Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada
Curso de Ciências da Computação

ALGUMAS EVIDÊNCIAS COMPUTACIONAIS DA INFINITUDE DOS NÚMEROS PRIMOS DE FIBONACCI E GENERALIZAÇÕES DESTES

Aluno: Ricardo Alexandre da Rocha Dias
Orientador: Benjamín René Callejas Bedregal

NATAL – RN
2008

RICARDO ALEXANDRE DA ROCHA DIAS

ALGUMAS EVIDÊNCIAS COMPUTACIONAIS DA INFINITUDE DOS NÚMEROS PRIMOS DE FIBONACCI E GENERALIZAÇÕES DESTES

Monografia apresentada à disciplina Relatório de Graduação, ministrada pelo professor Martin Alejandro Musicante para fins de avaliação da disciplina e como requisito para conclusão do curso de Ciências da Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal

Natal – RN

2008

RICARDO ALEXANDRE DA ROCHA DIAS

ALGUMAS EVIDÊNCIAS COMPUTACIONAIS DA INFINITUDE DOS NÚMEROS PRIMOS DE FIBONACCI E GENERALIZAÇÕES DESTES

Monografia apresentada à disciplina Relatório de Graduação, ministrada pelo professor Martin Alejandro Musicante para fins de avaliação da disciplina e como requisito para conclusão do curso de Ciências da Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MONOGRAFIA APROVADA EM 26/06/2008

BANCA EXAMINADORA

Professor: Benjamín René Callejas Bedregal
DIMAp - UFRN

Professora: Márcia Maria de Castro Cruz
Departamento de Matemática - UFRN

Professor: Roque Mendes Prado Trindade
DCE - UESB

Aos meus familiares e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido o dom da vida e ter me dado a graça de, na liberdade, concluir o curso de Ciências da Computação.

A minha mãe, tia e avó, por terem feito de suas vidas completa doação para que eu atingisse cada um dos meus objetivos.

A minha família, pelas constantes palavras de incentivo e por confiarem e acreditarem em mim.

Ao meu orientador Prof. Benjamín René Callejas Bedregal, por sua constante paciência, disponibilidade e entusiasmo que possibilitaram
a conclusão do presente trabalho.

Aos professores, por terem contribuído com seus conhecimentos, conselhos e exemplos para minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

Aos meus amigos e colegas de curso, pelo dia-a-dia ao longo desses anos, pelos sábados e domingos sacrificados para estudos e trabalhos.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre os números primos e números de fibonacci, objetivando alcançar algumas evidências computacionais para a conjectura que diz que: “Existem infinitos números de Fibonacci primos”, através dos testes realizados. São abordadas algumas generalizações dos números de Fibonacci, como a já conhecida seqüência dos números de Lucas, além de outras generalizações de iniciativa própria. Trata também de alguns conceitos-chave da Teoria dos números, sobre as propriedades concernentes aos primos que servem de base para muitos dos algoritmos de primalidade explicados brevemente aqui. Resultados teóricos e computacionais são explicitados e finalizamos com algumas conclusões sobre o trabalho.

Palavras-chave: números primos, números de Fibonacci, testes de primalidade, números de Lucas.

ABSTRACT

This work presents a study about prime numbers and Fibonacci numbers, trying to achieve some computational evidence for the conjecture: “There are infinite Fibonacci prime numbers”, using some tests. Some others generalized Fibonacci numbers approach, like Lucas Numbers and others generalizations, are studied here. Number Theory’s fundamental concepts are presented, as well properties of prime numbers that are the basis for primality testing algorithms. Theoric and computational results are explained. It finishes with the conclusion about the subject.

Keywords: prime numbers, Fibonacci numbers, primality test, Lucas numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

F_n ou F_x	Elemento da seqüência de Fibonacci
L_n ou L_x	Elemento da seqüência de Lucas
G_n ou G_x	Elemento de uma seqüência generalizada
$m \mid n$	m divide n
$m \nmid n$	m não divide n
mdc	Máximo divisor comum
mmc	Mínimo múltiplo comum
max	Maior valor de um conjunto
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor ou igual que
$\geq$	Maior ou igual que
$\neq$	Diferente
$\equiv$	Congruência
$\not\equiv$	Não congruência
!	Fatorial
$\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$	Combinação
log	Logaritmo na base 2
$\left(\frac{a}{b}\right)$	Símbolo de Legendre
(a,b)	Intervalo aberto à esquerda e à direira
$[a,b]$	Intervalo fechado à esquerda e à direita
$O(\ )$	Complexidade de pior tempo
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\wedge$	E lógico
$\vee$	Ou lógico
$\in$	Pertence

$\notin$	Não pertence
$\bigcup$	União
$\bigcap$	Intersecção
$\simeq$	Aproximadamente
$\cong$	Semelhante

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números é uma área da matemática que trata sobre os números inteiros e suas propriedades. O estudo dos números inteiros teve início com os matemáticos gregos ao redor de 500 A.C. E embora com mais de 2500 anos de estudos e pesquisas na área, algumas questões simples, porém, interessantes, ainda continuam em aberto, ou seja, sem resposta nem positiva nem negativa, e algumas outras tiveram resposta apenas recentemente. Por isso, este tema continua a fascinar e desafiar estudiosos pela sua natureza simples e misteriosa.

O presente trabalho relaciona duas classes de números inteiros positivos importantes e vastos na teoria dos números: os Números Primos e os Números de Fibonacci.

Os números primos têm despertado curiosidade e fascínio desde tempos remotos. Sua disposição, o modo como eles se encontram dentro da seqüência dos números naturais parece ser, ainda hoje e para muitos, bastante irregular, não há como prever quando aparecerá um novo primo.

No século XIII de forma fortuita, surgiu uma seqüência especial de números que talvez seja uma das mais simples de todas. Os números desta seqüência são conhecidos por números de Fibonacci, e são definidos através de recorrência.

Existem algumas conjecturas que relacionam números primos e números de Fibonacci. Uma delas diz que: “Existem infinitos números primos de Fibonacci”. No entanto, não existe nenhuma prova que ateste a veracidade desta conjectura. Será que realmente existem infinitos números primos na seqüência dos famosos números de Fibonacci?

1.1. MOTIVAÇÃO

Como dito na introdução, existem ainda muitas questões acerca dos números primos que ainda não foram respondidas. Muitas conjecturas famosas e que, provavelmente, têm muita probabilidade de serem verdadeiras serão citadas abaixo:

- **Números primos euclidianos**: não se sabe se estes números são infinitos ou não.

- **Conjectura de Goldbach (forte)**: todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de primos.

- **Conjectura de Goldbach (fraca)**: todo número inteiro ímpar maior que cinco pode ser escrito como a soma de três primos.

- **Conjectura dos primos gêmeos**: existem infinitos primos gêmeos, pares de primos cuja diferença é 2.

- Acredita-se que existem infinitos números primos de Mersenne, mas não de Fermat.

- É conjecturado que existem infinitos primos de Fibonacci.

- **Conjectura de Legendre**: Existe um número primo entre n^2 e $(n+1)^2$ para todo inteiro positivo n.

- **Conjectura de Brocard**: Há sempre, no mínimo, quatro primos entre os quadrados de primos consecutivos maiores que 2.

O presente trabalho se relaciona com a conjectura que envolve os números de Fibonacci.

1.2. HISTÓRIA DOS NÚMEROS PRIMOS

Há evidências, em registros dos antigos egípcios, de que eles tenham algum conhecimento sobre número primos. O Papiro egípcio de Ahmes ou de Rhind, de cerca de 1650 A.C, era um papiro onde um escriba de nome Ahmes ensinava as soluções de 85 problemas de aritmética e geometria. Mais tarde, no século XIX, este papiro foi encontrado pelo egiptólogo inglês Rhind. Curiosamente, neste papiro, os números primos foram escritos de forma diferente dos números compostos. O escriba Ahmes é o mais antigo matemático registrado na História. Contudo, o mais antigo registro de estudo explícito dos números primos vem dos antigos gregos. Os Elementos de Euclides contém importantes teoremas sobre os números primos, incluindo a infinitude dos primos e o teorema fundamental da aritmética. Euclides também mostrou como criar um número perfeito a partir de um número primo de Mersenne.

A primeira forma de se computar números primos é conhecida como Crivo de Eratosthenes, embora, números primos maiores encontrados atualmente não sejam gerados desta maneira.

Em 1640, Pierre de Fermat declarou o Pequeno Teorema de Fermat, somente provado mais tarde por Leibnitz e Euler. Fermat conjecturou que todos os números da forma $2^{2^n}+1$ são primos. No entanto, Euler descobriu alguns anos depois que o número $2^{32}+1$ é composto. O francês Marin Mersenne percebeu que alguns primos são da forma 2^p-1, onde *p* é um primo. Em sua homenagem, estes números são chamados de Primos de Mersenne.

No início do século XIX, Legendre e Gauss conjecturaram que quando x tende a infinito, o número de primos até x é, assintoticamente, x/ln(x).

Muitos matemáticos têm trabalhado sobre testes de primalidade para números longos, no entanto, com restrições quanto à forma específica do número. Os algoritmos mais recentes como APRT-CL, ECPP E AKS funcionam com qualquer número, porém, permanecem muito lentos.

Por muito tempo, se pensou que os números primos não tivessem nenhuma possível aplicação fora da matemática pura, ou fora do domínio da matemática. Em 1970, com o surgimento do conceito de Criptografia de Chave-Pública, no qual os números primos formavam a base dos primeiros algoritmos como aqueles da RSA, os matemáticos ganharam novo ânimo e motivação renovada para continuarem suas pesquisas.

A busca constante por números primos mais longos tem gerado interesses fora da matemática também. Alguns projetos com a finalidade de se encontrar números primos grandes se tornaram bastante populares nos últimos 15 anos, enquanto matemáticos continuam estudando fortemente a teoria dos números primos.

1.3. IMPORTÂNCIA DOS NÚMEROS PRIMOS

Uma das importâncias dos números primos é que todo número inteiro maior que um, não primo, pode ser escrito como um produto de números primos. Podemos, ainda, reescrever essa assertiva para dizer que todo inteiro positivo pode ser escrito como um produto de primos. Dito isto, se faz necessário definir um primo como sendo um produto de fator único e assumir que o número 1 é um produto vazio ou sem fator.

Cada número inteiro positivo tem uma única representação (sem considerarmos a ordem dos fatores) como produto de números primos e pode também ser identificado unicamente através de seus fatores. Isto é, um inteiro positivo pode ser decomposto de uma única maneira em fatores primos. Uma conseqüência disso também é que, não existem dois números inteiros positivos distintos cujas decomposições em primos sejam equivalentes. Estas afirmações foram provadas pelos antigos gregos.

A teoria dos números primos também serve de base para provar outros conceitos e teoremas dentro da matemática. Por exemplo, aplicando o teorema que diz: “Todo inteiro positivo pode ser escrito como um produto de primos, e sua fatoração é única levando em conta a ordem de seus fatores”, pode-se provar um outro teorema: “O número $\sqrt{2}$ é irracional”.

Os números primos também passaram a ter relevante importância na Ciência da Computação. Alguns algoritmos e estruturas de dados se baseiam nos números primos como é o caso das tabelas Hash. A partir de 1970, devido ao conceito de criptografia de chave-pública, passaram a formar a base dos primeiros algoritmos de criptografia, como exemplo, podemos citar o algoritmo cryptosystem da RSA.

Os números primos passaram a ser tão interessantes que existiam até premiações. A Eletronic Frontier Foundation (EFF) oferecia US$100,000 para quem encontrasse um primo de 10 milhões de dígitos, US$150,000 para um primo de 100 milhões de dígitos e US$250,000 para um primo de hum bilhão de dígitos. A RSA Factoring Challenge ofereceu até US$200,000 para quem encontrasse os fatores primos de um semi-primo ou pseudo-primo de até 2048 bits. Esse desafio foi encerrado em 2007.

1.4. BREVE INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

A seqüência dos números de Fibonacci surgiu, de maneira curiosa, no século XIII, quando um matemático começou uma investigação para determinado problema.

“Um fazendeiro criava coelhos. Cada coelho gerava um outro coelho quando completava dois meses de idade, e daí por diante, um novo coelho a cada mês. Coelhos nunca morrem, e não levamos em conta os

coelhos machos. Quantos coelhos o fazendeiro terá em n meses se ele começar apenas com um coelho recém-nascido?"

Este era o problema, não muito realista, que o italiano Leonardo Fibonacci estudava e que deu surgimento à famosa seqüência dos números de Fibonacci.

Os números de Fibonacci serão abordados mais adiante, no capítulo sobre Conceitos Fundamentais.

1.5. OBJETIVOS

A famosa e forte conjectura de que "Existem infinitos números primos de Fibonacci" continua sem nenhuma prova ou contraprova. Não se pode dizer nenhuma verdade a respeito dela.

Este trabalho tem como um de seus objetivos o desenvolvimento de algoritmos que gerem o maior número possível de números primos de Fibonacci, a fim de levantar alguma possível evidência sobre a infinitude dos números de Fibonacci primos, bem como sua distribuição dentro desta seqüência.

A seqüência dos números de Fibonacci é gerada a partir da fórmula recorrente:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ com } F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1.$$

Faz parte da presente proposta também verificar a possível presença de infinitos primos em duas simples variações da seqüência de Fibonacci.

A primeira delas é uma seqüência que dependa não somente de dois valores definidos inicialmente ou calculados a partir destes, mas dependa de k

fatores. Para $m=3$, teríamos $F_0=0$, $F_1=1$ e $F_2=2$. Os demais valores seriam calculados através de uma fórmula recursiva do tipo $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}+F_{n-2}$. Para m>3 seguiremos o mesmo raciocínio lógico.

A segunda variante tem a mesma fórmula que determina a seqüência de Fibonacci, no entanto, os valores de F_0 e F_1 não seriam aqueles convencionados nesta seqüência. Os valores F_0 e F_1 seriam dois inteiros positivos quaisquer. Para $F_0=3$ e $F_1=4$, a seqüência dos primeiros dez números seria: **3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 e 199**. Destes primeiros elementos da nova seqüência inspirada na idéia de Fibonacci seis são primos, ou seja, 60% dos primeiros dez elementos são primos. Na seqüência de Fibonacci apenas 40% dos dez primeiro elementos são primos.

Fibonacci	1	1	**2**	**3**	**5**	8	**13**	21	34	55
seqüência	**3**	4	**7**	**11**	18	**29**	**47**	76	123	**199**

Tabela 1.1 - Comparativo de seqüências.

Analisaremos também outra seqüência inspirada naquela de Fibonacci, já existente na literatura, conhecida por Números de Lucas. Os números de Lucas têm algumas aplicações dentro da Ciência da Computação na área de criptografia, e também em testes de primalidade e na geração de criptografia de chave pública e assinaturas de sistemas. A seqüência é tão simples quanto a de Fibonacci e, também, não menos interessantes pelas propriedades que ela apresenta e por sua relação com estes.

Os números da seqüência de Lucas são definidos pela fórmula $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ para todo $n>1$, $L_0=2$ e $L_1=1$. A seqüência que obteríamos a partir da fórmula e dos valores iniciais convencionados seria:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

Vale reforçar que não faz parte do escopo deste trabalho provar a veracidade ou não da conjectura sobre a infinitude de números de Fibonacci primos, mas, somente apresentar algumas evidências computacionais a favor da mesma, assim como estabelecer novas conjecturas sobre as generalizações dos números de Fibonacci primos abordados acima.

1.6. ABORDAGEM DOS CAPÍTULOS

Este trabalho foi organizado de forma a inserir o leitor dentro de todo contexto do tema abordado, dando uma visão geral dos conceitos básicos de cada um dos principais tópicos envolvidos.

No capítulo 1, foi apresentada a motivação, seguida de uma breve introdução aos números primos, sua importância e os números de Fibonacci. Também foi apresentado neste capítulo os objetivos do presente trabalho.

