsymbol{I}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de retorno e $\underline{\boldsymbol{I_0}}$ e $\overline{\boldsymbol{I_0}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao investimento inicial.

É imprescindível mencionar que a fórmula do *VPLI* sempre emitirá o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retorna a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, tem-se como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real do *VPL*.

Exemplo 1: Uma empresa está avaliando duas propostas de projeto, cujas informações estão descritas a seguir:

Projeto	A	B
Investimento Inicial (R$)	350.000,00	450.000,00
Anos	**Entradas Esperadas de Caixa (A) em R$**	**Entradas Esperadas de Caixa (B) em R$**
1	[198.000,00; 205.000,00]	[76.250,00; 80.000,00]
2	[177.020,00; 181.000,00]	[119.000,00; 122.010,00]
3	[118.000,00; 123.000,00]	[453.000,00; 460.000,00]

Tabela 4.8: *VPL Intervalar* (exemplo 1)

A taxa de desconto mínima aceitável é de 20%, representada pelo intervalo degenerado [0,20; 0,20].

Dessa forma, o cálculo do *VPL Intervalar* do projeto A é dado da seguinte maneira:

- **Projeto A:**

$$\boldsymbol{VPLI_A} = \left(\frac{\overbrace{[198.000,00;205.000,00]}^{EC_1}}{([1;1]+[0,20;0,20])^1} + \frac{\overbrace{[177.020,00;181.000,00]}^{EC_2}}{([1;1]+[0,20;0,20])^2} + \frac{\overbrace{[118.000,00;123.000,00]}^{EC_3}}{([1;1]+[0,20;0,20])^3} \right) - \overbrace{[350.000,00;350.000,00]}^{\text{Invest. Inicial}}$$

É importante notar que todos os denominadores $([1;1]+[0,20;0,20])^1$, $([1;1]+[0,20;0,20])^2$ e $([1;1]+[0,20;0,20])^3$ caem no mesmo caso da Função Potência Intervalar (30):

$$F(A) = A^n = \begin{cases} [0; max(|a|,|b|)^n], se\ n\ é\ par\ e\ 0 \in A \\ [b^n; a^n], se\ n\ é\ par\ e\ b < 0 \\ \boldsymbol{[a^n; b^n],\ senão.} \end{cases}$$

Em que A é um intervalo de números reais pertencente ao conjunto IR.

Ou seja, como é inerente da função somar o valor da taxa de retorno com o número um, sempre se obterá um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para o limite superior, visto que a taxa de retorno nunca portará valor negativo. Dessa forma, a resolução dos denominadores sempre cairá na terceira situação: $[a^n; b^n]$. Assim, tem-se:

$$\boldsymbol{VPLI}_A = \left(\frac{[198.000,00; 205.000,00]}{[1,20; 1,20]} + \frac{[177.020,00; 181.000,00]}{[1,44; 1,44]} + \frac{[118.000,00; 123.000,00]}{[1,728; 1,728]} \right) - [350.000,00; 350.000,00]$$

De acordo com a fórmula (74) do *VPL Intervalar* são calculados os limites inferior e superior do intervalo, como segue:

1º) Cálculo do limite inferior do intervalo ($\underline{\boldsymbol{VPLI}}_A$):

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_A = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{\boldsymbol{EC}}_j}{(\mathbf{1}+\overline{\boldsymbol{I}})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{\boldsymbol{SC}}_l}{(\mathbf{1}+\underline{\boldsymbol{I}})^l} \right) - \overline{\boldsymbol{I}_0}$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_A = \left(\frac{198.000,00}{1,20} + \frac{177.020,00}{1,44} + \frac{118.000,00}{1,728} \right) - 350.000,00$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_A = (165.000,00 + 122.930,55 + 68.287,037) - 350.000,00$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_A = 356.217,58 - 350.000,00$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_A = \mathbf{6.217,58}$$

2º) Cálculo do limite superior do intervalo ($\overline{\boldsymbol{VPLI}}_A$):

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_A = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\boldsymbol{EC}}_j}{(\mathbf{1}+\underline{\boldsymbol{I}})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{\boldsymbol{SC}}_l}{(\mathbf{1}+\overline{\boldsymbol{I}})^l} \right) - \underline{\boldsymbol{I}_0}$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_A = \left(\frac{205.000,00}{1,20} + \frac{181.000,00}{1,44} + \frac{123.000,00}{1,728} \right) - 350.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_A = (170.833,33 + 125.694,44 + 71.180,555) - 350.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_A = 367.708,32 - 350.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_A = \mathbf{17.708,32}$$

Assim, o *Valor Presente Líquido Intervalar* do projeto A é dado pelo intervalo [6.217,58; 17.708,32].

$$\boldsymbol{VPLI_A = [6.217,58;\ 17.708,32]}$$

Como no intervalo obtido tanto o valor do limite inferior quanto o valor do limite superior são maiores do que zero, tem-se que o investimento é economicamente viável.

Da mesma forma é calculado o *VPL Intervalar* do projeto B:

- **Projeto B:**

$$VPLI_B = \left(\frac{[76.250,00; 80.000,00]}{[1,20; 1,20]} + \frac{[119.000,00; 122.010,00]}{[1,44; 1,44]} + \frac{[453.000,00; 460.000,00]}{[1,728; 1,728]}\right) - [450.000,00; 450.000,00]$$

1º) Cálculo do limite inferior do intervalo ($\underline{VPLI}_B$):

$$\underline{VPLI}_B = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC}_j}{(1+\overline{I})^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC}_l}{(1+\underline{I})^l}\right) - \overline{I_0}$$

$$\underline{VPLI}_B = \left(\frac{76.250,00}{1,20} + \frac{119.000,00}{1,44} + \frac{453.000,00}{1,728}\right) - 450.000,00$$

$$\underline{VPLI}_B = (63.541,666 + 82.638,888 + 262.152,77) - 450.000,00$$

$$\underline{VPLI}_B = 408.333,31 - 450.000,00$$

$$\underline{VPLI}_B = \mathbf{-41.666,69}$$

2º) Cálculo do limite superior do intervalo ($\overline{VPLI}_B$):

$$\overline{VPLI}_B = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC}_j}{(1+\underline{I})^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC}_l}{(1+\overline{I})^l}\right) - \underline{I_0}$$

$$\overline{VPLI}_B = \left(\frac{80.000,00}{1,20} + \frac{122.010,00}{1,44} + \frac{460.000,00}{1,728}\right) - 450.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{B} = (66.666{,}666 + 84.729{,}166 + 266.203{,}70) - 450.000{,}00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{B} = 417.599{,}52 - 450.000{,}00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{B} = -\mathbf{32.400{,}48}$$

Assim, o *Valor Presente Líquido Intervalar* do projeto B é dado pelo intervalo [-41.666,69; -32.400,48].

$$\boldsymbol{VPLI_{B}} = \mathbf{[-41.666{,}69; -32.400{,}48]}$$

Diferente do projeto A, o projeto B apresentou um intervalo com limites inferior e superior menores que zero. Nesse caso, o projeto B não é viável.

Assim, quando se obtém um intervalo cujos limites inferior e superior estão acima de zero, o investimento é viável. Quando esses limites aparecem, ambos inferiores a zero, o investimento já não é economicamente atrativo. Nesses dois casos, não se sabe com exatidão quanto é o valor do *VPL*, mas sim um intervalo no qual ele seguramente se encontra.

Além dos dois casos descritos, há a situação em que o intervalo pode apresentar limite inferior menor do que zero e limite superior maior que zero. Como, por exemplo, em [-3.000,00; 1.000,00]. Nesse caso, além de não se ter certeza do valor real do *VPL*, mas apenas um intervalo em que este se encontra, também não haverá certeza se o investimento será viável ou não.

Exemplo 2: A mesma empresa deseja analisar um novo projeto a fim de saber se este é economicamente atrativo ou não. As características do novo projeto são descritas a seguir:

Projeto C: Investimento Inicial de R$7.000,00	
Ano	**Fluxos Esperados de Caixa (R$)**
1	[-5.000,00; -3.000,00]
2	[-3.500; -2.000,00]
3	[9.500; 10.100,00]

Tabela 4.9: *VPL Intervalar* (exemplo 2)

A taxa de desconto mínima aceitável é de 10%, representada pelo intervalo degenerado [0,10; 0,10].

Dessa forma, o cálculo do *VPL Intervalar* do projeto C é dado da seguinte maneira:

- **Projeto C:**

$$\boldsymbol{VPLI_C} = \left(\frac{\overbrace{[-5.000,00; -3.000,00]}^{SC_1}}{([1;1]+[0,10;0,10])^1} + \frac{\overbrace{[-3.500,00; -2.000,00]}^{SC_2}}{([1;1]+[0,10;0,10])^2} + \frac{\overbrace{[9.500,00; 10.100,00]}^{EC_1}}{([1;1]+[0,10;0,10])^3} \right) - \overbrace{[7.000,00; 7.000,00]}^{\text{Invest. Inicial}}$$

$$\boldsymbol{VPLI_C} = \left(\frac{\overbrace{[-5.000,00; -3.000,00]}^{SC_1}}{[1,1; 1,1]} + \frac{\overbrace{[-3.500,00; -2.000,00]}^{SC_2}}{[1,21; 1,21]} + \frac{\overbrace{[9.500,00; 10.100,00]}^{EC_1}}{[1,331; 1,331]} \right) - \overbrace{[7.000,00; 7.000,00]}^{\text{Invest. Inicial}}$$

De acordo com a fórmula (74) do *VPL Intervalar* são calculados os limites inferior e superior do intervalo, como segue:

1º) Cálculo do limite inferior do intervalo ($\underline{\boldsymbol{VPLI}}_C$):

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_C = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{\boldsymbol{EC}}_j}{(\mathbf{1}+\overline{\boldsymbol{I}})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{\boldsymbol{SC}}_l}{(\mathbf{1}+\underline{\boldsymbol{I}})^l} \right) - \overline{\boldsymbol{I_0}}$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = \left(\frac{9.500,00}{1,331} + \frac{(-5.000,00)}{1,1} + \frac{(-3.500,00)}{1,21}\right) - 7.000,00$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = (7.137,4906 - 4.545,4545 - 2.892,5619) - 7.000,00$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = -300,5258 - 7.000,00$$

$$\underline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = \mathbf{-7.300,5258}$$

2º) Cálculo do limite superior do intervalo ($\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{C}$):

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\boldsymbol{EC}}_{j}}{(1+\underline{\boldsymbol{I}})^{j}} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{\boldsymbol{SC}}_{l}}{(1+\overline{\boldsymbol{I}})^{l}}\right) - \underline{\boldsymbol{I_0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = \left(\frac{10.100,00}{1,331} + \frac{(-3.000,00)}{1,1} + \frac{(-2.000,00)}{1,21}\right) - 7.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = (7.588,2794 - 2.727,2727 - 1.652,8925) - 7.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = 3.208,1142 - 7.000,00$$

$$\overline{\boldsymbol{VPLI}}_{C} = \mathbf{-3.791,8858}$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se que o *Valor Presente Líquido Intervalar* do projeto C é dado por:

$$\boldsymbol{VPLI_C} = \mathbf{[-7.300,52; -3.791,89]}$$

Como tanto o limite inferior do intervalo quanto o limite superior são menores que zero, o projeto C não é economicamente atrativo.

4.2.5.2 Taxa Interna de Retorno Intervalar

Entende-se por *Taxa Interna de Retorno* como sendo a taxa de juros que anula o valor presente do fluxo de caixa do projeto [37].

Porém, assim como ocorre no *VPL*, esses fluxos de caixa futuros de projeto são obtidos através de estimativas, não podendo ser afirmados com total precisão.

Assim, fluxos de caixa futuros serão tratados como intervalos, ao passo que as demais variáveis do cálculo da *TIR*: investimento inicial e períodos de tempo serão, nos exemplos, tidas como valores pontuais, posteriormente transformados em intervalos degenerados. O resultado obtido será a *Taxa Interna de Retorno* em forma de um intervalo.

A fórmula da *TIR Intervalar* é dada a seguir:

$$[\underline{I_0};\overline{I_0}] = \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC}_j}{(1+i_1)^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC}_l}{(1+i_1)^l}\right);\ \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC}_j}{(1+i_2)^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC}_l}{(1+i_2)^l}\right)\right] \qquad (75)$$

Em que $\underline{I_0}$ e $\overline{I_0}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao investimento inicial; $\underline{EC}$ e $\overline{EC}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{SC}$ e $\overline{SC}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l*; e i_1 e i_2 representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à *Taxa Interna de Retorno*.

É importante citar que a fórmula da *TIR Intervalar* sempre emitirá o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retorna a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, tem-se como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real da *TIR*.

Exemplo: Uma empresa está avaliando duas propostas de projetos, cujas informações estão descritas a seguir:

Projeto	Investimento Inicial (R$)	Fluxos Esperados de Caixa (R$)	
		Ano 1	Ano 2
A	5.000,00	[4.000,00; 5.500,00]	[3.500,00; 5.000,00]
B	5.400,00	[10.050,00; 10.700,00]	[-4.000,00; -3.600,00]

Tabela 4.10: exemplo *TIR Intervalar*

Dessa forma, a fim de calcular a *Taxa Interna de Retorno Intervalar* do Projeto A, tem-se:

- **Projeto A:**

$$\underbrace{[5.000,00; 5.000,00]}_{\text{Invest. Inicial}} = \left(\frac{\overbrace{[4.000,00; 5.500,00]}^{EC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^1} + \frac{\overbrace{[3.500,00; 5.000,00]}^{EC_2}}{([1;1]+[i_1;i_2])^2} \right)$$

Novamente, é importante observar que os denominadores $([1;1]+[i_1;i_2])^1$ e $([1;1]+[i_1;i_2])^2$ das duas frações caem no mesmo caso da Função Potência Intervalar (30).

Em outras palavras, é próprio da função somar o valor da *TIR* (*i*) com o número um, fato que sempre acarretará em um valor resultante maior do que zero, tanto para o limite inferior i_1 do intervalo, quanto para o limite superior i_2, uma vez que o valor da *TIR* nunca será negativo. Assim, sempre resultará no terceiro caso: $[a^n;b^n]$. A partir disso, tem-se que:

$$[5.000,00; 5.000,00] = \left(\frac{[4.000,00; 5.500,00]}{[(1+i_1)^1; (1+i_2)^1]} + \frac{[3.500,00; 5.000,00]}{[(1+i_1)^2; (1+i_2)^2]} \right)$$

De acordo com a fórmula (75) da *TIR Intervalar* são calculados os limites inferior e superior do intervalo, como segue:

1º) Cálculo do limite inferior i_1:

$$\underline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{EC}_j}{(1+i_1)^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{SC}_l}{(1+i_1)^l} \right)$$

$$5.000,00 = \left(\frac{4.000,00}{(1+i_1)^1} + \frac{3.500,00}{(1+i_1)^2} \right)$$

$$5.000,00 = \left(\frac{\left(4.000,00 * \frac{(1+i_1)^2}{(1+i_1)^1} \right) + \left(3.500,00 * \frac{(1+i_1)^2}{(1+i_1)^2} \right)}{(1+i_1)^2} \right)$$

$$5.000,00 = \frac{4.000,00 * (1+i_1) + 3.500,00}{(1+i_1)^2}$$

$$5.000,00 * (1+i_1)^2 = 4.000,00 i_1 + 4.000,00 + 3.500,00$$

$$5.000,00 * (1 + 2i_1 + i_1^{\,2}) = 4.000,00 i_1 + 7.500,00$$

$$5.000,00 i_1^{\,2} + 10.000,00 i_1 - 4.000,00 i_1 + 5.000,00 - 7.500,00 = 0$$

$$5.000,00 i_1^{\,2} + 6.000,00 i_1 - 2.500,00 = 0$$

Simplificando, tem-se: $5i_1^{\,2} + 6i_1 - 2,5 = 0$

$$i_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 * 5 * (-2,5)}}{2 * 5} = 0,3273618$$

2º) Cálculo do limite superior i_2:

$$\overline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{EC}_j}{(1+i_2)^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{SC}_l}{(1+i_2)^l} \right)$$

$$5.000,00 = \left(\frac{5.500,00}{(1+i_2)^1} + \frac{5.000,00}{(1+i_2)^2} \right)$$

$$5.000,00 = \left(\frac{\left(5.500,00 * \frac{(1+i_2)^2}{(1+i_2)^1} \right) + \left(5.000,00 * \frac{(1+i_2)^2}{(1+i_2)^2} \right)}{(1+i_2)^2} \right)$$

$$5.000,00 = \frac{5.500,00*(1+i_2)+5.000,00}{(1+i_2)^2}$$

$$5.000,00*(1+i_2)^2 = 5.500,00i_2 + 5.500,00 + 5.000,00$$

$$5.000,00*(1+2i_2+i_2{}^2) = 5.500,00i_2 + 10.500,00$$

$$5.000,00i_2{}^2 + 10.000,00i_2 - 5.500,00i_2 + 5.000,00 - 10.500,00 = 0$$

$$5.000,00i_2^2 + 4.500,00i_2 - 5.500,00 = 0$$

Simplificando, tem-se: $5i_2^2 + 4,5i_2 - 5,5 = 0$

$$i_2 = \frac{-4,5 \pm \sqrt{(4,5)^2 - 4*5*(-5,5)}}{2*5} = 0,6912712$$

Desse modo, a *TIR Intervalar* é igual a [0,3273618; 0,6912712]. Utilizando arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [0,32; 0,70]. Logo, a *TIR Intervalar* do projeto A é o intervalo **[0,32; 0,70]**.