No capítulo 2, serão apresentados os conceitos básicos dos assuntos abordados em nosso tema. Este capítulo tratará de uma breve introdução à Teoria dos Números e suas principais propriedades, dos números de Fibonacce e de Lucas, e encerra com uma descrição de alguns algoritmos de teste de primalidade.

No capítulo 3, as generalizações propostas no nosso trabalho serão apresentadas, e no capitulo 4, será mostrado resultados teóricos das generalizações propostas no capítulo anterior.

Todo contexto dos testes computacionais, as idéias utilizadas no desenvolvimento dos algoritmos de testes, o hardware utilizado e suas limitações, serão apresentados no capítulo 5, e, no capítulo 6 apresentaremos os resultados destes testes.

Por fim, encerramos com o capítulo 7 sobre as considerações finais sobre o trabalho realizado explicitando algumas conjecturas e idéias a cerca do mesmo.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1. TEORIA DOS NÚMEROS

A Teoria dos Números tem como tema central os números inteiros e suas propriedades. Esta área da matemática surgiu há mais de 2500 anos, e ainda hoje existem muitas questões simples sem resposta, bem como algumas que só tiveram alguma resposta recentemente.

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades e noções básicas dos números inteiros dos quais fazem parte os números primos.

2.1.1. Divisiblidade

Sejam dois inteiros quaisquer m e n. Dizemos que m divide n se, $m > 0$ e o resultado da divisão n/m é um inteiro [2]. A notação que indica que "m divide n" é:

$$m \mid n \Leftrightarrow m > 0 \text{ e } n = mk \text{ para algum inteiro } k.$$

Se m não divide n usamos a notação:

$$m \nmid n$$

Uma outra relação "n é múltiplo de m", significa quase a mesma coisa menos no fato de que n não precisa ser necessariamente positivo. Assim, existe apenas um múltiplo de 0, porém, 0 não divide nada. [2]

Para quaisquer inteiros a, b e c, podemos declarar alguns simples fatos baseado na divisibilidade [1]:

(i) $a \mid a, \quad 1 \mid a, \quad e \quad a \mid 0;$

(ii) $a \mid b \; e \; a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c);$

(iii) $a \mid b \Rightarrow a \mid -b;$

(iv) $a \mid b \; e \; b \mid c \Rightarrow a \mid c.$

2.1.2. MMC – MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Chamamos de Mínimo Múltiplo Comum de dois inteiros positivos m e n, o maior inteiro positivo que é divisível por m e n.

Como exemplo podemos dizer que o mmc(9,5) é 45, mmc(12,9) é 36 e mmc(10, 5) é 10.

2.1.3. MDC – MÁXIMO DIVISOR COMUM

Chamamos de Máximo Divisor Comum de dois inteiros m e n, o maior inteiro que divide ambos. Logo podemos escrever formalmente:

mdc(m,n) = max{k, tal que, k|m e k|n}.

Como exemplo podemos dizer que mdc(25,35) = 5 e que mdc(42, 18) = 6.

O mdc apresenta algumas propriedades interessantes. Uma delas é que podemos calcular o mdc usando um método antigo, de mais de 2300 anos, chamado Algoritmo de Euclides. Este algoritmo se baseia na recursão e a explicação de seu funcionamento se encontra nas próximas páginas.

Existe um pequeno teorema que é uma conseqüência deste algoritmo [2]:

$$k \mid m \quad e \quad k \mid n \quad \Leftrightarrow \quad k \mid mdc(m,n)$$

A seguir abordaremos o conceito de número primo. Além de ser tema central do nosso trabalho, os números primos também são de fundamental importância no estudo dos números inteiros, uma vez que os primos são a base de construção de todo inteiro.

2.1.4. NÚMEROS PRIMOS

Definição 1: *Chamamos de número primo um número inteiro $p > 1$ não divisível por qualquer outro inteiro além de p, $-p$, 1 e -1. [3]*

Definição 2: *Um número inteiro $p > 1$ é primo se, e somente se, não pode ser escrito como produto de dois inteiros positivos menores. [1]*

Um número inteiro $n > 1$ não primo é chamado número composto.

Alguns matemáticos não consideram os divisores negativos, ou seja, $-p$ e -1. Eles apenas consideram os divisores positivos do número. Também foi convencionado que o número 1 não é primo, nem muito menos composto.

Podemos dizer que todo inteiro positivo pode ser escrito como um produto de números primos. Consideramos os números primos como sendo um produto de um único fator e o número 1 é considerado um produto vazio.

Apresentaremos três famosos teoremas abaixo que se relacionam bem com nosso trabalho:

Teorema 1: *Todo número inteiro positivo pode ser escrito como produto de primos e sua fatoração é única considerando a ordem de seus fatores primos. [3]*

Este teorema citado logo acima é conhecido como "Teorema Fundamental da Aritmética".

O próximo teorema foi conjecturado e provado por Euclides no terceiro século a.C. e é um teorema muito interessante que inspirou outras conjecturas famosas, inclusive a que o presente trabalho trata.

Teorema 2: *Existem infinitos números primos. [41]*

O terceiro teorema que apresentamos é tão interessante quanto o segundo e já nos traz a idéia de que os espaços entre os números primos se tornam maiores à medida que o número cresce.

Teorema 3: *Para todo inteiro positivo* k*, existe uma seqüência de* k *inteiros compostos consecutivos. [3]*

Este terceiro teorema parece meio obscuro ou incompleto à primeira leitura. Mas o que ele realmente quer dizer é que existem seqüências de inteiros compostos consecutivos de todos os tamanhos que se possa imaginar. Por exemplo, se imaginarmos nosso $k = 5$, podemos afirmar que existe uma seqüência de cinco inteiros compostos consecutivos e são eles: *5!, 5! + 1, 5! +2, 5!+ 3, 5! + 4, 5! +5*.

Apesar dos números primos serem infinitos, o que foi provado por Euclides, esses números se tornam mais raros à medida que tendem ao infinito. Esta afirmativa parece até uma contradição porque quando falamos na noção de infinito temos sempre a idéia de indefinição de quantidades. Mas, o que é claro para nós e que podemos afirmar com certeza como uma conseqüência do teorema acima, é que se nós fizermos a razão entre os números primos e os números compostos encontrados entre 1 a k, essa razão só tende a diminuir quando o valor de k se torna grande.

2.1.5. CONGRUÊNCIA

Definição 3: *Sejam os inteiros n, a e b, com $n > 0$. Dizemos que a é côngruo a b modulo n se n / $(a-b)$, e escrevemos $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$. Se n não divide $(a-b)$, então $a \bmod n \neq b$. Chamamos a relação $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ de relação de congruência, ou ainda, apenas de congruência. O número n que aparece na relação de congruência é chamado de módulo da congruência. Chamamos a atenção para o uso de "mod". No presente trabalho, caso não seja explícito, mod sempre denotará o módulo da congruência e não o resto de uma divisão.*

Da relação de congruência explicada acima observamos que $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ se e somente se existe um inteiro c que satisfaça a igualdade: $a = cn + b$. A partir disto temos o seguinte teorema:

Teorema 4: *Seja n um inteiro positivo. Para todo inteiro a, existe um único inteiro b tal que $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ e $0 \leq b < n$, ou seja, b é o resto da divisão de a por n. [1]*

Apresentamos abaixo algumas propriedades dos inteiros que dizem respeito à relação de congruência.

Para um valor de n fixo, o teorema seguinte nos mostra que $\cdot \equiv \cdot(\mathrm{mod}\ n)$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros:

Teorema 5: *Seja n um inteiro positivo. Para todo a, b e c pertencentes ao conjunto dos números inteiros, temos: [1]*

(i) $a \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$

(ii) $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n) \Rightarrow b \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$

(iii) $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ e $b \equiv c(\mathrm{mod}\ n) \Rightarrow a \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$

Teorema 6: *Para todo inteiro positivo* n*, e todo* a, a', b, b' *pertencentes ao conjunto dos inteiros, se* $a \equiv a'(\mathrm{mod} n)$ *e* $b \equiv b'(\mathrm{mod}\ n)$*, então [1]:*

$$a + b \equiv a' + b'(\mathrm{mod}\ n) \text{ e } a \cdot b \equiv a' \cdot b'(\mathrm{mod}\ n)$$

2.1.6. PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

Teorema 7: *Se* p *é um número primo e* a *é um inteiro, então* $p \mid a^p - a$*. [13]*

Uma outra forma de apresentar esse teorema seria dizer que: Se p é um número primo e a é um inteiro não divisível por p, então $p \mid a^{p-1} - 1$.

Na prova deste Teorema de Fermat foi usado um lema [3] bem interessante que diz que:

Lema 1: Se p é um primo e $0 < k < p$, então $p \mid \binom{p}{k}$.

2.1.7. ALGORITMO DE EUCLIDES

O Algoritmo de Euclides é um algoritmo para computação do Máximo Divisor Comum de dois números. O mdc de dois números pode ser calculado de maneira muito simples. Para isto, basta que encontremos a fatoração em primos destes dois números e calcularmos o produto dos fatores comuns de menor expoente. Como exemplo calculamos o mdc(900, 108):

A fatoração em primos destes dois números:

$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

Os fatores comuns são 2 e 3. Aqueles de menor expoente são 2^2 e 3^2. Logo, o $mdc(900,108) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

O problema deste método é que calcular a fatoração em primos de um inteiro muito grande é bastante complicado [1]. O algoritmo de Euclides calcula o mdc de dois inteiros de uma maneira muito mais rápida, sem a necessidade de encontrar suas fatorações em primos. Este algoritmo, apesar de ter sido desenvolvido muito tempo atrás pelo famoso matemático grego Euclides, ainda é utilizado como parte de outros algoritmos para computação com inteiros.

Este algoritmo se baseia em alguns simples fatos:

(i) Se a *e* b *são inteiros positivos e* $a \mid b$, *então* $mdc(a,b) = a$.

(ii) $mdc(a,b) = mdc(a, b-a)$.

(iii) Seja r *o resto da divisão de* b *por* a. *Então,* $mdc(a,b) = mdc(a,r)$.

Convencionamos também que o $mdc(0,a) = a$. Descrevemos abaixo o funcionamento do Algoritmo de Euclides:

O Algoritmo de Euclides funciona da seguinte forma:

Sejam a e b inteiros positivos, e queremos encontrar o mdc deles. Os passos a serem realizados são [3]:

1. *Se* $a > b$, *nós trocamos* a *por* b *e vice-versa.*
2. *Se* $a > 0$, *dividimos* b *por* a, *e pegamos o resto* r *desta divisão. Substituímos* b *por* r *e retornamos ao passo 1.*

3. *Se ($a \neq 0$), retornamos b como sendo o mdc e paramos o algoritmo.*

Como dito anteriormente, este algoritmo é recursivo e precisa de uma condição de parada. A condição de parada deste algoritmo é quando a for igual a 0. Vamos executar um exemplo sobre o nosso algoritmo. Queremos calcular o mdc de 24 e 60. Então começamos nossa execução da seguinte maneira:

mdc(a,b) = mdc(24, 60) ;
mdc(24,60) = mdc(24, 12);
mdc(24,12) = mdc(12, 24);
mdc(12,24) = mdc(12, 0);
mdc(0,12) = 12;

Logo, mdc(24, 60) = mdc(0, 12) = 12. Além de termos determinado logo acima a condição de parada do algoritmo, precisamos também mostrar que o algoritmo executa em um número finito de passos e que a saída do algoritmo é aquilo que esperamos.

A garantia de que o algoritmo é finito está na execução do passo 2. Repare que na execução do passo 2 um dos números sempre diminui e o resto sempre é não-negativo. Isto basta para garantir que o algoritmo de Euclides não ficará rodando para sempre.

Em relação à saída ou resultado do algoritmo, podemos perceber que no passo 1 apenas trocamos a por b, o que não altera o resultado do mdc, pois $mdc(a,b) = mdc(b,a)$. O passo 3 também não muda o resultado do mdc, vide a propriedade citada em (iii).

Outra questão importante é o tempo de execução do algoritmo, quantos passos ele leva para encerrar. Podemos obter um limite superior de passos pensando no argumento de finitude da execução do algoritmo. Como sempre que os passos 1 e 2 são executados um dos dois números decresce, podemos afirmar que o algoritmo não levará mais do que $a+b$ passos para encerrar. Se calcularmos o mdc de dois números com mais de 100 dígitos poderemos levar $2 \cdot 10^{100}$ passos, o que é um número relativamente grande de passos na execução. Porém, o nosso exemplo mostra que ele não dura isso tudo. O limite de pior caso que escolhemos é um limite extremamente, exageradamente pessimista. Contudo, conforme os números (24 e 60) apresentados no nosso exemplo sugere, esta questão de número de passos é uma questão bem delicada. O tempo de execução do algoritmo de Euclides pode ser ligeiramente diferente dependendo dos números em questão.

Uma aproximação mais justa do tempo de execução de pior caso do Algoritmo de Euclides é: $\log a + \log b$, onde log é o log na base 2. [3]

2.1.8. TIPOS DE NÚMEROS PRIMOS

Muitos matemáticos tentaram descobrir padrões no aparecimento dos números primos na seqüência dos números inteiros e encontrar fórmulas para geração de números primos. Nenhuma destas duas tentativas foi totalmente bem sucedida.

São muitos os tipos de números primos: primos balanceados, primos de Carol, primos cubanos, primos de Cullen, primos diedrais, primos de Euclides, primos fatoriais, primos gaussianos, primos de Lucas, primos felizes, primos da sorte, primos de Mills, primos regulares, primos gêmeos, entre muitos outros.

Citamos abaixo, sem nos preocupar com provas ou teoremas, alguns importantes matemáticos que estabeleceram fórmulas para geração de certos primos que recebem seus nomes por satisfazerem suas fórmulas. Nenhuma destas fórmulas, no entanto, é capaz de gerar a seqüência de todos os números primos, uma vez que parece que estes estão distribuídos aleatoriamente dentro da seqüência dos inteiros.

2.1.8.1. Números Primos de Sophie Germain

Um número primo p é dito primo de Sophie Germain se $2p+1$ é também um número primo [41]. Conjectura-se, também, a existência de uma infinidade de primos de Sophie Germain; porém sua demonstração é considerada, ainda hoje, bastante difícil. São exemplos destes primos o número 2, 3, 5, 11 e 23. O maior número primo de Sophie Germain conhecido é $48047305725 \times 2^{172403}-1$. [33]

Estes números primos de Sophie Germain têm aplicação prática na geração de números pseudo-randômicos. [33]

2.1.8.2. Números Primos de Wieferich

Um primo p que satisfaz a congruência $2^{p-1} \equiv 1\left(\bmod p^2\right)$ é chamado primo de Wieferich [41]. São exemplos de números primos de Wieferich os números primos 1093 e 3511.

2.1.8.3. Pares de Wieferich

Um par de Wieferich [36] é um par de números primos p e q que satisfazem as relações:

$$p^{q-1} \equiv 1\left(\bmod q^2\right) \text{ e } q^{p-1} \equiv 1\left(\bmod p^2\right).$$

Os únicos pares de Wieferich conhecidos são: (2, 1093), (3, 1006003), (5, 1645333507), (83, 4871), (911, 318917) e (2903, 18787).

2.1.8.4. Números Primos de Wilson

O teorema de Wilson [41] diz que, se p é um número primo, então $(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$; Logo, o quociente de Wilson:

$$W(p) = \frac{(p-1)!+1}{p}$$, é um inteiro.

O número p é chamado primo de Wilson quando $W(p) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, ou ainda, um número primo p é um primo de Wilson se p^2 divide $(p-1)!+1$, onde "!" denota a função fatorial. São exemplos de primos de Wilson os números 5 e 13. [38]

2.1.8.5. Números Primos de Mersenne

Se um número da forma $2^m - 1$ é primo, então m é um número primo. Os números da forma $M_q = 2^q - 1$, onde q é um número primo, são chamados de Números de Mersenne [41]. No entanto, desde os tempos de Mersenne, era sabido que certos números de Mersenne eram primos e outros compostos. Por exemplo, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$ e $M_7 = 127$ são primos, enquanto que $M_{11} = 23 \times 89$.