Isso significa dizer que o valor real da *TIR* estará, provavelmente, de acordo com as estimativas realizadas, dentro do intervalo obtido como solução.

Da mesma maneira é calculada a *TIR Intervalar* do projeto B:

- **Projeto B:**

$$\overbrace{[5.400,00;\ 5.400,00]}^{\text{Invest. Inicial}} = \left(\frac{\overbrace{[10.050,00;10.700,00]}^{EC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^1} + \frac{\overbrace{[\text{-}4.000,00;\text{-}3.600,00]}^{SC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^2} \right)$$

$$[5.400,00;\ 5.400,00] = \left(\frac{[10.050,00;10.700,00]}{[(1+i_1)^1;(1+i_2)^1]} + \frac{[\text{-}4.000,00;\text{-}3.600,00]}{[(1+i_1)^2;(1+i_2)^2]} \right)$$

De acordo com a fórmula (75) da *TIR Intervalar* são calculados os limites inferior e superior do intervalo, como segue:

1º) Cálculo do limite inferior i_1:

$$\underline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{EC}_j}{(1+i_1)^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{SC}_l}{(1+i_1)^l} \right)$$

$$5.400,00 = \left(\frac{10.050,00}{(1+i_1)^1} + \frac{(-4.000,00)}{(1+i_1)^2} \right)$$

$$5.400,00 = \left(\frac{\left(10.050,00 * \frac{(1+i_1)^2}{(1+i_1)^1}\right) - \left(4.000,00 * \frac{(1+i_1)^2}{(1+i_1)^2}\right)}{(1+i_1)^2} \right)$$

$$5.400,00 = \frac{10.050,00 * (1+i_1) - 4.000,00}{(1+i_1)^2}$$

$$5.400,00 * (1+i_1)^2 = 10.050,00 i_1 + 10.050,00 - 4.000,00$$

$$5.400,00 * (1+2i_1 + i_1^{\ 2}) = 10.050,00 i_1 + 6.050,00$$

$$5.400,00 i_1^{\ 2} + 10.800,00 i_1 - 10.050,00 i_1 + 5.400,00 - 6.050,00 = 0$$

$$5.400,00 i_1^{\ 2} + 750,00 i_1 - 650,00 = 0$$

Simplificando, tem-se: $54 i_1^{\ 2} + 7,5 i_1 - 6,5 = 0$

$$i_1 = \frac{-7,5 \pm \sqrt{(7,5)^2 - 4 * 54 * (-6,5)}}{2 * 54} = 0,2843816$$

2º) Cálculo do limite superior i_2:

$$\overline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{EC}_j}{(1+i_2)^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{SC}_l}{(1+i_2)^l} \right)$$

$$5.400,00 = \left(\frac{10.700,00}{(1+i_2)^1} + \frac{(-3.600,00)}{(1+i_2)^2} \right)$$

$$5.400,00 = \left(\frac{\left(10.700,00 * \frac{(1+i_2)^2}{(1+i_2)^1}\right) - \left(3.600,00 * \frac{(1+i_2)^2}{(1+i_2)^2}\right)}{(1+i_2)^2} \right)$$

$$5.400,00 = \frac{10.700,00 * (1 + i_2) - 3.600,00}{(1 + i_2)^2}$$

$$5.400,00 * (1 + i_2)^2 = 10.700,00 i_2 + 10.700,00 - 3.600,00$$

$$5.400,00 * (1 + 2i_2 + i_2{}^2) = 10.700,00 i_2 + 7.100,00$$

$$5.400,00 i_2{}^2 + 10.800,00 i_2 - 10.700,00 i_2 + 5.400,00 - 7.100,00 = 0$$

$$5.400,00 i_2^2 + 100,00 i_2 - 1.700,00 = 0$$

Simplificando, tem-se: $54 i_2^2 + 1 i_2 - 17 = 0$

$$i_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 54 * (-17)}}{2 * 54} = 0,5519007$$

Desse modo, a *TIR Intervalar* é o intervalo [0,2843816; 0,5519007]. Utilizando arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [0,28; 0,56]. Logo, a *TIR Intervalar* do projeto B é o intervalo **[0,28; 0,56]**.

É importante perceber que a complexidade do cálculo da *TIR* aumenta conforme aumentam os períodos. O denominador dos fluxos de caixa é representado por $(1 + i)^j$. Dessa forma, se houver uma quantidade de fluxos de caixa igual a 10, por exemplo, se terá um polinômio de décimo grau $(1 + i)^{10}$. Por isso, seria interessante a implementação de uma calculadora financeira intervalar a fim de facilitar os cálculos da *Taxa Interna de Retorno Intervalar*, assim como a HP12 auxilia nos cálculos da *TIR* tradicional.

4.2.5.3 Período *Payback Intervalar*

Entende-se por período *Payback* como sendo o número de períodos ou quanto tempo o investidor irá levar para recuperar o investimento realizado.

Tanto no critério *Payback Simples* como no critério *Payback Descontado*, os fluxos de caixa futuros são estimados, não havendo total precisão quanto a seus valores. Portanto, em ambos os casos os fluxos de caixa futuros serão tratados como intervalos.

4.2.5.3.1 *Payback Simples Intervalar*

No caso do *Payback Simples Intervalar* as entradas de caixa futuras serão intervalos, ao passo que a variável de investimento inicial, no exemplo apresentado, será tida como um valor pontual, posteriormente transformada em intervalo degenerado.

A fórmula do *Payback Simples Intervalar* é dada a seguir:

$$\boldsymbol{PBIs} = \boldsymbol{CIR(PBs)} = \left[\frac{\underline{\boldsymbol{I_0}}}{\overline{\boldsymbol{EC}}_j} ; \frac{\overline{\boldsymbol{I_0}}}{\underline{\boldsymbol{EC}}_j} \right] \tag{76}$$

Em que $\underline{\boldsymbol{I_0}}$ e $\overline{\boldsymbol{I_0}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo equivalente ao investimento inicial e $\underline{\boldsymbol{EC}}$ e $\overline{\boldsymbol{EC}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*.

É importante mencionar que a fórmula do *PBIs* sempre emitirá o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retorna a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, tem-se como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real do *PBs*.

Exemplo: Uma empresa deseja determinar o período *Payback Simples Intervalar* de um projeto, cujas informações são descritas a seguir:

Período *Payback* Aceitável: 1 ano	
Projeto A: Investimento Inicial de R$40.000,00	
Ano	**Entradas Esperadas de Caixa (R$)**
1	[16.000,00; 20.000,00]
2	[16.000,00; 20.000,00]
3	[16.000,00; 20.000,00]

Tabela 4.11: exemplo *Payback Simples Intervalar*

De acordo com a fórmula: $\boldsymbol{PBIs} = \left[\frac{\underline{I_0}}{\overline{EC_j}};\frac{\overline{I_0}}{\underline{EC_j}}\right]$, faz-se o seguinte cálculo:

$$\boldsymbol{PBIs} = \left[\frac{40.000,00}{20.000,00};\frac{40.000,00}{16.000,00}\right]$$

$$\boldsymbol{PBIs} = [2;\ 2,5]$$

Período *Payback Simples Intervalar*: [2; 2,5].

Isso significa que a empresa reaverá o investimento inicial entre 2 e 2,5 anos, de acordo com as estimativas realizadas. Entretanto, como a empresa possui um período aceitável de um ano, o projeto A é descartado.

4.2.5.3.2 *Payback Descontado Intervalar*

No caso do *Payback Descontado Intervalar*, os fluxos de caixa devem ser tratados como intervalos, uma vez que são obtidos através de estimações. Os demais componentes do cálculo do *Payback Descontado*: taxa de retorno e período de tempo, serão considerados como intervalos degenerados nos exemplos apresentados mais adiante.

Antes de se calcular o *Payback Descontado Intervalar*, é necessário que sejam calculados os valores presentes intervalares de cada fluxo de caixa. Assim, a fórmula do valor presente intervalar é dada a seguir:

$$\boldsymbol{VPI} = \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{\boldsymbol{EC}}_{j}}{(\mathbf{1} + \overline{\boldsymbol{I}})^{j}} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{\boldsymbol{SC}}_{l}}{(\mathbf{1} + \underline{\boldsymbol{I}})^{l}} \right) ; \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\boldsymbol{EC}}_{j}}{(\mathbf{1} + \underline{\boldsymbol{I}})^{j}} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{\boldsymbol{SC}}_{l}}{(\mathbf{1} + \overline{\boldsymbol{I}})^{l}} \right) \right] \qquad (77)$$

Em que $\underline{\boldsymbol{EC}}$ e $\overline{\boldsymbol{EC}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{\boldsymbol{SC}}$ e $\overline{\boldsymbol{SC}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l* e $\underline{\boldsymbol{I}}$ e $\overline{\boldsymbol{I}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de retorno.