Em 1640, Mersenne afirmou M_q é primo que para q = 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257. Em relação a 67 e 127 ele estava enganado, e esqueceu de colocar em sua lista os números 61, 89 e 107 (entre os números inferiores a 257). [19]

Os números primos de Mersenne, com $q \le 127$, foram descobertos antes do aparecimento dos computadores eletrônicos. Allan Turing foi o primeiro, em 1951, a tentar determinar números primos de Mersenne com auxílio do computador, no entanto, não obteve êxito. Em 1952, foram descobertos os números primos de Mersenne M_{521} e M_{607}.

O maior falso-primo fatorado até hoje é um número de Mersenne. O número de Mersenne $2^{1039}-1$ é o recordista e teve sua fatoração em primos no mês de Março de 2007. [11]

Ainda hoje existem questões abertas sobre a infinitude dos números primos de Mersenne e sobre a infinitude dos números compostos de Mersenne. O maior primo de mersenne conhecido até agora é: $2^{32582657}-1$.

2.1.8.6. Números Primos de Fermat

Todo número primo da forma $2^{2^n}+1$ é um Número de Fermat, e estes números primos são chamados de primos de Fermat [41]. Escrevemos formalmente:

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Pierre de Fermat conjecturou que todo número de Fermat é primo. De fato, os primeiros cinco números de F_0 a F_4 são primos. Mas, esta conjectura foi refutada por Leonhard Euler em 1732 quando ele mostrou que F_5 era um número composto. Os únicos números de Fermat conhecidos são os números de F_0 até F_4.

Muitos dos maiores números primos conhecidos são generalizações dos primos de fermat.

2.1.8.7. Números Primos de Wall-Sun-Sun

Um primo de Wall-Sun-Sun [35] é um certo tipo de número primo que é conjecturado existir embora nenhum seja conhecido. Um número primo $p > 5$ é chamado de primo de Wall-Sun-Sun se p^2 divide:

$$F\left(p - \left(\frac{p}{5}\right)\right)$$

Onde $F(n)$ é o enésimo número de Fibonacci e $\left(\frac{a}{b}\right)$ é o símbolo de Legendre para a e b e foge do escopo do nosso trabalho por envolver outros conceitos.

2.1.8.8. Números Primos Palindrômicos

Um número primo palindrômico [31] é um número primo que é também um número palíndromo. Os números palíndromos dependem da base do sistema de contagem, mas os números primos são independentes de tais conceitos. Os primos palíndrômicos da base 10 são:

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, ...

O maior número primo palíndrômico da base 10 conhecido é $10^{180004} + 248797842 \times 10^{89998} + 1$, encontrado por Harvey Dubner em 2007.

Ainda se encontra em aberto a questão da infinitude dos números primos palíndromos na base 10.

Na tabela abaixo mostramos os primeiros primos palíndrômicos da base binária:

Bin	11	101	111	10001	11111	1001001	1101011	1111111	100000001
Dec	3	5	7	17	31	73	107	127	257

Tabela 2.1 - Primos palindrômicos da base binária.

2.1.8.9. Números Primos de Fibonacci

Os números primos de Fibonacci são simplesmente os números primos encontrados na seqüência dos números de Fibonacci. O maior número primo de Fibonacci é o F_{604711}, com 126377 dígitos [46].

2.2. NÚMEROS DE FIBONACCI

"Um fazendeiro criava coelhos. Cada coelho gerava um outro coelho quando completava dois meses de idade, e daí por diante, um novo coelho a cada mês. Coelhos nunca morrem, e não levamos em conta os coelhos machos. Quantos coelhos o fazendeiro terá em n meses se ele começar apenas com um coelho recém-nascido?"

Como dito na seção *1.4 Breve Introdução à História dos Números de Fibonacci*, era este o problema, não muito realista, que o italiano Leonardo Fibonacci estudava e que deu surgimento à famosa seqüência dos números de Fibonacci.

A princípio, para um valor de n (número de meses) pequeno, não é difícil responder à questão acima. No primeiro e segundo meses o fazendeiro continua com apenas um coelho. No terceiro mês, como o primeiro coelho tem dois meses de idade completos e gera um outro coelho, o fazendeiro fica agora com dois coelhos. No quarto mês, o primeiro coelho gera mais um novo coelho e o fazendeiro passa a ter três coelhos em sua fazenda. No quinto mês, o segundo coelho completa dois meses de idade e passa a gerar coelhos também. Assim, o fazendeiro passa a ter cinco coelhos no quinto mês, pois dois novos coelhos foram gerados a partir do primeiro e segundo coelhos. Se nós dispusermos esses valores em uma tabela e observarmos com bastante atenção, seremos capazes de, facilmente, responder o número completo de coelhos nos próximos meses:

Nº de meses	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de coelhos	1	1	2	3	5	?	?	?

Tabela 2.2 - Quantidade de coelhos por mês (a).

O número de coelhos a adicionar no próximo mês será exatamente o número de coelhos com, no mínimo, dois meses de idade. Simplesmente, precisamos observar quantos coelhos existiam na fazenda no mês anterior e somar este número ao número de coelhos do mês atual para obtermos o número de coelhos do próximo mês.

Nº de meses	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de coelhos	1	1	2	3	5	3+5	5+3+5	...

Tabela 2.3 - Quantidade de coelhos por mês (b).

Nº de meses	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de coelhos	1	1	2	3	5	8	13	21

Tabela 2.4 - Quantidade de coelhos por mês (c).

Podemos expressar estes cálculos para o número de coelhos no *n*-ésimo mês através de uma fórmula. Para isto, denotamos por F_n o número de coelhos no mês n, para todo $n > 2$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \textbf{(1)}$$

Sabemos também que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, e assim por diante. Definimos por convenção que $F_0 = 0$; então a equação (1) permanecerá válida para $n = 1$.

Usando a equação (1) podemos determinar um número qualquer de termos da seqüência de Fibonacci:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144, 233, 377, 610, 987, ...

Os números desta seqüência são chamados números de Fibonacci. A equação (1), juntamente com os valores especiais de $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, determina unicamente os números de Fibonacci.

A simplicidade da regra que rege esses números, o fato do número depender apenas do valor dos outros dois imediatamente anteriores, ocorre numa ampla variedade de situações.

As "Bee Trees" – árvore genealógica das abelhas – fornecem um bom exemplo de como os números de Fibonacci acontecem naturalmente. Vamos considerar o surgimento de uma abelha macho. Cada abelha macho é produzida assexuadamente por uma abelha fêmea. Entretanto, cada abelha fêmea tem dois pais, um macho e uma fêmea. Aqui podemos ver os primeiros níveis desta árvore genealógica:

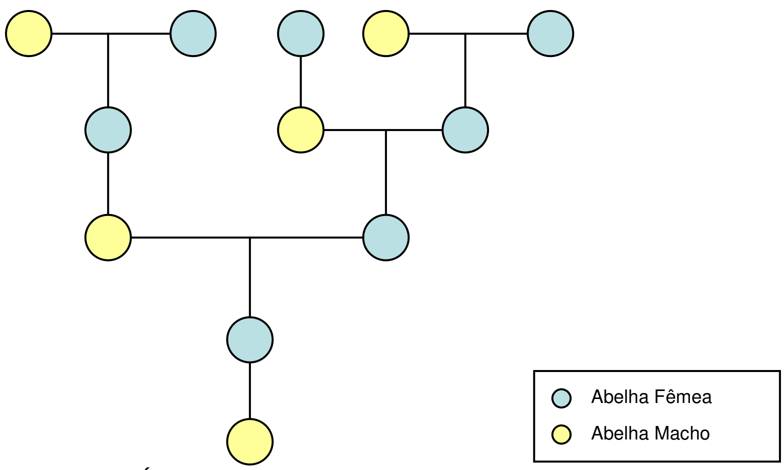

Figura 2.1 - Árvore genealógica da abelha macho.

A abelha macho possui um avô e uma avó; um bisavô e duas bisavós; dois tataravôs e três tataravôs, e assim vai. De maneira geral é fácil perceber que os números de Fibonacci aparecem naturalmente na hierarquia de níveis de avôs.

Os números de Fibonacci também acontecem na natureza. Por exemplo, uma flor de girassol típica possui uma cabeça enorme que contém espiral de pacotes de floretes, geralmente com 34 espiras numa direção e 55 numa outra. Outras, com uma cabeça menor, possuirão 21 e 34 espiras, ou 13 e 21; um girassol gigante com 89 e 144 espirais foi encontrado somente na Inglaterra.

Um outro exemplo de natureza diferente dos anteriores é o seguinte: suponha que você colocou dois fundos de copos de vidros um sobre o outro. De quantas maneiras os raios podem passar através ou serem refletidos depois de mudarem de direção n vezes? Os primeiros casos podem ser visualizados na figura abaixo:

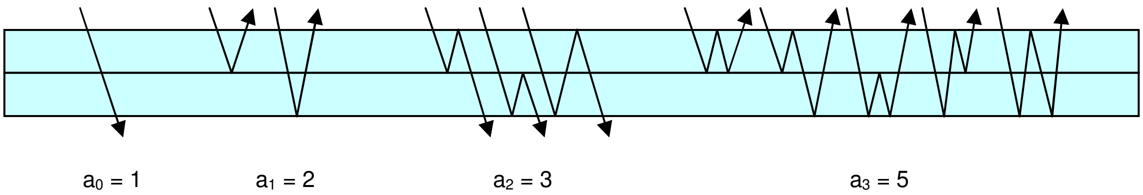

Figura 2.2 - Incidência dos raios.

Quando n é par, nós temos um número par de saltos e o raio atravessa a superfície de vidro formado pelo pelos fundos do copo. Quando n é ímpar, o raio é refletido e sai pelo mesmo lado que entrou. As a_n maneiras parecem ser números de Fibonacci, e se olharmos melhor na figura perceberemos a razão disto acontecer: para $n \geq 2$, os n-saltos do raio ou tem seu primeiro salto para a superfície oposta e continuam das a_{n-1} maneiras, ou o raio salto para superfície do meio e depois salta de volta novamente para terminar em uma das a_{n-2} maneiras. Então, nós temos a recorrência de Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

As condições iniciais são um pouco diferentes, pois os valores iniciais são $a_0 = 1 = F_2$ e $a_1 = 2 = F_3$, por tanto, $a_n = F_{n+2}$.

Leonardo Fibonacci introduziu estes números em 1202, e os matemáticos foram, gradativamente, descobrindo mais e mais coisas interessantes sobre eles. O matemático Edouard Lucas, conhecido pelo problema da “Torre de Hanói”, trabalhou muito com os números de Fibonacci na segunda metade do século XIX (de fato, foi Lucas que popularizou o nome “números de Fibonacci”). Um dos fabulosos resultados foi usar propriedades dos números de Fibonacci para provar que o número de Mersenne de 39 dígitos $2^{127} - 1$ era primo.

Um dos mais velhos teoremas sobre números de Fibonacci, de autoria do astrônomo francês Jean-Dominique Cassini em 1680 é a identidade [2]:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \text{, para n > 0.}$$

Por exemplo, para $n = 4$, temos: $F_5 = 5$; $F_3 = 2$ e $F_4 = 3$. Esta identidade diz com razão que: $5.2 - 3^2 = (-1)^4$.

A identidade de Jean-Dominique Cassini é a base de um paradoxo geométrico, um dos favoritos de Lewis Carroll. A idéia era pegar um tabuleiro de xadrez e cortá-lo em quatro partes e depois remontar estas partes para obter um retângulo. O resultado é um triângulo $F_{n+1} \cdot F_{n-1}$, portanto um quadrado foi ganho. No tabuleiro 8x8 temos 64 quadrados, no retângulo 5x13 temos 65.

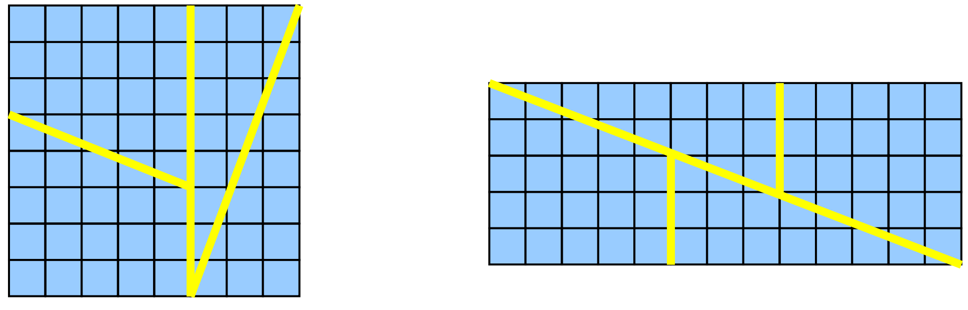

Figura 2.3 - Tabuleiro 8x8 (a) com 64 quadrados. Retângulo (b) com 65 quadrados.

Existem muitas outras identidades e curiosidades sobre os números de Fibonacci. Abaixo apresentamos algumas [3]:

- A soma dos n primeiros elementos de Fibonacci pode ser obtida pela expressão: $F_{n+2} - 1$.

$$\begin{array}{r} 0 = 0, \\ 0+1 = 1, \\ 0+1+1 = 2, \\ 0 + 1 + 1 + 2 = 4, \\ 0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7, \\ 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12, \\ 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20, \\ 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33. \end{array}$$

Figura 2.4 - Soma dos números de Fibonacci até n.

$$F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$$

- A relação $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$ também é verdadeira. Por exemplo: $F_4^2 + F_3^2 = F_7$, em números: $3^2 + 2^2 = 13$.

- A fórmula de Fibonacci, sem uso da recorrência, é dada por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Na próxima seção apresentaremos uma seqüência de números inspirada nos números de Fibonacci e conhecida por Números de Lucas.

2.3. NÚMEROS DE LUCAS

Existe uma outra série similar à série de Fibonacci. Edouard Lucas, que popularizou a série estudada por Leonardo de Pisa como Números de Fibonacci, estudou esta segunda série de números.

Os números na série de Fibonacci são definidos através de recursão a partir dos dois últimos números desta seqüência, que se inicia com os valores especiais de F_0 e F_1. Como dito em seção anterior, os valores especiais da série de Fibonacci são $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Estes dois valores determinam todos os outros números da série.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	...
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	...

Tabela 2.5 - Primeiros números de Fibonacci.

Por tanto, a regra básica para geração dos números de Fibonacci é:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ se } n \geq 1$$
$$\text{com } F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1$$

Se começássemos uma seqüência de números com os valores iniciais 1 e 1, por exemplo, continuaremos obtendo a mesma série de Fibonacci apenas com seus valores deslocado para direita, seja, $F_0' = F_1$, $F_1' = F_2$ e assim por diante.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	...
F_x'	1	1	2	3	5	8	13	21	...

Tabela 2.6 - Primeiros números de Fibonacci deslocados.

Para os valores iniciais sendo iguais a 1 e 2, observaríamos também apenas um deslocamento. Mas, se invertermos os valores iniciais para serem 2 e 1, respectivamente, teremos uma nova série.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	...
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	...

Tabela 2.7 - Primeiros números de Lucas.

Esta seqüência distingue daquela de Fibonacci. A seqüência definida pelos valores especiais $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, e pela mesma regra de recorrência que define a série de Fibonacci chamasse Série de Lucas ou, ainda, Números de Lucas em homenagem ao matemático francês Edouard Lucas.

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \text{ se } n \geq 1$$

$$\text{com } L_0 = 0 \text{ e } L_1 = 1$$

A tabela abaixo mostra um comparativo dos números iniciais da série de Fibonacci e de Lucas:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.8 - Comparativo das seqüências de Lucas e Fibonacci.

Uma ligeira análise sobre os números de ambas as seqüência nos leva a descoberta de que podemos escrever números de Lucas em função dos números de Fibonacci. Se somarmos os elementos de índices 1 e 3 em Fibonacci obteremos o elemento de índice 2 em Lucas.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.9 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (a).

Se somarmos os elementos de índices 2 e 4 de Fibonacci, obteremos o elemento de índice 3 em Lucas. Os elementos de índice 5 e 7 de Fibonacci nos levam ao elemento de índice 6 de Lucas, e assim por diante.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.10 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (b).

Isso mostra que podemos expressar os números de Lucas em função dos números de Fibonacci através da expressão:

$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, para todo n inteiro não-negativo.

Isso implica definirmos o valor de $F_{-1} = -1$ para obtermos o valor de L_0.

Um outro padrão interessante acontece se tentamos escrever, de maneira análoga, a seqüência de Fibonacci a partir da seqüência de Lucas.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.11 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (c).

Não obtemos a relação $F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$, como até poderíamos esperar. Mas, percebemos que se somarmos um elemento da seqüência de Lucas com o segundo elemento a partir deste, ou seja, saltando o próximo elemento, o resultante desta soma sempre será um múltiplo de 5.

$L_1 = 1$ e $L_3 = 4$, e $L_1 + L_3 = 5$;

$L_2 = 3$ e $L_4 = 7$, e $L_2 + L_4 = 10$;

$L_3 = 4$ e $L_5 = 11$, e $L_3 + L_5 = 15$;

$L_4 = 7$ e $L_6 = 18$, e $L_4 + L_6 = 25$;

Mas se comparamos agora os resultados destes valores com a expressão não coincidente acima:

$L_1 = 1$ e $L_3 = 4$; $L_1 + L_3 = 5$; e $F_2 = 1$.

$L_2 = 3$ e $L_4 = 7$; $L_2 + L_4 = 10$; e $F_3 = 2$.

$L_3 = 4$ e $L_5 = 11$; $L_3 + L_5 = 15$; e $F_4 = 3$.

$L_4 = 7$ e $L_6 = 13$; $L_4 + L_6 = 20$; e $F_5 = 5$.

Isto nos mostra o novo padrão: $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$

Muitas outras relações podem ser obtidas com estas duas séries. Nos exemplos abaixo mostraremos algumas delas:

Exemplo 1:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.12 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (d).

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

Exemplo 2:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.13 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (e).

$$L_n = (F_{n+3} + F_{n-3})/2$$

Exemplo 3:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.14 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (f).

$$L_n = (F_{n+4} - F_{n-4})/3$$

Exemplo 3:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_x	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tabela 2.15 - Relação entre os números de Lucas e Fibonacci (g).

$$F_n = (L_{n+2} - L_{n-2})/5\,.$$

São muitos os exemplos. Só para citar, uma outra relação entre estas duas seqüências é a seguinte:

$$L_n = \frac{F_{(2n)}}{F_n} \text{ ou } F_{(2n)} = L_n \cdot F_n$$

Outra coisa interessante é o fato de encontrarmos ambas as seqüências, de Fibonacci e de Lucas, no Triângulo de Pascal. Abaixo, o Triângulo de Pascal está escrito de outra forma de modo a facilitar a visualização das seqüências de Fibonacci e Lucas nela.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	1	2	1	-	-	-	-	-
3	-	-	-	1	3	3	1	-	-	-
4	-	-	-	-	1	4	6	4	1	-
5	-	-	-	-	-	1	5	10	10	5
6	-	-	-	-	-	-	1	6	15	20
7	-	-	-	-	-	-	-	1	7	21
8	-	-	-	-	-	-	-	-	1	8
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Figura 2.5 - Triângulo de Pascal modificado.

A seqüência de Fibonacci pode ser facilmente visualizada no desenho acima, basta apenas somar os elementos de cada coluna. Porém, precisamos ainda realizar algum algebrismo para enxergarmos a seqüência de Lucas.

Para obtermos os números de Lucas também somamos os valores dos números da coluna. Porém, antes de somarmos cada valor precisamos multiplicar cada valor pelo valor da sua coluna e dividi-lo pelo valor de sua

respectiva linha. Note que o multiplicador (coluna) em questão sempre será o mesmo, porém, o número a ser multiplicado, e o seu divisor irão variar.
Por exemplo, para a coluna de número 2 temos:

Número	Coluna	Linha	(Número x Coluna)/Linha
1	2	1	2
1	2	2	1
Soma			**3**

Tabela 2.16 - Cálculo do elemento L_2 .

O cálculo abaixo utiliza a seguinte fórmula: **(Número x Coluna)/Linha:**

(1 x 2) / 1 = 2

(1 x 2) / 2 = 1

A soma destes números é 3. Logo, $L_2 = 3$.

Para a coluna de número 4, temos:

Número	Coluna	Linha	(Número x Coluna)/Linha
1	4	2	2
3	4	3	4
1	4	4	1
Soma			**7**

Tabela 2.17 - Cálculo do elemento L_4 .

Da mesma maneira utilizamos a fórmula: **(Número x Coluna)/Linha:**

(1 x 4) / 2 = 2

(3 x 4) / 3 = 4

(1 x 4) / 4 = 1

E logo verificamos que a soma daqueles números nos dá 7, que é o elemento $L_4 = 7$ da seqüência de Lucas.

2.4. TESTES DE PRIMALIDADE

Teste de primalidade é um algoritmo que computa se determinado número n é um número primo ou não. O teste de primalidade é um dos problemas fundamentais da Teoria dos Números e tem forte relação com importantes aplicações como criptografia.

Estes problemas, referidos como problema do teste de primalidade, tem sido investigado intensivamente desde o surgimento da Teoria da Complexidade na década de 60 – quando as noções de complexidade foram formalizadas e várias classes de problemas foram definidas [4].

Existem algoritmos extremamente simples como os algoritmos de força bruta e, outros algoritmos que usam idéias e heurísticas mais sofisticadas: probabilísticos e algoritmos determinísticos. Algoritmos “eficientes” para o problema do teste de primalidade são conhecidos a um longo tempo [5]. Todavia, o problema, até pouco tempo atrás, não era considerado na classe dos problemas do tipo P - problemas resolvidos em tempo polinomial em relação à determinada entrada. Em 2004, Agrawal, Kaial e Saxena desenvolveram um algoritmo conhecido por AKS, de tempo-polinomial e publicaram um artigo [4] afirmando que o problema do teste de primalidade pertence à classe P.

Todos estes algoritmos utilizam alguma das várias propriedades dos números primos. A própria definição de número primo já nos dá, diretamente, uma maneira de determinar se um número n é primo ou não: Tentamos dividir o número n por todo número $m \leq \sqrt{n}$ - se m divide n, então n é composto, caso contrário, n é primo. Este teste é conhecido desde a época dos antigos gregos e é apenas uma generalização do Crivo de Eratosthenes que gerava todos os números primos menores que um inteiro n. Todavia, esse teste é ineficiente porque requer um número muito grande de passos para resolução do problema [4].

Uma outra propriedade que, quase, nos dá um teste eficiente é o Pequeno Teorema de Fermat: para qualquer número primo p, e qualquer a não divisível por p, $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$. Dados a e n, pode-se verificar eficientemente se $a^{n-1} \equiv 1(\bmod n)$. Entretanto, desde que muitos números compostos n também satisfazem a expressão acima para alguns valores de a, este teste não é 100% correto. Mesmo assim, o Pequeno Teorema de Fermat se tornou a base de muitos testes eficientes de primalidade [4].

Em 1975, Miller [42] obteve um algoritmo determinístico de tempo polinomial para teste de primalidade que assumia a Hipótese de Riemman e que utilizava a propriedade baseada no Pequeno Teorema de Fermat. Posteriormente, Rabbin [43] modificou o teste de Miller para obter uma nova versão do teste que não se fundamentasse em nenhuma hipótese ou teoria não provada. Dessa forma, o algoritmo de Rabbin seria incondicional em relação a hipóteses, pagando o preço de ser um algoritmo probabilístico.

Em 1974, Solovay e Strassen obtiveram um algoritmo probabilístico de tempo polinomial diferente, que se baseava na propriedade que para um primo n, $\left(\frac{a}{n}\right) = a^{\frac{n-1}{2}} (\bmod n)$ para todo a ($\left(\frac{}{-}\right)$ é o símbolo de Jacob). O algoritmo deles também pode ser determinístico se considerarem a Hipótese de Riemman.

A partir de então, muitos outros algoritmos foram propostos: algoritmos probabilísticos baseados nas mais diversas propriedades, algoritmos determinísticos que executavam em tempo não exponencial e muitos outros.

Na verdade, podemos classificar esses testes de várias formas [41], eles podem ser:

- *Testes para números de forma particular ou testes para números genéricos.*
- *Testes completamente justificados por teoremas ou testes cuja justificativa é baseada em conjecturas.*
- *Testes determinísticos ou testes probabilísticos.*

Cabe aqui explicar, brevemente, o que vem a ser um teste determinístico e um teste probabilístico. Os testes determinísticos são aqueles que para toda execução do teste para uma determinada instância de entrada retornam sempre a mesma resposta de saída. Sempre que o algoritmo (ou teste) for executado para aquela instância a resposta será sempre a mesma. A confiabilidade destes tipos de teste é 100% em se tratando de probabilidades.

Os testes probabilísticos são aqueles que retornam uma resposta com alto índice percentual de confiabilidade e se baseiam em números gerados aleatoriamente para computação do mesmo. A saída do algoritmo (ou teste) pode variar de acordo com o número aleatório gerado para uma mesma instância de entrada. Para se obter um resultado com determinado percentual de confiança deve-se executar o algoritmo várias vezes e conferir o seu resultado. No caso do teste de primalidade o algoritmo é executado várias vezes, se em alguma destas execuções o número foi considerado composto, teremos 100% de certeza nessa resposta. Porém, se o número foi considerado primo, a resposta terá um grau de confiabilidade diretamente proporcional ao número de execuções realizadas.

Nesta seção iremos descrever brevemente alguns algoritmos de teste de primalidade descrevendo suas principais características e em quais classificações eles se encontram.

2.4.1. Crivo de Eratosthenes

Este algoritmo para teste de primalidade, criado por Eratosthenes, é um dos mais primitivos e também bastante simples, e é utilizado para encontrar todos os números primos até um determinado número n de entrada.

O algoritmo funciona da seguinte maneira [44]:

1. Escreve-se uma lista de 2 até n, onde n é o maior número que queremos testar a primalidade. Esta lista é a lista dos números que testaremos para primalidade e chamaremos lista de teste.
2. Escrevemos o número 2 numa lista a parte, que será a lista de primos.
3. Marcamos na lista de teste todos os múltiplos de 2 até o número n.
4. O primeiro número que não foi marcado na lista de teste é um número primo e deveremos escrever esse número na lista de primos.
5. Marcamos na lista de testes todos os múltiplos deste número até n.
6. Repetimos os passos 4 e 5 até que não haja mais nenhum número na lista de testes para marcar.

Nome	Crivo de Eratosthenes
Classificação	• Teste para números genéricos • Teste completamente justificado por teoremas • Teste Determinístico
Problemas	A complexidade de tempo de execução é muito grande. Este teste se torna muito lento para números compostos de muitos dígitos. É um algoritmo de Força-Bruta.

Tabela 2.18 - Características do Crivo de Eratosthenes.

2.4.2. Alguns testes clássicos baseados em congruência

Os “Testes clássicos” são assim mencionados de acordo com o livro “Números primos: mistérios e recordes” do autor Paulo Ribenboim que afirma que, em sua opinião, testes clássicos são aqueles baseados nas congruências, indicados por Lehmer como extensões de testes anteriores de Lucas, Pocklington e Proth. Esta parte do trabalho se baseia em [41]. Citaremos abaixo dois destes testes clássicos

a) Teste 1:

Em 1876, Lucas descobriu uma verdadeira recíproca do pequeno teorema de Fermat bastante útil, que diz:

Seja $N > 1$. Supõe-se que exista um inteiro $a > 1$ tal que

i) $a^{N-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)$

ii) $a^{m} \bmod N \neq 1$, para $m < N - 1$.

Então N é primo.

Classificação	• Teste para números genéricos • Teste completamente justificado por teoremas • Teste Determinístico
Problemas	A complexidade de tempo de execução é grande. Este teste se torna muito lento para números compostos de muitos dígitos, uma vez que o teste exige (N–2) multiplicações sucessivas por a e a verificação que 1 não é resíduo módulo N de uma potência de a inferior a N – 1.

Tabela 2.19 - Características do Teste Clássico 1.

b) Teste 2:

Em 1891, Lucas formulou:

Seja $N > 1$. Supõe-se que existe um inteiro $a > 1$ tal que

i) $a^{N-1} \equiv 1 (\bmod N)$

ii) $a^m \bmod N \neq 1$, para todo m divisor de $N - 1$.

Então N é primo.

Classificação	• Teste para números genéricos • Teste completamente justificado por teoremas • Teste Determinístico
Problemas	É preciso conhecer todos os fatores de N – 1, e como falamos anteriormente no capítulo sobre Conceitos Fundamentais, não é fácil computar os fatores de um número grande.

Tabela 2.20 - Características do Teste Clássico 2.

2.4.3. Teste de Primalidade de Fermat

O pequeno teorema de Fermat declara que, se p é um número primo então a expressão $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$ é verdadeira, para $1 \leq a < p$. Se a expressão acima falha para algum valor de a dizemos que p é composto. Se a expressão é verdadeira para muitos valores de a podemos dizer que p é provavelmente primo, ou que p é um pseudo-primo.

O pseudocódigo para este teste é:

Entrada:

n: o número a ser testado;

k: parâmetro que determina quantas vezes o teste executará.

Saída:

Composto: se *n* é composto;

Provável Primo: caso contrário;

Repita k vezes:

Sorteie um número a no intervalo (1, n – 1]

Se $a^{n-1} \bmod n \neq 1$ *retorne Composto*

Retorne Provável Primo

Nome	Teste de Primalidade de Fermat
Classificação	• Teste para números genéricos • Teste completamente justificado por teoremas • Teste Probabilístico
Problemas	

Tabela 2.21 - Características do Teste de primalidade de Fermat.

2.4.4. Teste de primalidade de Lucas-Lehmer

O teste de primalidade de Lucas-Lehmer é um teste relativamente simples. Dado um inteiro *n* maior que 1, se faz necessário que todos os fatores primos de *n – 1* sejam conhecidos.

O algoritmo de Lucas-Lehmer funciona da seguinte maneira:

Se para todos os fatores primos q *de* $n-1$ *existe um inteiro* a*, tal que* $1 < a < n$*, as duas condições abaixo são satisfeitas, então* n *é um número primo. Caso contrário,* n *é um número composto.*

- *Condição 1:* $a^{n-1} \equiv 1(\bmod n)$
- *Condição 2:* $a^{\frac{n-1}{q}} \bmod n \neq 1$

Nome	*Teste de Primalidade de Lucas-Lehmer*
Classificação	• *Teste para números genéricos* • *Teste completamente justificado por teoremas* • *Teste Determinístico*
Problemas	*É preciso conhecer todos os fatores primos de n – 1. Como explicado antes, a fatoração em primos de um número não é uma tarefa fácil.*

Tabela 2.22 - Características do Teste de primalidade de Lucas-Lehmer.

Obs.: Esse teste é determinístico, mas muitos usam este teste de maneira probabilística, ora não usando o teste para todos os *a* no intervalo (1, n - 1), ora não usando o teste para todo fator primo de *q*. O problema aqui é que este teste determinístico tende a ter uma complexidade de tempo de execução muito alta se o número escolhido para fazer o teste for muito grande.

2.4.5. Teste de primalidade AKS

Este trecho do presente documento é baseado no documento *Primes in P* de autoria de Agrawal, Kaial e Saxena.