Calculados os valores presentes intervalares de todos os fluxos de caixa, pode-se obter o valor do *Payback Descontado Intervalar* calculando-se, através da mesma fórmula do *Payback Descontado* tradicional, os limites inferior e superior do intervalo, separadamente. Assim, tanto para o limite inferior do intervalo, quanto para seu limite superior, tem-se a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{PBId} = \textbf{\textit{Limite Inferior do Intervalo}} + \left(\frac{\textbf{\textit{Investimento Inicial}} - \textbf{\textit{Valor Acumulado até Limite Inferior}}}{\textbf{\textit{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}}} \right) \qquad (78)$$

Ou seja:

$$\boldsymbol{PBId} = \boldsymbol{CIR}(\boldsymbol{PBd}) = [\underline{\boldsymbol{PBId}}; \overline{\boldsymbol{PBId}}] \qquad (79)$$

Logo, a fórmula do *PBId* sempre emitirá o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retorna a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, tem-se como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real do *PBd*.

Exemplo 1: Uma empresa deseja saber o período *Payback Descontado Intervalar* de um projeto cujas informações estão descritas a seguir:

Período *Payback* Aceitável: 3 anos	
Projeto A: Investimento Inicial de R$14.500,00	
Ano	**Entradas Esperadas de Caixa (R$)**
1	[6.000,00; 9.000,00]
2	[6.000,00; 9.000,00]
3	[6.000,00; 9.000,00]

Tabela 4.12: informações - Projeto A

A taxa de desconto é de 10%, sendo representada pelo intervalo degenerado [0,10; 0,10].

Inicialmente, assim como no período *Payback Descontado* tradicional, são calculados todos os valores presentes das entradas de caixa:

$$\boldsymbol{VPI_A} = \left(\frac{[6.000,00; 9.000,00]}{([1;1]+[0,10; 0,10])^1} + \frac{[6.000,00; 9.000,00]}{([1;1]+[0,10; 0,10])^2} + \frac{[6.000,00; 9.000,00]}{([1;1]+[0,10; 0,10])^3} \right)$$

É importante observar que, novamente, os denominadores $([1;1]+[0,10; 0,10])^1$, $([1;1]+[0,10; 0,10])^2$ e $([1;1]+[0,10; 0,10])^3$ caem no mesmo caso $[a^n; b^n]$ da Função Potência Intervalar (30), uma vez que o valor da taxa de retorno, sempre positivo, será adicionado ao número um, acarretando sempre em um intervalo com limites superior e inferior maiores do que zero. Dessa forma, tem-se:

$$\boldsymbol{VPI_A} = \left(\frac{[6.000,00; 9.000,00]}{[1,10;1,10]} + \frac{[6.000,00; 9.000,00]}{[1,21;1,21]} + \frac{[6.000,00; 9.000,00]}{[1,331;1,331]} \right)$$

De acordo com a fórmula (77) do valor presente intervalar são calculados os valores presentes dos fluxos de caixa, como segue:

1º) Cálculo dos limites inferiores referentes aos valores presentes das entradas de caixa:

$$\underline{VPI}_A = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{EC}_j}{(1+\overline{I})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{SC}_l}{(1+\underline{I})^l} \right)$$

$$\underline{VPI}_A = \left(\frac{6.000,00}{1,10} + \frac{6.000,00}{1,21} + \frac{6.000,00}{1,331} \right)$$

$$\underline{VPI}_A = \left(\underbrace{5.454,5454}_{\text{Ano1}} + \underbrace{4.958,6776}_{\text{Ano 2}} + \underbrace{4.507,8888}_{\text{Ano3}} \right)$$

Assim, os limites inferiores dos valores presentes das entradas de caixa são 5.454,5454, 4.958,6776 e 4.507,8888 referentes, respectivamente, ao primeiro, segundo e terceiro anos.

2º) Cálculo dos limites superiores referentes aos valores presentes das entradas de caixa:

$$\overline{VPI}_A = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{EC}_j}{(1+\underline{I})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{SC}_l}{(1+\overline{I})^l} \right)$$

$$\overline{VPI}_A = \left(\frac{9.000,00}{1,10} + \frac{9.000,00}{1,21} + \frac{9.000,00}{1,331} \right)$$

$$\overline{VPI}_A = \left(\underbrace{8.181,8181}_{\text{Ano1}} + \underbrace{7.438,0165}_{\text{Ano 2}} + \underbrace{6.761,8332}_{\text{Ano 3}} \right)$$

Assim, os limites superiores dos valores presentes das entradas de caixa são 8.181,8181, 7.438,0165 e 6.761,8332 referentes, respectivamente, ao primeiro, segundo e terceiro anos.

Dessa maneira, tem-se que:

$$VPI_1 = [5.454,5454; 8.181,8181]$$

$$VPI_2 = [4.958,6776; 7.438,0165]$$

$$VPI_3 = [4.507,8888; 6.761,8332]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, têm-se os novos intervalos:

$$VPI_1 = [5.454,54; 8.181,82]$$

$$VPI_2 = [4.958,67; 7.438,02]$$

$$VPI_3 = [4.507,88; 6.761,84]$$

Anos	Projeto A		
	Entradas de Caixa (R$)	**Entradas de Caixa Descontadas (VPI)**	***Payback* Acumulado (R$)**
1	[6.000,00;9.000,00]	[5.454,54;8.181,82]	[5.454,54;8.181,82]
2	[6.000,00;9.000,00]	[4.958,67;7.438,02]	[10.413,21;15.619,84]
3	[6.000,00;9.000,00]	[4.507,88; 6.761,84]	[14.921,09;22.381,68]

Tabela 4.13: *Payback Descontado Intervalar* - Projeto A

A partir dos dados da tabela 4.13, sabe-se que no primeiro ano não há a possibilidade de o investimento ser recuperado, uma vez que o valor de R$14.500,00 não se encontra contido no intervalo [R$5.454,54; R$8.181,82].

Entretanto, é sabido que esse valor encontra-se contido no intervalo [R$10.413,21; R$15.619,84], equivalente ao segundo ano. Porém, mesmo estando contido nesse intervalo, existe o risco de não se recuperar o valor do investimento, devido ao fato de existir um limite inferior menor que o valor do investimento inicial.

No terceiro ano, por sua vez, há um retorno maior do que o valor do investimento inicial, violando o objetivo do *Payback*, o qual consiste em obter um valor acumulado igual, e não superior, ao do investimento realizado a fim de se obter um período que corresponda a esse retorno.

Dessa forma, o primeiro ano não pode ser considerado como limite inferior do intervalo correspondente ao *Payback Descontado Intervalar* e nem o terceiro ano pode ser considerado como limite superior de tal intervalo.

Assim, deduz-se que o limite inferior do intervalo equivalente ao *Payback* será obtido como uma transição do primeiro para o segundo ano, assim como seu limite superior será obtido como uma transição do segundo para o terceiro ano. O período *Payback Descontado Intervalar*, então, será um intervalo do tipo [1,x; 2,y], em que x e y representam a transição para o segundo e para o terceiro ano, respectivamente.

O cálculo do *Payback Descontado Intervalar* será dado da seguinte maneira:

1º) Cálculo do limite inferior:

Sabe-se que o melhor caso do *Payback* é quando o tempo de retorno para a recuperação do investimento inicial é o menor possível. Desse modo, quanto maior for o valor do *Payback* acumulado, mais rápido se reaverá o valor do investimento feito inicialmente.

Para isso, são destacados os maiores valores de entrada de caixa, entradas de caixa descontadas (valor presente) e *Payback* acumulado, apresentados na tabela a seguir:

Anos	Projeto A		
	Entradas de Caixa (R$)	**Entradas de Caixa Descontadas (VP)**	***Payback* Acumulado (R$)**
1	9.000,00	8.181,82	8.181,82
2	9.000,00	7.438,02	15.619,84

Tabela 4.14: limite inferior do *Payback Descontado Intervalar* - Projeto A

Como já foi visto que o limite inferior do intervalo equivalente ao *Payback* será uma transição do primeiro para o segundo ano, tem-se que:

$$\underline{PBId}_A = \textit{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\textit{Investimento Inicial} - \textit{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\textit{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}} \right)$$

$$\underline{PBId}_A = 1 + \left(\frac{14.500,00 - 8.181,82}{7.438,02} \right)$$

$$\underline{PBId}_A = 1 + \left(\frac{6.318,18}{7.438,02} \right)$$

$$\underline{PBId}_A = 1,8494438$$

2º) Cálculo do limite superior:

Ao contrário do limite inferior, o pior caso do *Payback* é quando o tempo de retorno do investimento inicial é o maior possível. Assim, quanto menor for o valor do *Payback* acumulado, mais lentamente se reaverá o valor do investimento feito inicialmente.