O algoritmo AKS é de fundamental importância para o mundo da Matemática e da Ciência da Computação porque ele é o primeiro algoritmo que conseguiu atingir os principais objetivos de interesse no desenvolvimento de testes de primalidade.

Estes objetivos eram conseguir um algoritmo que fosse ao mesmo tempo:

- Determinístico;
- Polinomial em sua complexidade de tempo de execução;
- Incondicional, ou seja, independente de quaisquer conjecturas ou hipóteses;
- E, independente também da forma do número.

O algoritmo tem o tempo de execução $O\left(\log^{15/2} n\right)$. Para provar que o AKS é um algoritmo correto é necessário apenas algumas simples ferramentas da álgebra.

O teste se baseia em uma identidade para números primos que é uma generalização do pequeno teorema de Fermat:

Seja $a \in \mathbb{Z}$ *,* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *, e* $(a,n) = 1$*. Então* n *é primo se e somente se:*

$$(X + a)^n = X^n + a(\operatorname{mod} X^r - 1, n)$$

Vale ressaltar que a expressão $(a,n) = 1$ significa que o maior divisor comum entre a e n *é 1*, ou ainda que, a e n são primos entre si. A computação pelo módulo de um polinômio da forma $X^r - 1$, com um pequeno r escolhido adequadamente serve para reduzir o número de coeficientes avaliados em ambos os lados na expressão:

$$(X + a)^n = X^n + a(\operatorname{mod} n)$$

Como dito no início o algoritmo AKS tem sua importância por ter atingido os objetivos supracitados, porém sua implementação não é tão trivial e não entraremos em maiores detalhes, uma vez que este algoritmo ainda é, na prática, muito mais lento que outros algoritmos probabilísticos.

Nome	*Teste de Primalidade AKS*
Classificação	• *Teste para números genéricos* • *Teste completamente justificado por teoremas* • *Teste Determinístico* • *Complexidade de tempo polinomial*
Problemas	*Na prática, embora seja um algoritmo de tempo polinomial, ainda é bastante lento para valores de entrada de muitos dígitos quando comparado a certos algoritmos probabilísticos. Além disso, sua implementação não é trivial.*

Tabela 2.23 - Características do Teste de primalidade AKS.

2.4.6. Teste de Primalidade Miller-Rabin

O Teste de primalidade Miller-Rabin é um teste similar ao teste de Fermat e o de Solovay-Strassen. Originalmente este teste era determinístico, mas se confiava na hipótese de Riemann que ainda não é provada.

O teste se baseia num conjunto de igualdades que deverão ser sempre verdadeira para números primos.

O algoritmo é apresentado abaixo:

Entrada:

$n > 1$ *:* inteiro ímpar a ser testado para primalidade;

k *:* parâmetro que determina a confiabilidade do resultado.

Saída:

Composto, se n for composto;

Primo, caso contrário.

Escrever $n-1$ *como* $2^s \cdot d$ *fatorando* $n-1$ *por 2, onde* d *é um inteiro ímpar;*

Repita k vezes:

Escolher aleatoriamente um a *entre* $[1, n-1]$*;*

Se $a^d \not\equiv 1 \bmod n$ *e* $a^{2rd} \not\equiv -1 \bmod n$ *para todo* r *entre* $[0, s-1]$ *então*

retorne Composto;

Retorne Provavelmente Primo;

Nome	*Teste de Primalidade Miller-Rabin*
Classificação	• *Teste para números genéricos* • *Teste completamente justificado por teoremas* • *Teste Probabilístico*
Problemas	*A confiabilidade da resposta de saída depende do número de vezes que o teste é realizado para uma dada instância de entrada.*

Tabela 2.24 - Características do Teste de primalidade Miller-Rabin.

3. GENERALIZAÇÕES

Como dito anteriormente, na parte introdutória do nosso trabalho, o objetivo do presente trabalho é levantar alguma possível evidência sobre a infinitude dos números de Fibonacci primos. A seqüência particular de Fibonacci é definida pela fórmula $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ e os valores iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Nesta seção, apresentaremos as principais generalizações dos números de Fibonacci que serão abordadas em nossos experimentos. A primeira delas já foi discutida anteriormente e é bem famosa na literatura, a seqüência dos números de Lucas. Essa seqüência é definida recursivamente, assim como a de Fibonacci, e os valores iniciais especiais dessa seqüência são $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

3.1. GENERALIZAÇÃO I

Uma simples generalização, seguindo a mesma idéia de Lucas, seria definirmos dois novos valores iniciais especiais quaisquer. Por exemplo, poderíamos gerar uma nova seqüência de números a partir dos valores especiais $G_0 = 5$ e $G_1 = 2$. Isso nos daria a seguinte seqüência:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
G_x	5	2	7	9	16	25	41	66	107	173	280	453	733	1186

Tabela 3.1 - Generalização I.

3.2. GENERALIZAÇÃO II

Uma outra generalização será feita aumentando o número k de valores iniciais e necessários para a geração de cada número da seqüência. Por exemplo, para $k = 4$, podemos definir uma seqüência de números gerados pela fórmula:

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1} + G_{n-2} + G_{n-3}$$

Para tal, precisaremos definir quatro valores iniciais especiais. Se escolhêssemos os valores iniciais *1, 2, 3 e 4,* nós obteríamos a seguinte seqüência inicial:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_x	1	2	3	4	10	19	36	69	134	258	497	958	1847

Tabela 3.2 - Generalização II (a).

Se escolhêssemos o valor de $k = 3$, e os valores iniciais 1, 2 e 3. Os resultados obtidos inicialmente seriam:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_x	1	2	3	6	11	20	37	68	125	230	423	778	1431

Tabela 3.3 - Generalização II (b).

Para cada uma destas seqüências iremos verificar a questão da infinitude dos números primos.

4. RESULTADOS TEÓRICOS

A partir da análise da seqüência dos números de Fibonacci, dos números de Lucas e das nossas próprias generalizações, pudemos obter alguns resultados para otimizar o processo de testes das instâncias de entrada. Explicamos os resultados encontrados e as idéias utilizadas em cada um destes testes.

4.1. RESULTADOS TEÓRICOS PARA OS NÚMEROS DE FIBONACCI

A seqüência inicial dos números de Fibonacci abaixo nos permite enxergar algumas coisas:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_x	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_x	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

Tabela 4.1 - Números de Fibonacci.

Os números F_x cujos índices x satisfazem à condição ($x \bmod 3 = 0$) são sempre múltiplos de 2. Aqueles índices que satisfazem à condição ($x \bmod 4 = 0$) são sempre múltiplos de 3. Os que satisfazem à condição ($x \bmod 5 = 0$) são sempre múltiplos de 5. Estruturando mais essas idéias para expressão $x \bmod d = 0$, temos:

x	3, 6, 9	4, 8, 12	5, 10, 15	6, 12, 18	7, 14, 28	8, 16, 24
d	3	4	5	6	7	8
m	2	3	5	8	13	21

Tabela 4.2 - Se $x \bmod d = 0$, F_x é múltiplo de m.

Na tabela 4.2, na linha dos valores de x damos alguns exemplos dos índices cujos F_x são múltiplos de d. Note que:

$F_{10} = 55 = 5 \cdot 11$; $F_{18} = 2584 = 4 \cdot 646$; $F_{16} = 987 = 21 \cdot 47$; e assim continua.

Isso acontece de forma generalizada. Por exemplo, quando ($x \bmod 9 = 0$), F_x será múltiplo de 34. Dividindo $F_{18} = 2584$ por 34 obtemos 76.

Esse resultado não foi aproveitado na otimização dos testes de primalidade para números de Fibonacci porque já existe um teorema mais forte que diz que:

Se F_x é primo, necessariamente o índice x é primo.

A única exceção acontece para o índice 4. O elemento da seqüência de Fibonacci $F_4 = 3$ é um número primo, mas seu índice é composto. Para os demais primos desta seqüência todos os índices são primos. Logo, em nosso teste computacional, apenas calculamos a primalidade dos números de Fibonacci cujos seus índices fossem primos. Isso nos fez ter que calcular a primalidade de todos os números entre 1 e 27000, mas certamente é bem mais fácil realizar computações de primalidade em números de 5 dígitos do que em números de mais de 5000. Portanto, esse foi um valor a ser pago.

4.2. RESULTADOS TEÓRICOS PARA OS NÚMEROS DE LUCAS

Trabalhamos com os números de Lucas de maneira análoga a forma como trabalhamos os números de Fibonacci. Procuramos encontrar padrões que nos levassem a ganhar tempo no processamento dos testes de primalidade dos 27000 números de Lucas da nossa lista. Analisando os primeiros números da seqüência de Lucas abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_x	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
L_x	123	199	322	521	843	1364	2207	3571	5778	9349

x	21	22	23	24	25
L_x	15127	24476	39603	64079	103682

Tabela 4.3 - Números de Lucas.

Perceba que quando ($x \bmod 3 = 1$) os valores de L_x são todos múltiplos de 2, e que quando ($x \bmod 4 = 3$) os valores de L_x são múltiplos de 3.

Se repararmos nos doze primeiros números desta seqüência veremos que temos 6 números que são múltiplos de 2 e/ou múltiplos de 3. Nos doze números seguintes desta seqüência o mesmo acontece, temos 6 números que são múltiplos de 2 e/ou são múltiplos de 3. Além disso, note no último dígito de cada um dos doze primeiros números. Os dígitos são: 2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3 e 9. Os últimos dígitos dos doze números seguintes são: 2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3 e 9. Existe uma seqüência de últimos dígitos que se repetem de doze em doze números. Observe a tabela abaixo contendo os 24 primeiros índices da seqüência dos números de Lucas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Tabela 4.4 - Padrões nos números de Lucas.

Os índices de cor azul são aqueles cujos números de Lucas são múltiplos de 2. Os de amarelo são aqueles cujos números de Lucas são múltiplos de 3. E os verdes são os números de Lucas que são múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente.

Podemos concluir que a cada doze números da seqüência de Lucas precisaremos testar para primalidade apenas seis números. Os outros seis são descartados no teste de módulo dos índices. Sempre que o índice x satisfizer uma das condições: $(x \bmod 3 = 1)$ ou $(x \bmod 4 = 3)$, não precisamos testar para primalidade o número L_x, pois este ou é múltiplo de 2 ou de 3.

Usando os testes dos módulos sobre os índices descartamos aproximadamente a metade dos números de lucas que testaríamos para primalidade.

4.3. RESULTADOS TEÓRICOS PARA GENERALIZAÇÃO $k = 2$, $G_1 = 2$ E $G_2 = 5$

Nesta seqüência generalizada os primeiros números da seqüência são:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_x	2	5	7	12	19	31	50	81	131	212

x	11	12	13	14	15	16	17	18
G_x	343	555	898	1453	2351	3804	6155	9959

Tabela 4.5 – Números da seqüência com $k = 2$, $G_1 = 2$ e $G_2 = 5$.

Observer que:

- Os múltiplos de 2 se encontram nos índices 1, 4, 7, 10, e assim por diante. Repare que a distância que separa um múltiplo do outro é de apenas dois números (índices).
- Os múltiplos de 3 se encontram nos índices 4, 8, 12, 16, e assim por diante. A distância entre estes é de três números (índices).
- Os múltiplos de 5 se encontram nos índices 2, 7, 12, 15, etc. Estes múltiplos estão afastados um do outro quatro números.

Podemos concluir que existe um padrão que nos ajudará a melhorar o tempo computacional dos testes desta seqüência evitando computações desnecessárias.

As relações são:

- Quando o índice x for múltiplo de 3, o número G_x será múltiplo de dois;
- Quando o índice $x \bmod 4 = 3$, o número G_x será múltiplo de 3;
- E, quando o índice $x \bmod 5 = 1$, o número será múltiplo de 5.

Aplicamos este conhecimento para otimização do teste de primalidade dos números desta seqüência. A idéia básica foi a mesma das consideradas nas seqüências de Fibonacci e Lucas.

4.4. RESULTADOS TEÓRICOS PARA GENERALIZAÇÃO $k = 2$, $G_1 = 3$ E $G_2 = 7$

Os primeiros números da seqüência generalizada para $k = 2$, $G_1 = 3$ e $G_4 = 7$ são:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_x	3	7	10	17	27	44	71	115	186	301

x	11	12	13	14	15	16	17
G_x	487	788	1275	2063	3338	5401	8739

Tabela 4.6 – Números da seqüência com $k = 2$, $G_1 = 3$ e $G_2 = 7$.

Usamos aqui a mesma idéia usada nos números de Fibonacci e demais seqüências citadas até então. As relações obtidas da análise dos valores G_x em relação aos seus índices x são:

- Quando o índice x for múltiplo de 4, o número G_x será múltiplo de 3;
- Quando o índice $x \bmod 6 = 5$, o número G_x será múltiplo de 2;
- E, quando o índice $x \bmod 5 = 2$, o número será múltiplo de 5.

Estes resultados foram utilizados na implementação dos algoritmos de teste para obtenção de um melhor tempo de resposta.

4.5. RESULTADOS TEÓRICOS PARA GENERALIZAÇÃO $k = 3$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ E $G_3 = 3$

Os primeiros números desta seqüência são mostrados logo abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_x	1	2	3	6	11	20	37	68	125	230

Tabela 4.7 – Números da seqüência com $k = 3$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ e $G_3 = 3$.

Percebemos claramente que existe um padrão: os números que aparecem nesta seqüência são, alternadamente, ímpares e pares. Este padrão permitiu evitar, de cara, cinqüenta por cento dos números desta seqüência.

O nosso código testava se o índice era par ou ímpar comparando o resto da divisão por dois. Quando o resto da divisão do índice x por 2 era 0, não testávamos G_x, pois sabíamos do resultado teórico que G_x era par. Quando o resto da divisão do índice x era 1, G_x era submetido ao teste de pimalidade.

4.6. RESULTADOS TEÓRICOS PARA GENERALIZAÇÃO $k = 4$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 3$ E $G_4 = 4$

Os primeiros números desta seqüência são explicitados na tabela abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_x	1	2	3	4	10	19	36	69	134	258

Tabela 4.8 – Números da seqüência com $k = 4$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 3$ e $G_4 = 4$.

Se organizarmos esses números novamente em uma tabela 5x5 temos:

1	**2**	**3**	**4**	**10**
19	**36**	**69**	**134**	**258**
497	**958**	**1847**	**3560**	**6862**

Tabela 4.9 – Números da seqüência em tabela 5x5.

A tabela acima nos permite enxergar um padrão, uma repetição que ocorre em um ciclo de cinco em cinco números. A tabela 4.9 é escrita abaixo em termos de seu padrão característico.

Impar	**Par**	**Impar**	**Par**	**Par**
Impar	**Par**	**Impar**	**Par**	**Par**
Impar	**Par**	**Impar**	**Par**	**Par**

Tabela 4.10 – Padrões dos números da presente seqüência.

Expressando matematicamente este padrão, temos:

- $(x \bmod 5 = 1) \vee (x \bmod 5 = 3) \Rightarrow G_x$ *é ímpar.*
- $(x \bmod 5 = 2) \vee (x \bmod 5 = 4) \vee (x \bmod 5 = 0) \Rightarrow G_x$ *é par.*

Usando esses artifícios matemáticos, conseguimos reduzir em 60% a quantidade de números submetidos ao teste de primalidade.

5. TESTES COMPUTACIONAIS

Para realizar a parte dos testes computacionais relativos às generalizações expostas no Capítulo 4 e o desenvolvimento dos algoritmos geradores de números primos, números primos de Fibonacci e de Lucas, e mais algum outro código necessário para facilitar a análise de dados, foi utilizado o ambiente de desenvolvimento Eclipse e a linguagem de programação Java.