Para isso, são destacados os menores valores de entrada de caixa, entradas de caixa descontadas (valor presente) e *Payback* acumulado, como segue na tabela:

Anos	Projeto A		
	Entradas de Caixa (R$)	**Entradas de Caixa Descontadas (VP)**	***Payback* Acumulado (R$)**
2	6.000,00	4.958,67	10.413,21
3	6.000,00	4.507,88	14.921,09

Tabela 4.15: limite superior do *Payback Descontado Intervalar* – Projeto A

Sabe-se que o limite superior do intervalo será uma transição do segundo para o terceiro ano. Assim:

$$\overline{PBId}_A = \textit{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\textit{Investimento Inicial} - \textit{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\textit{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}} \right)$$

$$\overline{PBId}_A = 2 + \left(\frac{14.500,00 - 10.413,21}{4.507,88} \right)$$

$$\overline{PBId}_A = 2 + \left(\frac{4.086,79}{4.507,88} \right)$$

$$\overline{PBId}_A = 2,906588$$

Dessa maneira, como *PBId* **=** $[\underline{PBId}; \overline{PBId}]$, então $PBId_A$ = [1,8494438; 2,906588]. Utilizando arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo *PBId* = [1,84; 2,91].

Logo, o período *Payback Descontado Intervalar* será **[1,84; 2,91]**, o que equivale dizer que o valor do investimento inicial será recuperado entre 1,84 e 2,91 anos, de acordo com as estimativas feitas.

Exemplo 2: A mesma empresa deseja saber o período *Payback Descontado Intervalar* de um novo projeto cujas informações estão descritas a seguir:

Período *Payback* Aceitável: 3 anos	
Projeto B: Investimento Inicial de R$7.000,00	
Ano	**Fluxos Esperados de Caixa (R$)**
1	[5.000,00; 6.000,00]
2	[-2.000,00; -1.700,00]
3	[7.000,00; 8.000,00]

Tabela 4.16: informações – Projeto B

A taxa de desconto é de 10%, sendo representada pelo intervalo degenerado [0,10; 0,10].

Inicialmente, assim como no período *Payback Descontado* tradicional, são calculados todos os valores presentes das entradas de caixa:

$$VPI_B = \left(\frac{[5.000,00;\ 6.000,00]}{([1;1]+[0,10;\ 0,10])^1} + \frac{[-2.000,00;\ -1.700,00]}{([1;1]+[0,10;\ 0,10])^2} + \frac{[7.000,00;\ 8.000,00]}{([1;1]+[0,10;\ 0,10])^3} \right)$$

$$VPI_B = \left(\frac{[5.000,00;\ 6.000,00]}{[1,10;1,10]} + \frac{[-2.000,00;\ -1.700,00]}{[1,21;1,21]} + \frac{[7.000,00;\ 8.000,00]}{[1,331;1,331]} \right)$$

De acordo com a fórmula (77) do valor presente intervalar são calculados os valores presentes dos fluxos de caixa, como segue:

1º) Cálculo dos limites inferiores referentes aos valores presentes dos fluxos de caixa:

$$\underline{VPI}_B = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{EC}_j}{(1+\overline{I})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{SC}_l}{(1+\underline{I})^l} \right)$$

$$\underline{VPI}_B = \left(\frac{5.000,00}{1,10} + \frac{(-2.000,00)}{1,21} + \frac{7.000,00}{1,331} \right)$$

$$\underline{VPI}_B = \left(\underbrace{4.545,4545}_{\text{Ano1}} - 1\underbrace{652,8925}_{\text{Ano 2}} + \underbrace{5.259,2036}_{\text{Ano3}} \right)$$

Assim, os limites inferiores dos valores presentes dos fluxos de caixa são 4.545,4545, - 1.652,8925 e 5.259,2036 referentes, respectivamente, ao primeiro, segundo e terceiro anos.

2º) Cálculo dos limites superiores referentes aos valores presentes dos fluxos de caixa:

$$\overline{VPI}_B = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{EC}_j}{(1+\underline{I})^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{SC}_l}{(1+\overline{I})^l} \right)$$

$$\overline{VPI}_B = \left(\frac{6.000,00}{1,10} + \frac{(-1.700,00)}{1,21} + \frac{8.000,00}{1,331} \right)$$

$$\overline{VPI}_B = \left(\underbrace{5.454,5454}_{\text{Ano1}} - \underbrace{1.404,9586}_{\text{Ano 2}} + \underbrace{6.010,5184}_{\text{Ano 3}} \right)$$

Assim, os limites superiores dos valores presentes dos fluxos de caixa são 5.454,5454, - 1.404,9586 e 6.010,5184 referentes, respectivamente, ao primeiro, segundo e terceiro anos.

Dessa maneira, tem-se que:

$$VPI_1 = [4.545,4545;\ 5.454,5454]$$

$$VPI_2 = [-1.652,8925;\ -1.404,9586]$$

$$VPI_3 = [5.2599,2036;\ 6.010,5184]$$

Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, têm-se os novos intervalos:

VPI_1 = [4.545,45; 5.454,55]

VPI_2 = [-1.652,89; -1.404,96]

VPI_3 = [5.2599,20; 6.010,52]

Anos	Projeto B		
	Fluxos de Caixa (R$)	Fluxos de Caixa Descontados (VPI)	*Payback* Acumulado (R$)
1	[5.000,00; 6.000,00]	[4.545,45; 5.454,55]	[4.545,45; 5.454,55]
2	[-2.000,00; -1.700,00]	[-1.652,89; -1.404,96]	[2.892,56; 4.049,59]
3	[7.000,00; 8.000,00]	[5.259,20; 6.010,52]	[8.151,76;10.060,11]

Tabela 4.17: *Payback Descontado Intervalar* – Projeto B

Sendo o investimento inicial de R$7.000,00, sabe-se que este se encontra em uma transição do segundo para o terceiro ano, uma vez que o valor está entre R$4.049,59 e R$8.151,76.

Contudo, o segundo ano não pode ser considerado o limite inferior do intervalo, visto que não contém o valor do investimento inicial.

Ainda, o limite inferior do *Payback* acumulado do terceiro ano excede o valor do investimento inicial, violando o objetivo desse método, o qual consiste em obter um valor acumulado igual, e não superior, ao do investimento realizado a fim de se obter um período que corresponda a esse retorno.

Dessa forma, o segundo ano não pode ser considerado como limite inferior do intervalo correspondente ao *Payback Descontado Intervalar* e nem o terceiro ano pode ser considerado como limite superior de tal intervalo.

Assim, deduz-se que o limite inferior do intervalo equivalente ao *Payback* será obtido como uma transição do segundo para o terceiro ano, bem como seu limite superior. O período *Payback Descontado Intervalar*, então, será um intervalo do tipo [2,x; 2,y], em que ambos, x e y, representam a transição do segundo para o terceiro ano.

O cálculo do *Payback Descontado Intervalar* será dado da seguinte maneira:

1º) Cálculo do limite inferior:

Novamente, são destacados os maiores valores de fluxos de caixa, fluxos de caixa descontados (valor presente) e *Payback* acumulado.

Anos	**Projeto B**		
	Fluxos de Caixa (R$)	**Fluxos de Caixa Descontados (VP)**	***Payback* Acumulado (R$)**
2	-1.700,00	-1.404,96	4.049,59
3	8.000,00	6.010,52	10.060,11

Tabela 4.18: limite inferior do *Payback Descontado Intervalar* – Projeto B

$$\underline{PBId}_B = \textit{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\textit{Investimento Inicial} - \textit{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\textit{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}} \right)$$

$$\underline{PBId}_B = 2 + \left(\frac{7.000,00 - 4.049,59}{6.010,52} \right)$$

$$\underline{PBId}_B = 2 + 0,4908743$$

$$\underline{PBId}_B = 2,4908743$$

2º) Cálculo do limite superior:

Novamente, são destacados os menores valores de fluxo de caixa, fluxos de caixa descontados (valor presente) e *Payback* acumulado, como segue na tabela:

Anos	Projeto B		
	Fluxos de Caixa (R$)	**Fluxos de Caixa Descontados (VP)**	***Payback* Acumulado (R$)**
2	-2.000,00	-1.652,89	2.892,56
3	7.000,00	5.259,20	8.151,76

Tabela 4.19: limite superior do *Payback Descontado Intervalar* – Projeto B

$$\overline{PBId}_B = \textit{Limite Inferior do Intervalo} + \left(\frac{\textit{Investimento Inicial} - \textit{Valor Acumulado até Limite Inferior}}{\textit{Entrada de Caixa do Limite Superior do Intervalo}} \right)$$

$$\overline{PBId}_B = 2 + \left(\frac{7.000,00 - 2.892,56}{5.259,20} \right)$$

$$\overline{PBId}_B = 2 + 0,7810009$$

$$\overline{PBId}_B = 2,7810009$$

Dessa maneira, como *PBId* **=**$[\underline{PBId}; \overline{PBId}]$, então $PBId_B$ = [2,4908743; 2,7810009]. Utilizando arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [2,49; 2,79].

Logo, o período *Payback Descontado Intervalar* será **[2,49; 2,79]**, o que equivale dizer que o valor do investimento inicial será recuperado entre 2,49 e 2,79 anos, de acordo com as estimativas feitas.

4.2.5.4 Análise Custo/Volume/Lucro Intervalar

Como já foi visto, a Análise Custo/Volume/Lucro permite que a empresa seja capaz de determinar o nível de operações necessárias para cobrir todos os custos operacionais e avaliar a lucratividade associada aos vários níveis de venda.

Sabe-se que tal análise abrange os conceitos de Margem de Contribuição, a qual representa o montante disponível para que sejam cobertas as despesas fixas e, em seguida, prover os lucros e o Ponto de Equilíbrio, o qual corresponde ao volume de operações que não geram nem lucro, nem prejuízo.

Para um melhor entendimento de como esses conceitos podem ser aderidos aos conceitos da matemática intervalar, segue um pequeno exemplo adaptado de [16].

Exemplo: Um investidor deseja montar uma pequena oficina voltada para serralheria artística. Ele deseja montar seu negócio alugando um salão de 30m² de área útil em uma área residencial com aluguel de R$400,00 por mês. Inicialmente, ele faz o planejamento de quanto deverá desembolsar para a partida de seu negócio, considerando os seguintes quesitos:

INVESTIMENTO INICIAL	
Aluguel mensal (considera-se o pagamento de calção ou depósito de 3 vezes o valor do aluguel)	[R$400,00; R$400,00] * [3; 3] = [R$1.200,00; R$1.200,00]
Aquisição de máquinas e equipamentos para a serralheria	[R$3.000,00; R$3.600,00]
Folha de pagamento (3 funcionários)	[R$1.638,40; R$1.638,40]
Capital de giro	[R$3.300,00; R$3.800,00]
Custo do material	[R$360,00; R$390,00]
Veículo para transporte de mercadorias	[R$18.000,00; R$20.000,00]
Cadeira de escritório (2 unidades)	[R$100,00; R$130,00] * [2; 2] = [R$200,00; R$260,00]
Mesa para escritório (1 unidade)	[R$220,00; R$250,00]
TOTAL	**[27.918,40; 31.138,40]**

Tabela 4.20: Investimento Inicial - Serralheria

É importante mencionar que no planejamento inicial alguns dos valores foram tidos como pontuais, como por exemplo, o valor do aluguel. Isso se deve ao fato de ter sido considerado que o investidor já teria feito uma pesquisa de mercado sobre eles e saberia o quanto desembolsar, realmente, para sua aquisição.

A seguir, são estimados os custos fixos mensais, os quais independem das variações ocorridas no volume de vendas:

CUSTOS FIXOS MENSAIS	
Aluguel mensal	[R$400,00; R$400,00]
Folha de pagamento **(Tabela 4.23)**	[R$1.638,40; R$1.638,40]
Custos administrativos **(Tabela 4.22)**	[R$670,00; R$865,00]
Tributos diversos (IPTU, IPVA, etc.)	[R$198,60; R$198,60]
Depreciação de máquinas e equipamentos	[R$20,00; R$25,00]
Material de expediente (tinta de impressora, grampeador, folha de papel, canetas, etc.)	[R$75,00; R$110,00]
Material de limpeza	[R$30,00; R$48,00]
TOTAL	**[R$3.032,00;R$3.285,00]**

Tabela 4.21: cálculo dos custos fixos mensais – Serralheria

CUSTOS ADMINISTRATIVOS	
Água	[R$70,00; R$95,00]
Energia	[R$250,00; R$320,00]
Telefone	[R$80,00; R$100,00]
Combustível	[R$270,00; R$350,00]
TOTAL	**[R$670,00; R$865,00]**

Tabela 4.22: custos administrativos da Serralheria

QUADRO DE SALÁRIOS	
1 Serralheiro	[R$640,00; R$640,00]
1 Ajudante	[R$486,40; R$486,40]
1 Secretária	[R$512,00; R$512,00]
TOTAL	**[R$1.638,40; R$1.638,40]**

Tabela 4.23: quadro de salários dos funcionários da Serralheria (já incluem os encargos sociais)

Nesse cálculo, qualquer variável cuja determinação não possa ser feita com total precisão será representada por um intervalo, como por exemplo, o valor da conta de água, o qual pode variar a cada mês dependendo do consumo. O item que apresentar valor pontual será representado por um intervalo degenerado, como é o caso do salário do serralheiro.

Gastos relacionados aos tributos diversos, como IPVA e IPTU, são gastos anuais arcados pela empresa e foram divididos pelo período de utilização ou de geração de benefícios (doze meses).

Além dos custos fixos mensais, será calculado também o custo variável para a produção de um metro quadrado de grade simples. Para efetuar esse cálculo, primeiramente deve-se calcular o peso do material necessário para essa produção:

PESO DO MATERIAL PARA PRODUÇÃO DE 1m² DE GRADE SIMPLES	
8 ferros redondos de ½”	[8; 8] * [1,05kg; 1,05kg] = [8,4kg; 8,4kg]
3 ferros chatos de ¼”	[3; 3] * [1,20kg; 1,20kg] = [3,6kg; 3,6kg]
2 tubos quadrados 4”	[2; 2] * [6,4kg; 6,4kg] = [12,8kg; 12,8kg]
1 cantoneira	[1; 1] * [1,4kg; 1,4kg] = [1,4kg; 1,4kg]
TOTAL	**[26,2kg; 26,2kg]**

Tabela 4.24: cálculo do peso do material necessário para produzir 1m² de grade simples

Outro fator que influencia o cálculo do custo variável para a produção de 1m² de grade simples é o valor da mão de obra dos funcionários produtivos, o qual é obtido através da seguinte fórmula:

$$ValorHora = \frac{Salários}{número\ de\ horas\ trabalhadas\ ao\ mês} \quad (80)$$

Levando em consideração os salários de um serralheiro (R$640,00) e seu ajudante (R$486,40) e que eles trabalham oito horas por dia durante 22 dias úteis de um mês de 30 dias, tem-se que:

$$ValorHora = \frac{[R\$640{,}00; R\$640{,}00] + [R\$486{,}40; R\$486{,}40]}{[176; 176]} = [R\$6{,}40; R\$6{,}40]$$

Feito isso, calcula-se o tempo necessário para a produção de 1m² de grade simples:

QUANTIDADE DE HORAS PARA PRODUZIR 1m² DE GRADE SIMPLES	
Tempo de medição e corte	[0,25h; 0,4h]
Tempo de montagem	[0,75h; 0,9h]
Tempo de usinagem	[0,25h; 0,4h]
Tempo de acabamento	[0,75h; 1,0h]
TOTAL	**[2,0h; 2,7h]**

Tabela 4.25: tempo necessário para a produção de 1m² de grade simples

O tempo para efetivação de cada etapa da produção é estimado em um intervalo, uma vez que esse tempo pode variar de acordo com outros fatores, como por exemplo, fadiga. Tratar o tempo como intervalo acarretará em um número total de horas mais seguro em relação a valores pontuais.

Agora, pode-se efetuar o cálculo do custo variável para 1m² de grade simples:

CUSTO VARIÁVEL PARA PRODUÇÃO DE 1m² DE GRADE SIMPLES	
Custo do material (peso do ferro por m² x preço médio do quilo do ferro)	[26,2kg; 26,2kg] * [R$1,20; R$1,20] = [R$31,44; R$31,44]
Mão de obra direta	[R$6,40; R$6,40] * [2,0h; 2,7h] = [R$12,80; R$17,28]
Materiais consumíveis	[R$2,20; R$2,90]
Desperdício	[R$1,80; R$2,20]
Preço do custo	**[R$48,24; R$53,82]**
Impostos: supondo-se um percentual de 5% sobre o produto para empresas com esse nível de faturamento.	[0,05; 0,05] * [R$48,24; R$53,82] = [R$2,412; R$2,691]
Total de custos + impostos	**[R$50,65; R$56,52]**

Tabela 4.26: cálculo do custo variável para a produção de 1m² de grade simples

Após terem sido calculados todos os custos fixos e variáveis para a produção de 1m² de grade simples, deve-se, então, estipular o seu preço de venda. Esse preço deve tornar o produto competitivo e compatível com seu mercado consumidor. Nesse caso, o investidor optou pelo preço de R$90,00, o qual, hipoteticamente, equivale ao preço médio praticado pelo mercado.