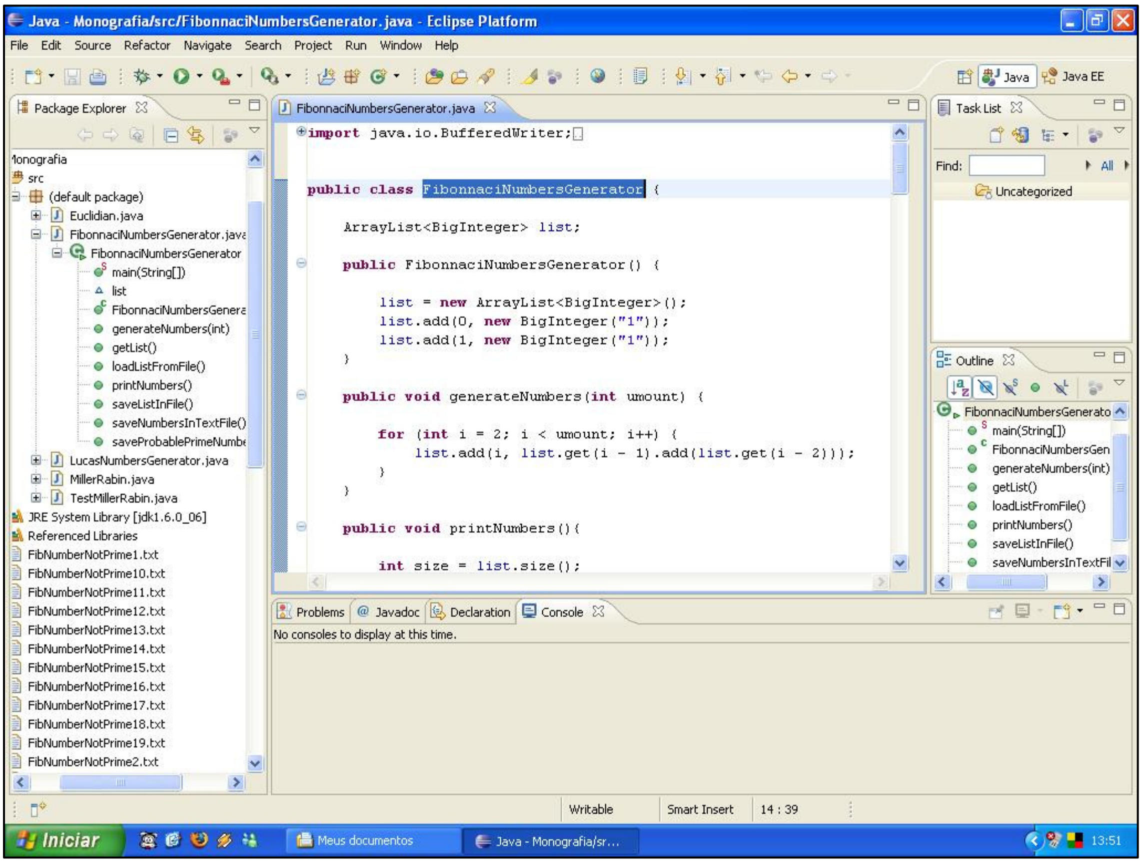

Figura 5.1 - Plataforma de Desenvolvimento Eclipse.

O motivo da escolha de tais ferramentas é que o Eclipse oferece muitos *plugins*, facilidades de programação e um enorme conjunto de ferramentas integradas, como por exemplo, um depurador de programas poderoso com interface gráfica de fácil uso e um *framework* de testes unitário conhecido como JUnit. Java foi preferida dentre outras linguagens porque já oferece, em sua

API, uma abstração para números inteiros suficientemente grandes chamada BigInteger, além de funcionar sem maiores complicações em qualquer sistema.

Todos os testes foram realizados no Laboratório de Lógica e Inteligência Computacional (LABLIC) do Departamento de Informática e Matemática Aplicada (DIMAp), utilizando o sistema operacional Linux com distribuição Ubuntu 7.10 em uma máquina com a seguinte configuração:

- Processador Core 2 Duo da Intel;
- Memória RAM: 1 Giga.

Vale aqui fazer uma ressalva. Atualmente testes para obtenção de números primos grandes são executadas em grandes *clusters* de 700 máquinas como parte de uma rede *grid* chamada PrimeNet de mais de 70000 máquinas com poder computacional imensamente maior do que o que usamos neste trabalho. Estes testes de primalidade executam nestas poderosas máquinas por mais de nove meses. Para ter uma idéia, para calcular o maior número primo encontrado até hoje ($2^{32582657}-1$), em uma única máquina seria necessário mais de 4000 anos.

O nosso primeiro passo na fase de testes foi programar código para geração das listas de números de Fibonacci e de números de Lucas. A funcionalidade do programa inclui:

- Gerar os números num determinado intervalo determinado pelo usuário;
- Salvar a lista de números em arquivo binário;
- Salvar a lista em arquivo texto;
- Carregar a lista para memória a partir do arquivo binário;
- Testar a primalidade dos números nessa lista e salva-la num arquivo texto;

A escolha para o teste de primalidade, inicialmente, foi o AKS, mas, este algoritmo era de difícil implementação e algumas implementações que chegamos a testar eram bastante lentas. A partir de então optamos por implementar o algoritmo Miller-Rabin em sua versão probabilística. Podíamos ter implementado a versão determinística deste algoritmo, o problema é que esta versão se baseia na hipótese, ainda não provada, de Riemman.
Preferimos o Miller-Rabin probabilístico por três motivos principais:

- O problema relativo ao erro pode ser minimizado realizando-se mais testes para uma mesma instância de entrada;
- O Miller-Rabin é um algoritmo relativamente rápido em comparação com algoritmos determinísticos;
- É um algoritmo mais fácil de implementar.

Os algoritmos usados em nossos testes foram baseados na nossa implementação do Miller-Rabin e, também, em um teste para primalidade disponível na classe BigInteger da API Java. A priori havíamos descartado utilizar esse teste por que não sabíamos realmente o quanto podíamos confiar nele. Depois, acabamos tendo acesso ao seu código-fonte e verificamos que esse teste era uma outra implementação do algoritmo Miller-Rabin e também do algoritmo para primalidade de Lucas-Lehmer. O teste da API do Java sempre verifica se o número *n* testado para primalidade utilizando ambos os algoritmos citados acima.

Para os testes relativos aos números de Fibonacci e Lucas geramos uma lista dos 27000 primeiros números da seqüência. Os últimos números desta seqüência possuem mais de 5000 dígitos. Infelizmente, não foi possível gerar números com muito mais dígitos porque a memória não era suficiente e, além disso, o teste de primalidade se tornava mais caro computacionalmente à medida que o número de dígitos da instância de entrada crescia. Os testes de primalidade para os números de Fibonacci duraram aproximadamente 4 dias, enquanto que o teste de primalidade para os números de Lucas durou pouco mais de 5 dias.

Os testes para as duas primeiras generalizações com $k = 2$ foram bem mais rápidos. Duraram cerca de 5 dias ambos os testes, média de 2,5 dias para cada. Uma das razões para isso é que as listas de primos que geramos para essas duas seqüências tiveram o tamanho um pouco menor. Essas listas continham 20000 números cada.

6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, apresentamos os números primos encontrados durante cada um dos nossos testes e alguns dados estatísticos ao final.

6.1. RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O TESTE SOBRE NÚMEROS DE FIBONACCI

Foram testados os 27000 primeiros números da seqüência de Fibonacci.

Total de Números de Fibonacci testados	**27000**
Qtde de num. primos de Fibonacci encontrados	**28**
Percentual	**0,103%**
Qtde de primos terminados em 1	**2**
Qtde de primos terminados em 3	**6**
Qtde de primos terminados em 7	**7**
Qtde de primos terminados em 9	**11**

Tabela 6.1 – Dados da seqüência de Fibonacci.

Índice do num. Primos de Fibonacci	***Número de dígitos***
[3]	**1**
[4]	**1**
[5]	**1**
[7]	**2**
[11]	**2**
[13]	**3**
[17]	**4**
[23]	**5**
[29]	**6**
[43]	**9**

[47]	**10**
[83]	**17**
[131]	**28**
[137]	**29**
[359]	**76**
[431]	**90**
[433]	**91**
[449]	**94**
[509]	**107**
[569]	**119**
[571]	**119**
[2971]	**621**
[4723]	**987**
[5387]	**1126**
[9311]	**1946**
[9377]	**2023**
[14431]	**3016**
[25561]	**5342**

Tabela 6.2 – Índices dos primos de Fibonacci e quantidades de dígitos destes.

Da tabela 6.2 podemos verificar algo bem interessante. Se tomarmos a quantidade de dígitos de dois números primos consecutivos da seqüência acima e dividirmos um pelo outro, e compararmos com o resultado da divisão de seus respectivos índices, observaremos que os resultados dessas divisões serão bem parecidos. A diferença máxima entre os resultados da divisão dos primos e da divisão dos seus índices quando os números passam a ter mais de 5 dígitos é 0,06. Por exemplo, escolhendo os números primos com 5342 e 3016 dígitos, e, [25561] e [14431], seus respectivos índices, temos:

$$\frac{25561}{14431} \simeq 1,7712 \text{ e } \frac{5342}{3016} \simeq 1,7712$$

A diferença entre essas divisões é de 3,62E-05.

Outra coisa interessante é que, se dividirmos o índice de um número primo da seqüência de Fibonacci por sua quantidade de dígitos, na maioria das vezes e excetuando-se os primeiros quatro valores, obteremos sempre um resultado próximo de 4,78. Por exemplo:

Índices	***Número de dígitos***	***Índices/números de dígitos***
[7]	**2**	3,5
[11]	**2**	5,5
[13]	**3**	4,333333
[17]	**4**	4,25
[23]	**5**	4,6
[29]	**6**	4,833333
[43]	**9**	4,777778
[47]	**10**	4,7
[83]	**17**	4,882353
[131]	**28**	4,678571
[137]	**29**	4,724138
[359]	**76**	4,723684
[431]	**90**	4,788889
[433]	**91**	4,758242
[449]	**94**	4,776596
[509]	**107**	4,757009
[569]	**119**	4,781513
[571]	**119**	4,798319
[2971]	**621**	4,784219
[4723]	**987**	4,785208
[5387]	**1126**	4,784192
[9311]	**1946**	4,784687
[9377]	**2023**	4,635195
[14431]	**3016**	4,784814
[25561]	**5342**	4,784912

Tabela 6.3 – índices / número de dígitos

A tabela abaixo mostra a distribuição dos números primos dentro da seqüência de Fibonacci. A maioria dos números primos encontrados nos primeiros 27000 números de Fibonacci acontece quando o índice é menor que 1000.

Intervalo	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***
1 a 1000	**21**	9001 a 10000	**2**	18001 a 19000	**0**
1001 a 2000	**0**	10001 a 11000	**0**	19001 a 20000	**0**
2001 a 3000	**1**	11001 a 12000	**0**	20001 a 21000	**0**
3001 a 4000	**0**	12001 a 13000	**0**	21001 a 22000	**0**
4001 a 5000	**1**	13001 a 14000	**0**	22001 a 23000	**0**
5001 a 6000	**1**	14001 a 15000	**1**	23001 a 24000	**0**
6001 a 7000	**0**	15001 a 16000	**0**	24001 a 25000	**0**
7001 a 8000	**0**	16001 a 17000	**0**	25001 a 26000	**1**
8001 a 9000	**0**	17001 a 18000	**0**	26001 a 27000	**0**

Tabela 6.4 – Quantidade de primos de Fibonacci x Intervalo desta seqüência

6.2. RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O TESTE SOBRE NÚMEROS DE LUCAS

Foram testados os 27000 primeiros números da seqüência de Lucas.

Total de Números de Lucas testados	**27000**
Qtde de num. primos de Lucas encontrados	**38**
Percentual	**0,140%**
Qtde de primos terminados em 1	**18**
Qtde de primos terminados em 3	**1**
Qtde de primos terminados em 7	**3**
Qtde de primos terminados em 9	**15**

Tabela 6.5 – Dados da seqüência de Lucas.

Índices dos num. primos de Lucas	***Número de dígitos***
[1]	**1**
[3]	**1**
[5]	**1**
[6]	**2**
[8]	**2**
[9]	**2**
[12]	**3**
[14]	**3**
[17]	**4**
[18]	**4**
[20]	**4**
[32]	**7**
[38]	**8**
[42]	**9**
[48]	**10**
[54]	**12**
[62]	**13**

[72]	**15**
[80]	**17**
[114]	**24**
[314]	**66**
[354]	**74**
[504]	**106**
[614]	**129**
[618]	**129**
[864]	**181**
[1098]	**230**
[1362]	**285**
[4788]	**1001**
[4794]	**1002**
[5852]	**1223**
[7842]	**1618**
[8468]	**1770**
[10692]	**2235**
[12252]	**2561**
[13964]	**2919**
[14450]	**3020**
[19470]	**4069**

Tabela 6.6 – Índices dos primos de Lucas e quantidades de dígitos destes.

Na seqüência de Lucas acontece o mesmo padrão encontrado na seqüência de Fibonacci. O resultado da divisão do índice de um número primo de Lucas pela quantidade de dígitos deste número primo, converge para 4,78 também. Alguns exemplos:

$$\frac{19740}{4096} \simeq 4,784\,,\ \frac{14450}{3020} \simeq 4,784\,,\ \frac{12252}{2561} \simeq 4,784 \text{ e } \frac{8468}{1770} \simeq 4,784$$

Da mesma forma, a divisão dos índices de dois números primos consecutivos da seqüência de Lucas é, aproximadamente, igual ao resultado da divisão de suas respectivas quantidades de dígitos. Por exemplo: $54 \div 48 = 1{,}125$ e $12 \div 10 = 1{,}2$; $10692 \div 8468 \simeq 1{,}2626$ e $2235 \div 1770 \simeq 1{,}2627$.

A tabela 6.7 mostra a distribuição dos números primos de Lucas dentro da seqüência dos 27000 primeiros números testados. Como era de se esperar, a maioria dos números primos desta seqüência limitada se encontra nos primeiros mil números da seqüência.

Intervalo	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***
1 a 1000	**26**	9001 a 10000	**0**	18001 a 19000	**0**
1001 a 2000	**2**	10001 a 11000	**1**	19001 a 20000	**1**
2001 a 3000	**0**	11001 a 12000	**0**	20001 a 21000	**0**
3001 a 4000	**0**	12001 a 13000	**1**	21001 a 22000	**0**
4001 a 5000	**2**	13001 a 14000	**1**	22001 a 23000	**0**
5001 a 6000	**1**	14001 a 15000	**1**	23001 a 24000	**0**
6001 a 7000	**0**	15001 a 16000	**0**	24001 a 25000	**0**
7001 a 8000	**1**	16001 a 17000	**0**	25001 a 26000	**0**
8001 a 9000	**1**	17001 a 18000	**0**	26001 a 27000	**0**

Tabela 6.7 – Quantidade de primos de Lucas x Intervalo desta seqüência

6.3. RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O TESTE SOBRE NÚMEROS DA SEQÜÊNCIA GENERALIZADA COM $k = 2$, $G_1 = 2$ E $G_2 = 5$.

Foram testados os primeiros 20000 números desta seqüência. Esta seqüência apresenta os mesmos padrões citados anteriormente nas seqüências de Fibonacci e Lucas. O primeiro padrão é que a divisão do índice de um número primo desta seqüência, pela quantidade de seus dígitos, converge para 4,784. O segundo é que o resultado da divisão dos índices de dois números primos consecutivos e o resultado da divisão das suas respectivas quantidades de dígitos são aproximadamente os mesmos. A diferença máxima é de 0,1.

Total de Números da seqüência testada	**20000**
Qtde de num. primos encontrados	**37**
Percentual	**0,185%**
Qtde de primos terminados em 1	**13**
Qtde de primos terminados em 3	**5**
Qtde de primos terminados em 7	**8**
Qtde de primos terminados em 9	**9**

Tabela 6.8 – Dados da seqüência com $k = 2$, $G_1 = 2$ *e* $G_2 = 5$.

Índice dos números primos	***Número de dígitos***
[1]	**1**
[2]	**1**
[3]	**1**
[5]	**2**
[6]	**2**
[9]	**3**
[14]	**4**
[15]	**4**
[21]	**5**

[29]	**7**
[30]	**7**
[33]	**8**
[54]	**12**
[65]	**14**
[81]	**18**
[86]	**19**
[93]	**20**
[125]	**27**
[129]	**28**
[326]	**38**
[806]	**169**
[825]	**173**
[1073]	**225**
[1106]	**232**
[1305]	**273**
[1343]	**281**
[1719]	**360**
[1745]	**365**
[3495]	**731**
[4229]	**885**
[4535]	**948**
[5990]	**1253**
[6725]	**1406**
[9089]	**1900**
[9741]	**2036**
[10370]	**2168**
[18225]	**3810**

Tabela 6.9 – Índices dos primos da seqüência com $k=2$, $G_1=2$, $G_2=5$ *e quantidades de dígitos destes.*

Novamente, a maioria dos números primos desta seqüência limitada aparece quando o índice dos números é menor que 1000.

Intervalo	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***
1 a 1000	**22**	7001 a 8000	**0**	14001 a 15000	**0**
1001 a 2000	**6**	8001 a 9000	**0**	15001 a 16000	**0**
2001 a 3000	**0**	9001 a 10000	**2**	16001 a 17000	**0**
3001 a 4000	**1**	10001 a 11000	**1**	17001 a 18000	**0**
4001 a 5000	**2**	11001 a 12000	**0**	18001 a 19000	**1**
5001 a 6000	**1**	12001 a 13000	**0**	19001 a 20000	**0**
6001 a 7000	**1**	13001 a 14000	**0**		

Tabela 6.10 – Quantidade de primos da seqüência com $k = 2$, $G_1 = 2$, $G_2 = 5$ *x Intervalo desta seqüência*

6.4. RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O TESTE SOBRE NÚMEROS DA SEQÜÊNCIA GENERALIZADA COM $k=2$, $G_1=3$ E $G_2=7$.

Foram testados os 20000 primeiros números dessa seqüência. Esta seqüência apresenta os mesmos padrões explicitados nas outras seqüências com $k=2$. O primeiro padrão é que a divisão do índice de um número primo desta seqüência, pela quantidade de seus dígitos, converge para 4,784. O segundo é que o resultado da divisão dos índices de dois números primos consecutivos e o resultado da divisão das suas respectivas quantidades de dígitos são aproximadamente os mesmos.

Total de Números da seqüência testada	**20000**
Qtde de num. primos encontrados	**27**
Percentual	**0,135%**
Qtde de primos terminados em 1	**4**
Qtde de primos terminados em 3	**9**
Qtde de primos terminados em 7	**8**
Qtde de primos terminados em 9	**6**

Tabela 6.11 – Dados da seqüência com $k=2$, $G_1=3$ e $G_2=7$.

Índice dos números primos	***Número de dígitos***
[1]	**1**
[2]	**1**
[4]	**2**
[7]	**2**
[11]	**3**
[14]	**4**
[20]	**5**
[35]	**8**
[92]	**20**
[100]	**22**

[124]	**27**
[155]	**33**
[191]	**41**
[259]	**55**
[470]	**99**
[511]	**108**
[587]	**124**
[812]	**171**
[899]	**189**
[1999]	**419**
[2032]	**426**
[2095]	**439**
[3031]	**634**
[3419]	**715**
[4231]	**885**
[7055]	**1475**
[11747]	**2456**

Tabela 6.12 – Índices dos primos da seqüência com $k=2$, $G_1=3$, $G_2=7$ *e quantidades de dígitos destes.*

Intervalo	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***
1 a 1000	**19**	7001 a 8000	**1**	14001 a 15000	**0**
1001 a 2000	**1**	8001 a 9000	**0**	15001 a 16000	**0**
2001 a 3000	**2**	9001 a 10000	**0**	16001 a 17000	**0**
3001 a 4000	**2**	10001 a 11000	**0**	17001 a 18000	**0**
4001 a 5000	**1**	11001 a 12000	**1**	18001 a 19000	**0**
5001 a 6000	**0**	12001 a 13000	**0**	19001 a 20000	**0**
6001 a 7000	**0**	13001 a 14000	**0**		

Tabela 6.13 – Quantidade de primos da seqüência com $k=2$, $G_1=3$, $G_2=7$ *x Intervalo desta seqüência*

6.5. RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O TESTE SOBRE NÚMEROS DA SEQÜÊNCIA GENERALIZADA COM $k=3$, $G_1=1$, $G_2=2$ E $G_3=3$.

Foram testados os 19000 primeiros números desta seqüência. O que se destaca aqui é que o percentual de números primos encontrados na seqüência para $k=3$ foi bem menor que aquele encontrado nas seqüências com $k=2$. A divisão do índice de um número primo desta seqüência pela quantidade de dígitos deste converge para 3,8. E o resultado da divisão dos índices de dois números primos consecutivos e o resultado da divisão das suas respectivas quantidades de dígitos são aproximadamente os mesmos.

Além disso, é importante notar que, entre estes 19000 números testados, apenas encontramos números primos quando o índice era ímpar.

Total de Números da seqüência testada	**19000**
Qtde de num. primos encontrados	**10**
Percentual	**0,052%**
Qtde de primos terminados em 1	**5**
Qtde de primos terminados em 3	**1**
Qtde de primos terminados em 7	**2**
Qtde de primos terminados em 9	**1**

Tabela 6.14 – Dados da seqüência com $k=3$, $G_1=1$, $G_2=2$ e $G_3=3$.

Índice dos números primos	***Número de dígitos***
[2]	**1**
[3]	**1**
[5]	**2**
[7]	**2**
[23]	**6**
[27]	**7**
[47]	**13**

[77]	**21**
[1611]	**427**
[15203]	**4024**

Tabela 6.15 – Índices dos primos da seqüência com $k=3$, $G_1=1$, $G_2=2$ e $G_3=3$, e quantidades de dígitos destes.

Intervalo	**Qtde**	**Intervalo**	**Qtde**	**Intervalo**	**Qtde**
1 a 1000	**8**	7001 a 8000	**0**	14001 a 15000	**0**
1001 a 2000	**1**	8001 a 9000	**0**	15001 a 16000	**1**
2001 a 3000	**0**	9001 a 10000	**0**	16001 a 17000	**0**
3001 a 4000	**0**	10001 a 11000	**0**	17001 a 18000	**0**
4001 a 5000	**0**	11001 a 12000	**0**	18001 a 19000	**0**
5001 a 6000	**0**	12001 a 13000	**0**		
6001 a 7000	**0**	13001 a 14000	**0**		

Tabela 6.16 – Quantidade de primos da seqüência com $k=3$, $G_1=1$, $G_2=2$ e $G_3=3$ x Intervalo desta seqüência

6.6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O TESTE SOBRE NÚMEROS DA SEQÜÊNCIA GENERALIZADA COM $k=4$, $G_1=1$, $G_2=2$, $G_3=3$ e $G_4=4$.

Foram testados os 18000 primeiros números desta seqüência. A divisão do índice de um número primo desta seqüência pela quantidade de dígitos deste converge para 3,5. E o resultado da divisão dos índices de dois números primos consecutivos e o resultado da divisão das suas respectivas quantidades de dígitos são aproximadamente os mesmos.

Total de Números da seqüência testada	**18000**
Qtde de num. primos encontrados	**11**
Percentual	**0,061%**
Qtde de primos terminados em 1	**4**

Qtde de primos terminados em 3	**2**
Qtde de primos terminados em 7	**3**
Qtde de primos terminados em 9	**1**

Tabela 6.17 – Dados da seqüência com $k=4$, $G_1=1$, $G_2=2$, $G_3=3$ *e* $G_4=4$.

Índice dos números primos	***Número de dígitos***
[2]	**1**
[3]	**1**
[6]	**2**
[13]	**4**
[58]	**17**
[71]	**20**
[363]	**104**
[373]	**106**
[446]	**127**
[1826]	**520**
[2458]	**701**

Tabela 6.18 – Índices dos primos da seqüência com $k=4$, $G_1=1$, $G_2=2$, $G_3=3$ *e* $G_4=4$, *e quantidades de dígitos destes.*

Intervalo	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***	***Intervalo***	***Qtde***
1 a 1000	**9**	7001 a 8000	**0**	14001 a 15000	**0**
1001 a 2000	**1**	8001 a 9000	**0**	15001 a 16000	**0**
2001 a 3000	**1**	9001 a 10000	**0**	16001 a 17000	**0**
3001 a 4000	**0**	10001 a 11000	**0**	17001 a 18000	**0**
4001 a 5000	**0**	11001 a 12000	**0**		
5001 a 6000	**0**	12001 a 13000	**0**		
6001 a 7000	**0**	13001 a 14000	**0**		

Tabela 6.19 – Quantidade de primos da seqüência com $k=4$, $G_1=1$, $G_2=2$, $G_3=3$ *e* $G_4=4$ *x Intervalo desta seqüência*

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como dito anteriormente, existem ainda muitas questões em aberto sobre o fascinante tema dos números primos, assim como sobre os interessantes e simples números de Fibonacci e de Lucas. No presente trabalho, tivemos uma visão bastante ampla sobre estes assuntos e sobre testes de primalidade. Realizamos alguns experimentos computacionais visando obter algumas evidências acerca da infinitude dos números primos de Fibonacci, não ambicionando provar ou derrubar esta famosa conjectura, mas apenas com o propósito de trazer mais luz sobre a questão.

O presente trabalho, através de algumas generalizações, nos permitiu enunciar mais algumas afirmações. Generalizamos a famosa conjectura de Fibonacci, conjecturando:

Conjectura 1: *Toda seqüência gerada recursivamente a partir de dois ou mais valores iniciais inteiros positivos, no estilo da seqüência de Fibonacci, possui infinitos primos, se o mdc dos valores especiais iniciais envolvidos for igual a 1.*

Por exemplo, a seqüência recursiva $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ para os valores de 11 e 4 possui infinitos primos, uma vez que o mdc entre 4 e 11 é igual a 1. Mas, para os valores especiais 4 e 8 não, uma vez que o mdc entre 4 e 8 é igual a 4.

Seja também a generalização com $k = 3$, $G_1 = 1$, $G_2 = 3$ e $G_3 = 4$. Note que, o $mdc(1,3,4) = 1$. Vamos a partir destes valores iniciais, construir uma seqüência usando a fórmula recorrente $G_x = G_{x-1} + G_{x-2} + G_{x-3}$. Os primeiros números dessa seqüência são mostrados na tabela abaixo.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G_x	1	3	4	8	15	27	50	92	169

Tabela 7.1 – Primeiros números da generalização para $k = 3$, $G_1 = 1$, $G_2 = 3$ e $G_3 = 4$.

Note que, se tomarmos os números consecutivos desta seqüência três a três, e calcularmos o mdc destes números sempre será igual a 1.

$$mdc(1,3,4) = ... = mdc(8,15,27) = ... = (27,50,92) = mdc(50,92,169) = 1$$

Uma outra conjectura que propomos é:

Conjectura 2: *Para qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de números primos encontrados na seqüência de Lucas até L_n é sempre maior ou igual à quantidade de primos encontrados na seqüência de Fibonacci até F_n.*

Na *tabela 7.2* representamos as posições dos números primos encontrados dentro das seqüências de Fibonacci e de Lucas. Na primeira linha da tabela temos [1] na coluna de Lucas e [3] na coluna de Fibonacci. Isto indica que o primeiro número de Lucas e o terceiro número de Fibonacci são primos. De fato, o primeiro número de Lucas é o 2 e o terceiro número de Fibonacci também é o 2.

Se observarmos as tabelas dos índices de Fibonacci e de Lucas postas lado a lado, veremos que as duas seqüências possuem o mesmo número de primos apenas quando o valor de n é igual a 4, 5 ou 7. A partir daí, sempre existirão mais primos na seqüência de Lucas que na seqüência de Fibonacci quando limitadas superiormente para um valor de n. Em nossos testes computacionais, dos 27000 números da seqüência de Fibonacci testados para primalidade 28 são provavelmente primos. Dos 27000 da seqüência de Lucas encontramos 38 primos prováveis.

Índices da Seqüência de Fibonacci	***Índices da Seqüência de Lucas***
[3]	**[1]**
[4]	**[3]**
[5]	**[5]**

[7]	[6]
[11]	[8]
[13]	[9]
[17]	[12]
[23]	[14]
[29]	[17]
[43]	[18]
[47]	[20]
[83]	[32]
[131]	[38]
[137]	[42]
[359]	[48]
[431]	[54]
[433]	[62]
[449]	[72]
[509]	[80]
[569]	[114]
[571]	[314]
[2971]	[354]
[4723]	[504]
[5387]	[614]
[9311]	[618]
[9377]	[864]
[14431]	[1098]
[25561]	[1362]
	[4788]
	[4794]
	[5852]
	[7842]
	[8468]
	[10692]
	[12252]
	[13964]

	[14450]
	[19470]

Tabela 7.2 – Tabela dos índices dos primeiros primos das seqüências de Lucas e Fibonacci

Os números primos se tornam mais “raros” quando os números na seqüência dos números naturais crescem, como comentado após citação do *Teorema 3*. Isto pode explicar porque fica mais raro encontrar números primos à medida que seqüências, como a de Fibonacci e a de Lucas, avançam. A distância entre dois números consecutivos numa seqüência de Fibonacci, por exemplo, se torna cada vez maior.

Isso também explica o fato de termos encontrados bem menos números primos nas seqüências para $k=3$ e $k=4$ que nas seqüências de Fibonacci e de Lucas ($k=2$), apesar de termos também calculado uma quantidade menor destes números. As seqüências recursivas dependentes de 3 ou de 4 valores anteriores crescem bem mais rápido do que uma recursão sobre apenas 2 valores.

Por último, baseado em outro teorema que diz que, “*se* F_x *é primo, então* x *é primo, excetuando-se* $x=4$*”*, podemos conjecturar que:

Conjectura 3: *Sejam* x*,* $i \in \mathbb{N}$*, e uma seqüência de números definidas por* $F_x^0 = x$ *e* $F_x^{i+1} = F_{F_x^i}$*. Não existe um* x *tal que para todo* i*,* F_x^i *é primo e* $F_x^{i+1} \neq F_x^i$*.*

Note que para $F_5^0 = 5$*, todo valor de* F_x^i *será sempre 5. Por isso, a condição* $F_x^{i+1} \neq F_x^i$ *na conjectura acima.*

O que pretendemos fazer como trabalho futuro é:

- Continuar testando mais e mais seqüências com números cada vez maiores;
- Montar uma rede baseada em várias máquinas para aumentar o poder computacional dos nossos testes.
- Relacionar os índices e as quantidades de dígitos dos números primos de uma determinada seqüência graficamente, verificando se é possível reconhecer algum padrão ou estimar quando o próximo número primo aparecerá.

REFERÊNCIAS:

[1] SHOUP, Victor; ***A Computational Introduction to Number Theory and Algebra***. Cambridge University Press, 2005.

[2] GRAHAM, Ronald L., KNUTH, Donald E., PATASHNIK, Oren. ***Concrete Mathematics:*** a foundation for computer science. Addison-Wesley, 1989.

[3] LOVÁSZ, László; PELIKÁN, József; VESZTERGOMBI, Katalin. ***Discrete Mathematics:*** Elementary and Beyond. Springer-Verlag, 2003.

[4] AGRAWAL, Manindra; KAYAL, Neeraj; SAXENA, Nitin. ***Prime is in P***. Annals of Mathematics, 160 (2004) 781-793. 24 de Janeiro de 2003.

[5] AGRAWAL, Manindra; BISWAS, Somenath. ***Primality and Identity Testing via Chinese Remaindering***. 21 de Fevereiro de 2003.