Depois de definido o seu preço, deverá ser efetuado o cálculo do *Ponto de Equilíbrio Intervalar*, o qual corresponde a um intervalo que contém, provavelmente, de acordo com as estimativas feitas, a quantidade real de peças que devem ser vendidas para que a empresa não tenha nem lucro, nem prejuízo.

Para se calcular o *Ponto de Equilíbrio Intervalar* é necessário que, primeiramente, se calcule a *Margem de Contribuição Intervalar*. Como se está lidando apenas com um tipo de produto (grade simples), essa margem será a *Margem de Contribuição Unitária Intervalar* correspondente à grade simples.

Na matemática financeira tradicional, sabe-se que a Margem de Contribuição Unitária é dada pelo preço unitário do produto menos os custos variáveis para sua produção. Analogamente, a *Margem de Contribuição Unitária Intervalar* pode ser obtida através do seguinte cálculo:

$$\boldsymbol{MCIu} = [(\underline{\boldsymbol{Pu}} - \overline{\boldsymbol{Cv}});(\overline{\boldsymbol{Pu}} - \underline{\boldsymbol{Cv}})] \quad (81)$$

Em que $\underline{\boldsymbol{Pu}}$ e $\overline{\boldsymbol{Pu}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao preço unitário do produto, o qual, neste caso, porta valor pontual e $\underline{\boldsymbol{Cv}}$ e $\overline{\boldsymbol{Cv}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente ao custo variável para a produção do produto.

Dessa forma, tem-se que a *Margem de Contribuição Unitária Intervalar* para a produção de 1m² de grade simples é a seguinte:

$[\underline{\boldsymbol{Pu}};\overline{\boldsymbol{Pu}}]$ = [R$90,00; R$90,00]

$[\underline{\boldsymbol{Cv}};\overline{\boldsymbol{Cv}}]$ = [R$50,65; R$56,52]

MCIu = [(R$90,00–R$56,52); (R$90,00–R$50,65)]

***MCIu* = [R$33,48; R$39,35]**

Calculada a *Margem de Contribuição Unitária Intervalar* referente ao metro quadrado de grade simples, pode-se calcular o *Ponto de Equilíbrio Intervalar* através da seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{PEI} = \boldsymbol{CIR(PE)} = \left[\frac{\underline{\boldsymbol{CF}}}{\overline{\boldsymbol{MCIu}}} ; \frac{\overline{\boldsymbol{CF}}}{\underline{\boldsymbol{MCIu}}} \right] \qquad (82)$$

Em que $\underline{\boldsymbol{CF}}$ e $\overline{\boldsymbol{CF}}$, representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente aos custos fixos, ao passo que $\underline{\boldsymbol{MCIu}}$ e $\overline{\boldsymbol{MCIu}}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à *Margem de Contribuição Unitária Intervalar*.

Dessa forma, tem-se que o cálculo do *Ponto de Equilíbrio Intervalar* para o exemplo da Serralheria é dado a seguir:

$[\underline{\boldsymbol{CF}} ; \overline{\boldsymbol{CF}}]$ = [R\$3.032,00; R\$3.285,00]

$[\underline{\boldsymbol{MCIu}} ; \overline{\boldsymbol{MCIu}}]$ = [R\$33,48; R\$39,35]

$$\boldsymbol{PEI} = \left[\frac{3.032,00}{39,35} ; \frac{3.285,00}{33,48} \right]$$

$$\boldsymbol{PEI} = [77,052096; 98,118279]$$

Utilizando arredondamento direcionado, tem-se o novo intervalo [77,05; 98,12].

$$\boldsymbol{PEI} = [\mathbf{77,05; 98,12}]\,\mathbf{m^2}$$

Através desse cálculo é possível observar que uma pequena serralheria que possui três funcionários com custos fixos mensais entre R\$3.032,00 e R\$3.285,00 e preço de venda de R\$90,00, certamente terá prejuízo se sua produção for abaixo de 77,05m² e obterá um lucro certo se a produção for acima de 98,12m². No intervalo entre 77,05m² e 98,12m², entretanto, não se sabe com certeza o valor real do Ponto de Equilíbrio, mas sabe-se que tal intervalo contém, de acordo com as estimativas realizadas, esse valor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já foi visto, a matemática intervalar garante, de fato, a obtenção de resultados mais seguros em diversas áreas nas quais é aplicada. Não obstante, como o ambiente empresarial é caracterizado pela variabilidade e imprecisão dos fatores necessários para a apuração de seus custos, se torna interessante o auxílio da teoria intervalar a fim de se causar a diminuição dessas incertezas e, assim, obter decisões mais coerentes.

Como explicitado, representar os custos através de intervalos não torna a solução mais exata, mas permite que sejam conhecidos o melhor e o pior caso, acarretando no conhecimento do risco que corre uma empresa. Essa informação é considerada vantajosa, visto que permite que o gestor empresarial tome decisões com uma maior segurança.

Contudo, apesar de o uso da matemática intervalar estar sendo cada vez mais freqüente, sua aplicação nas áreas de finanças e economia, atualmente, é muito limitada, tendo pouquíssimos estudos a respeito.

Este trabalho pode ser visto, então, como um incentivo para uma série de estudos futuros envolvendo tópicos mais avançados de matemática financeira, uma vez que foram apresentados apenas alguns de seus conceitos introdutórios.

Assim, a continuação da intervalização dos conceitos financeiros é proposta como trabalho futuro, bem como a intervalização de métodos estatísticos utilizados atualmente no auxílio da qualificação de resultados empresariais.

REFERÊNCIAS

[1] ABREU, José Carlos Franco de et al. ***Finanças Corporativas***. 7 ed. Rio de Janeiro: FGV, 2006.

[2] AGUIAR, Marilton Sanchotene de; DIMURO, Graçaliz Pereira; COSTA, Antônio Carlos da Rocha. ICTM: An Interval Tessellation-based Model for Reliable Topographic Segmentation. ***Journal Numerical Algorithms***. Pelotas, 28 de dezembro de 2004. v.37, n. 14, p. 3-11.

[3] ALMEIDA, Alvaro Augusto de. ***Análise de Projetos***. Disponível em: http://www.geocities.com/wallstreet/Exchange/1726/project/projetos_cap2.htm. Acesso em 3 de outubro de 2007.

[4] ***APLICATIONS of Interval Computations:*** *General*. Disponível em: http://www.cs.utep.edu/interval-comp/applications.html . Acesso em 12 de abril de 2007.

[5] ASSAF, Alexandre. ***Matemática Financeira e Suas Aplicações***. 9 ed. São Paulo: Atlas, 2006.

[6] BARBOZA, Luciano Vitoria; DIMURO, Graçaliz Pereira; REISER, Renata Hax Sander . Power Flow with Load Uncertainty. ***Revista TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional***. São Paulo. v. 5, n. 1, p. 27-36, 2004.

[7] BRAGA, Roberto. ***Fundamentos e Técnicas de Administração Financeira***. São Paulo: Atlas, 2001.

[8] BRUNI, Adriani Leal; FONSECA, Yonara Daltro da. ***Técnicas de Avaliação de Investimentos:*** *Uma Breve Revisão da Literatura*. Cadernos de Análise Regional. São Paulo. v. 1, p. 40-54, 2003.

[9] CRESPO, Antônio Arnot. ***Matemática Comercial e Financeira.*** São Paulo: Saraiva, 2001.

[10] DAMODARAN, Aswath. ***Avaliação de Investimentos***. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1997.

[11] DROMS, Williams; PROCIANOY, Jairo. ***Finanças para Executivos não Financeiros***. Porto Alegre: Bookman, 2002.

[12] FRANCISCO, Walter de. ***Matemática Financeira***. São Paulo: Atlas, 2002.

[13] GALESNE, Alain; FENSTERSEIFER, Jaime; LAMB, Roberto. ***Decisões de Investimentos da Empresa***. São Paulo: Atlas, 1999.

[14] GARRISON, Ray; NOREEN, Eric. ***Contabilidade Gerencial***. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[15] GARROZI, Cícero; ALBUQUERQUE, Jones. A Aritmética Intervalar como Ferramenta para Solução de Problemas de Otimização. ***Revista Eletrônica de Iniciação Científica da SBC***. 01 junho de 2002.

[16] GIMENES, Jesus et al. ***Manual do Pequeno Empreendedor para área de Soldagem***. Disponível em: http://www.infosolda.com.br/nucleo/downloads/pp.pdf. Acesso em 12 de setembro de 2007.

[17] GITMAN, Lawrence Jeffrey. ***Princípios da Administração Financeira***. 10. ed. New York: Prentice Hall, 2003.

[18] GOLDBERG, David. ***What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic***. Disponível em: http://docs.sun.com/source/806-3568/ncg_goldberg.html. Acesso em 16 de março de 2007.

[19] GRIGOLETTI, Pablo de Souza et al. Análise Intervalar de Circuitos Elétricos. ***Revista TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional***. São Paulo. v. 7, n. 2, p. 287-296, 2006.

[20] GUSTAFSON, John. ***Scope of Applicability of Interval Arithmetic***. NASA Ames Laboratory, Departament of Energy, ISU, Iowa, USA, 1999.

[21] HANSEN, Eldon. Sharpness in Interval Computations. ***Journal Reliable Computing***. St. Petersburg: Springer Netherlands, 1997. v.3, n.1, p. 17-29.

[22] HARISSON, John. ***Mathematical Modeling to Formally Prove Correctness***. Disponível em: http://www.gelato.org/pdf/apr2006/gelato_ICE06apr_correctness_harrison_intel.pdf . Acesso em 25 de abril de 2007.

[23] HERZBERGER, Jurgen; ALEFELD, Gotz ***Introduction to Interval Computations***. New York: Academic Press, 1983.

[24] HICKEY, Timothy; EMDEN, Maarten H. Van. Interval Arithmetic: From Principles to Implementation. ***Journal of the ACM***. v.48, n.5, p.1038-1068, setembro de 2001.

[25] HOJI, Masakazu. ***Administração Financeira****: Uma Abordagem Prática*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

[26] HOLBIG, Carlos Amaral; DIVERIO, Tiaraju Asmuz. ***Sistema de Ponto Flutuante e o Padrão IEEE-754***. (Relatório de Pesquisa) - Porto Alegre: Instituto de Informática - UFRGS, 1994.

[27] HU, Zhiui Huey. ***Reliable Optimal Production Control with Cobb-Douglas Model**.* Texas A&M University, Texas, USA, fevereiro de 1997.

[28] KEARFOTT, Ralph Baker. ***Interval Computations***: *Introduction, Uses and Resources*. Departament of Mathematics, University of Southwestern Louisiana, Louisiana, USA, 2003.

[29] KEARFOTT, Ralph Baker et al. ***Standardized Notation in Interval Analysis***. Departament of Mathematics, University of Southwestern Louisiana, Louisiana, USA, maio de 2002.

[30] KREINOVICH, Vladik; STARKS, Scott. ***Interval-Related Talks at the Second International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance***. St. Petersburg, Russia, julho de 2006.

[31] KULISCH, Ulrich; MIRANKER, Willard. ***Computer Arithmetic in Theory and Practice***. New York : Academic Press, 1981.

[32] LYRA, Aarão; TAKAHASHI, Adriana; BEDREGAL, Benjamín René Callejas. ***Uma Ferramenta de Auxílio para Detecção de Câncer de Mama***. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 5. Natal, 2005. **Anais ...** ,Natal: ERMAC, 2005. p. 1-6.

[33] MACEDO, Wolfango. ***Análise de Erros***. Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal, 1992.

[34] ***MATEMÁTICA Intervalar***. Disponível em: http://www.dimap.ufrn.br/~java-xsc/matintervalar.html. Acesso em 25 de março de 2007.

[35] MEIRELES, Marcos. ***Operações de Desconto***. Disponível em: http://www.fadepe.com.br/restrito/conteudo/matfin_opdesconto1.doc. Acesso em 25 de setembro de 2007.

[36] MELO, Samara Pereira da Costa. ***Especificação do Tipo Intervalar Parametrizado em CASL***. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) – Departamento de Informática e Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2003.

[37] MOITA, Cecília Menon. ***Matemática Financeira***. São Paulo: Atlas, 2002.

[38] MOORE, Ramon Edgar. ***Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing***. PhD Thesis, Stanford University, USA, outubro de 1962.

[39] MOORE, Ramon Edgar. ***Interval Analysis***. New Jersey: Prentice Hall, 1966.

[40] MORAES, DALCIDIO et al. Introdução a Teoria dos Intervalos. In: ROQUE, Waldir L. (Org.). ***EIMAC'96 - Escola de Inverno de Matemática Aplicada e Computacional***. Porto Alegre: UFRGS, 1996, v.1, p. 215-244.

[41] MORAES, Lívia; WERNKE, Rodney. Análise Custo/Volume/Lucro Aplicada ao Comércio de Pescados. ***Revista Contemporânea de Contabilidade***. v.1, n.6, p. 81-101, 2006.

[42] MOREIRA, Elmo Nélio. ***Cadernetas de Poupança.*** Disponível em: http://www.gazetadeitauna.com.br/cadernetas_de_poupanca1.htm. Acesso em 20 de setembro de 2007.

[43] MOREIRA, Elmo Nélio. ***Inflação***. Disponível em: http://www.gazetadeitauna.com.br/conceito_inflacao.htm. Acesso em 18 de setembro de 2007.

[44] NEUMAIER, Arnold. ***Grand Challenges and Scientific Standards in Interval Analysis***. Institut für Mathematik, Universität Wien Strudlhofgasse, Austria, abril de 2002.

[45] OLDCORN, Roger; PARKER, David. ***Decisão Estratégica para Investidores***. São Paulo: Nobel, 1998.

[46] OLIVEIRA, Aristides da Rocha. ***Métodos de Análise de Investimentos***. Disponível em: http://home.ufam.edu.br/~aristides. Acesso em 10 de setembro de 2007.

[47] OLIVEIRA, Paulo Werlang; DIVERIO, Tiaraju Asmuz; CLAUDIO, Dalcidio. ***Fundamentos de Matemática Intervalar***. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 1997.

[48] ***POUPANÇA: Características***. Disponível em: http://www.fundos.com/poupanca.htm. Acesso em 1 de outubro de 2007.

[49] RENDELL, Alistair. ***Floating Point Numbers***. Disponível em: http://cs.anu.edu.au/Student/comp3320/lectures/Lect3a.pdf. Acesso em 25 de abril de 2007.

[50] ROCCHI, Carlos Antônio de. Aspectos Atuais dos Enfoques Lineares para Análise Custo-Volume-Crédito. ***Revista do CRCRS***. Porto Alegre. v. 26, n.89, p.15-27, 1997.

[51] ROSS, Stephen et al. ***Administração Financeira***. São Paulo: Atlas, 1995.

[52] RUMP, Siegfried M. Reliability in Computing: the role of Interval Methods in Scientific Computing. In: ***Algorithms for Verified Inclusions*** : *Theory and Practice*. San Diego: Academic Press Professional, 1988. p. 109 – 126.

[53] SANTIAGO, Regivan Hugo Nunes; BEDREGAL, Benjamin R. Callejas; ACIÓLY, Benedito Melo . Formal Aspects of Correctness and Optimality of Interval Computations. ***Journal Formal Aspects of Computing***. New York: Berlin-Heildelberg, 2006. v. 18, p. 231-243.

[54] SANTIAGO, Regivan Hugo Nunes; BEDREGAL, Benjamin R. Callejas; ACIÓLY, Benedito Melo . Interval Representations. ***Revista TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional***. São Paulo. v. 5, n. 2, p. 317-326, 2004.

[55] SANTOS, Ivan. ***Fluxo de Caixa Financeiro***. Disponível em: http://www.ivansantos.com.br/fluxo.htm. Acesso em 12 de setembro de 2007.

[56] SCHROEDER, Jocimari Tres et al. O Custo de Capital como Taxa Mínima de Atratividade na Avaliação de Projetos de Investimentos. ***Revista Gestão Industrial***. São Paulo. v. 1, n. 2, p.182-190, 2005.

[57] SHAALAN, Hesham Ezzat. ***Evaluating Uncertainty in Electric Utility Economic Analysis***. School of Technology, Georgia Southern University, Georgia, USA, maio de 2001.

[58] SILVA, Ivanosca Andrade da et al. ***An Interval Approach for Imprecise Cost***. Artigo submetido ao Elsevier Science em março de 2007.

[59] SODRÉ, Ulysses. ***Curso de Matemática Financeira***. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/financeira/curso/curso.htm . Acesso em 20 de março de 2007.

[60] SUNAGA, Teruo. Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis. In : ***Research Association of Applied Geometry Memoirs II***, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai. Tokyo. v.2, p. 547-656, 1958.

[61] ***VPL: A Superioridade Incompleta***. Disponível em: http://www.financasnaweb.hpg.ig.com.br/vplart.htm. Acesso em 7 de agosto de 2007.

[62] ZAGO, Ana Paula Pinheiro et al. ***Cálculo do Ponto de Equilíbrio em Condições de Risco e Incerteza***. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO (SEMEAD), 9. São Paulo, 2006. **Anais...** ,São Paulo: SEMEAD, 2006. p. 1-15.