[6] ***The Lucas Numbers***. Disponível em: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[7] ***AKS primality test – Wikipedia, The free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/AKS_primality_test. Acesso em: 31 de maio de 2008.

[8] ***The Largest Known Prime by Year: A Brief Story***. Disponível em: http://primes.utm.edu/notes/by_year.html. Acesso em 30 de Maio de 2008.

[9] ***Cramér´s Conjecture – Wikipedia, The free encyclopedia.*** Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Cram%C3%A9r's_conjecture. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[10] ***Elliptic curve primality proving - Wikipedia, The free encyclopedia.*** Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve_primality_proving. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[11] ***Euclid Number – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid_number. Acesso em: 22 de maio de 2008.

[12] ***Parity (mathematics) - Wikipedia the free encyclopedia***. Disponìvel em: http://en.wikipedia.org/wiki/Even_and_odd_numbers. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[13] ***Fermat primality test - Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_primality_test. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[14] ***Fermat number – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[15] ***Fibonacci prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_prime. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[16] ***Goldbach's conjecture – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach's_conjecture. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[17] ***Goldbach's weak conjecture – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach's_weak_conjecture. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[18] ***Lucas-Lehmer Test – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Lucas%E2%80%93Lehmer_test. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[19] ***Mersenne_prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[20] ***Miller-Rabin primality test – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Miller-Rabin_primality_test. Acesso em 30 de Maio de 2008.

[21] ***Número primo – Wikipédia, a encyclopedia livre***. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[22] ***"Why is the number one not prime?"***. Disponível em: http://primes.utm.edu/notes/faq/one.html . Acesso em 31 de Maio de 2008.

[23] ***Perfect number***. Disponível em: http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=perfectnumber. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[24] ***Polignac´s conjecture - Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Polignac's_conjecture. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[25] ***Prime Number Theorem***. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[26] ***Prime Number - Wikipedia, the free encyclopedia.*** Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[27] ***Números Primos***.
Disponível em: http://www.somatematica.com.br/fundam/primos.php. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[28] ***Solovay-Strassen Primality Test – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Solovay-Strassen_primality_test. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[29] ***Twin Prime Conjecture – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime_conjecture. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[30] ***List of prime numbers - Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_prime_numbers. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[31] ***Palindromic Prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Palindromic_prime. Acesso em 31 de Maio de 2008.

[32] ***Smarandache-Wellin number – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Smarandache-Wellin_prime. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[33] ***Sophie Germain_prime – Wikipedia, the free encyclopedia.*** Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain_prime. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[34] ***Truncable Prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Truncatable_prime. Acesso em: 22 de maio de 2008.

[35] ***Wall-Sun-Sun prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Wall-Sun-Sun_prime. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[36] ***Wieferich pair – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Wieferich_pair. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[37] ***Wieferich prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Wieferich_prime. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[38] ***Wilson prime – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Wilson_prime. Acesso em:31 de Maio de 2008.

[39] DIRICHLET, Peter Gustav Lejeune. ***Lectures on number theory***. Tradução por: John StillWell. American Mathematical Society, 276p. (History of mathematics; v. 16 ; Suplementos por R. Dedekin).

[40] TALBOT, John. ***Complexity and Criptography:*** *An Introduction*. Cambridge, UK: Cabridge University Press, 2006.

[41] RIBENBOIM, Paulo. ***Números Primos:*** *Mistérios e Recordes*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001. 292p.

[42] G. L. Miller, ***Riemann's hypothesis and tests for primality***, J. Comput. Sys. Sci. 13 (1976), 300–317.

[43] M. O. Rabin, ***Probabilistic algorithm for testing primality***, J. Number Theory 12 (1980), 128–138.

[44] ***Sieve of Erathostenes – Wikipedia, the free encyclopedia***. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Sieve_of_Eratosthenes. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

[45] SHOKRANIAN, Salahoddin. ***Criptografia para Iniciantes***. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2005. 94p.

[46] ***Fibonacci Prime***. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/FibonacciPrime.html. Acesso em: 31 de Maio de 2008.

Anexos

A. Números Primos de Fibonacci

Estes são os números primos encontrados nos 27000 primeiros números de Fibonacci. A leitura deve ser feita da seguinte maneira:

Número primo de Fibonacci [*índice do número dentro da seqüência de Fibonacci*]

Note que: 0 [0], 1 [1], 1 [2] e assim por diante.

2 [3]

3 [4]

5 [5]

13 [7]

89 [11]

233 [13]

1597 [17]

28657 [23]

514229 [29]

433494437 [43]

2971215073 [47]

99194853094755497 [83]

1066340417491710595814572169 [131]

19134702400093278081449423917 [137]

475420437734698220747368027166749382927701417016557193662268716
376935476241 [359]

529892711006095621792039556787784670197112759029534506620905162
834769955134424689676262369 [431]

138727712780478382711418610318624639225845035817178369007991803
2136025225954602593712568353 [433]

306171999248454503055431384808371720811128543235373849713167479
9321571238149015933442805665949 [449]

105979992653014907325996436715050034125158604354094219325600096
80142974347195483140293254396195769876129909 [509]
366844743160809780614736136462756304511005869011952298152702428
68417768061193560857904335017879540515228143777781065869 [569]

960412006189225538239428833609248650261049174118770678168222647
89029014378308478864192589084185254331637646183008074629 [571]

3571035606419098607209077741390634544455699265828433067940419974763010711027675704833435635185100078003041954440805185626309000273864989339446192101928567683526834688317544232342179785257659210407472913166815765568614907731352148617828777165608796863682661173653518849263937754319251168963223411300758802871692449806988379419312475160101016317043499635834003619108099258477213008027417055194123065229412024294379288260338854166569679715599027431502632522294562989922630081267195892034304073852282303616284948601721297022711729264695008023426087220064207455862972679290525090591543409683485095805523071486420014384703162 29 [2971]

500195636126957292905024512596972806695803345136243348970565288179435361313804956505581782637634612477979679893275103396147348650762007594937510804541145002304302867341006298493404319657382123201158007188252606550806694535329232256851056656372379649097735304781630173812454531781511107460619516018844320335033801984806819067802561370394036732654089838823551603083295670024453477589093119918386566397677610274213837391954591147603054442650326827980781140275941425217172428448698161710841740688042587204161256084914166762549007012713922172748259690566614580062682196606466498102571627683726718483229578044343646737694436406261444368327649097401550241341102704783841619376027737767077127010039900586625841991295111482539736725172169379740443890332234341104310470907449898415522414805210341138063350999730749950920147250683227798780264811215647706542511681027825390882770762662185410080310045261286851842669934849330548237271838345164232560544964315090365421726004108704302854387700053591957 [4723]

2930441286939258055400798002200365702070383356835498296052929375099603314612750189999474839964041401824000060018138590135001102587299815016150326470813100791358366141506590207652108187961822226141844888227246720852693565292520772736233258137883131633884772691595926733322344165957105221939274575774318941464860860848233258397675536343685662420797069118608961212878580658178971916344998597383060635840095569469168798433682688690011514459699339511226211249166351120903825586706980141114247391189112452169301152785673208885984700944382085177499062708435697669359679050984522704457968238198039501357594162223897683190805618618838233503289429282246135842585430668875653560981464799218782095773523505176978173330569112583486848660662068908749844158638271675670908226354975956636181462553977591227553535134946781776535903879669168739541718125413163115489438127173145671369147353184448182943977584875431449095152717023151009740993170461840098542328540055499213188472025194001595310097403036158566599062407003698164302276578800844789715519909977450325416955326392430087122738870988283653737701175138504893394815816782040327194725855833 [5387]

34232086066590238613731690913951710107691215930667240465188054789504256373106821521172066166197766709252681550309849376631709628140069435257532740524017452449341702024368600697896725839541211193415554922986301655500727605058124292296738039853577435639694941578256133652419129990137384257939816852668231469715090637028329421030931438092346036252348076356297419600725595381169458846423057037791345204036506739689049310482960302396815466244425964972993775200819281391530388217161626391631839849531705181020130908994727454174850572321150106032855967150209115862775073284875432677910254627112810370960393893740861236603381566926209722249981954516151268507500749008081718305144615868594520917146555333978651915370885441986418643665817673640142519682400676824978981835143214373782377190788346095131806877299053005050085158119621736820600604111709942772764264740972491428830234138005773476489947278480201848207730407573125725901638147483949232495723779187096963221635051383241333008617240453550103623900615578432131522843758637572593852065545292358414847210531430013285965655610695953540425283683661657226484949429938967519969549801484862583447513978484234460408989684501607965423861349431477588558181217852826759956347740896361381757834639836417898633523314330607934107947234825739354702515891333690326781243009372183150100448189481493570797542313464345503753223429460276250666623105503648328869828783377965273734978610267408715679163288172900611698337050361664588434025957123680877592172325256337368056716996277772178396958507015810297797329461927411894378292666710238963985176555032126878177465779946480230102199533520431014198208105762635036405642806644079224710490333722027067624903502757513110882788624743844030281499884122107646216536275345288042278627330894572237464996654648173517057513248197595604692131392364529813824098944887299421714545785012452014220436140211917323738536461629746903490068434702342629076013355207397345037580645424669476289 [9311]

1056597787330886165607283376335772947912004036112564579874375352759594439245750115025661751635771858498604063538249919150521910143408974582829038241321765899686974372065892543538158617334073268472725275364083905833609186070912661512269116100758775431451837305406774829615930445817607326150685658795315867111693264823732004839656664575237111288179099232440466298431582104527085532877031549603964884101691956585163355851591142327980744624330187879064855304798755771686797051547007947771882372952667893427143690224381067780291488291525844107323034231967453469607389798265139480514915570754010362634536063309050925069684058402883158793747384557423242752292859137029927002634958591300831686286270148295738141642265185159474092374071727835227879093337721218970960045114467179521256582820857644478939615872693259767625051656784436320536214888099246970935202477840794020001804824934094322942647313245015464146235410381690956788503264561405618174143168558794485590593621905074843445469861525661965245856307816345300556329589695975628440616169746340959867964538987362157854244708043842221402221963277716301052548247805899502717820052033072255313071657586884240821681100976940998736672322113547366478126078861119513619044370696083360828601809924884717575519821133956492114471403028698547136465705828789219477311237793325673906241774008541206351713780742201285265869533452824000524673440422889327800328362335547519511501666197619108063285902418799306753187272256356221431103854880105596403020095508495581348319107302916061047962850483220408241536724453572645136434687510278707999281526171375525625955687762398910760113471086947693290849443284396138463694877303972778628913002680531451135439058230938508307644282628222440206903725318897236157720164030865445790151149151226995439617177019234605884244198267136453281188424540649497573644414770526808655328967088370380579677911448765589873573311772376689968432217235625731351030824652263016860210144187956704470629348157475577780655133842312690878825193342235991049335995169792504550670357 [9677]

3557553543946581225040479164116788033851212680209504558106994100936688528970097364194921768678385719595318294307523648671622242906917424646688811892251024593183897797245646505207646595387236996876153827040472589023926783736786550394284293563421034559640005957307178955494150780580821270241485451590565821493610827212475264747713094741225421539650247734338961674341829428412340459614955519910561936484392855623533250238615893281168466980012003123266144827467728986250480794719082579301882967144252495405187441972549495270565709822262648255074704983444315199267447778068773679810294770471784969646071077534997739482178472063809990100960828908113588039754907888828170340165845685868924932977702172822956741720049841876411409625007021538215864775683446597457815834170282806906950773316983501503399016275678387379505719137467163471948567396566759718646407911474554979628860129402348771529050628227349012409292697680392305909385016245361127616214694528712171926408298967333871285925967468690277993699986521282690834273651103489404700059292782533527309252937498094521610351149494043340808549113075864771520249633412754282678895169171195592427847274790190842718166782869133716144616501734010797091692432105861975507048577439904704952740845614495907489816731040004883465250280072756088367187228510128746207522446614404913157733998216931481167990391080138913406994120773708636418401233535972451874462621393612841356383846841585332209427291801896580833609107376765146369020523919836103372532447956177891425211665213450586866448169506593235344659403027314454072520878860011319554540002243929700726752580590215267162319749540242337479222301231791401645374161744361482408560322586635142770156130450994378627456510727400952772992536035604700462356167756151147042208544784788803565574345381781432185959812251105842549152988492813774448900252187549821086271558719744006081239800511038361933685661028086138257872174049869885612695986442111345522151580280036986981443180444200042863339739975847007487934807554284114682983697807718123604018479403029340076979421297444151435232592525397024754169612852610066400972050018970101323534602809337221829860942239111465902

8624001270453190538264770383469403870037017974456460465771525104191140044184524727928579201696954553404476498271045929842405269856779421989512016357973621030519473926454590050918592593886536222799527913211627703653867676067588306639195305539808190688207964037007849985340599327652056978218376320768935464661531895900601323120549398185479763413124987492835048346907767078509397248688131757087682074902311796851944493001252086010546519509633633053780872088358107688148179301784166831694622327402119197189145347985083735644644359185988625646498798970241905350660480576777636088238544638214641162971828341528986431501141453179194948188627370403367391258025612163749368219410614434493620283139356942344248380725963373977978897502474135353720309869823747560036876896386745139506787482833287665956159074702660583007022500727208429457767260592627743497580079441641156315102984807586 9 [14431]

3833429031423568140291442290356526663660094378980644807720239598092876382194226950891207895766002392767270056072352664905630160268220703614142888873906857288834838024917287709008011360438451664063824813601612273015104400050207815551324026031463669313623641035825646673090059772076811375380210573218879288954660845369862164982914913012122467649087422322661861696263272370175965228665802420681199257286925948477110331533292718956292182910582921442925801765936929854541167787758134449561341863318398384720280791784955997858100903227571179885612284929665451133732631094170707394739341598096358051854357479041380526657971758466597682626796227610845358129140174477678525463544192347991167977721701526139876479391627938357208427728627469127236788726424759363012629111935623230291701747280926315313999773783760099978337456147280165671858880657843701388810750049318244993009635680481439605456607571440523972945892082782832519685181431999526131728027849303566034947943137242150655291123472213506791800376826971768654354643808976568314998819451029918200822544278298389195312110076070596502735495100820816791601529377957834063067232560369538837559430810907793636947203447240903308727758324420115284482964073228599749643898750177828634206666435727552460975809285963656246688688684200052706029093007477221345941176456431848604084877876925030022600895727140614904976749298525358178627721474721706836776837096432152328537262479409386064301950539813816049486875256732326831436303340306080467043095996420971247726046536265210754058218758608597937905786424181017551887654651636541975457115988159252206089263189659548627528091315537140638623185767326304719364750667109075520654797585114095165006532263818660169313916614281008867456208005543207487500078164146089522753386539030971061785161760761941690403470719083293400907017479473143678530011240960312340969398013854637039657193823702307553519763581823163435047861172905128921776696270141309579278888385541087990915196073447990463111337768699985968121504748191506996070036888405372975349763379193406378400822196787329904536283979492948961820289428722955623303773720502321947983963924421747833424373864275042543563

033690455773824178089463865136321291563244921482204967995745029
710718519390246985175382799867605478436935692887186161531300096
013456308824254098054832697771321449200449402789077323030349758
428362204727834872178582049491787954430439776837862044288315072
428023816126337620275542573290636485661231683428479573460116555
968486022600594502996627931256162162284386808609181544643649545
992511218253834082260172348824989654952217227622609202695365025
874569738735127218587984650413076001157404901006941056615683578
983929428089873589079880969859118955976084484377793789075975848
829504181494869121271567163264253782591404753379124954516923640
452488271189660036581749522743552182310306040603563377048844985
806430160254210113704766747135192319866386635694741989951153738
746460480986289208928519761140496638637285026334623794863780258
351442711913904987014462580483105239930313068826260660743932364
459099166553296466726088457283133127790894008593617619256156992
482943045290085288716692181115494351740557271146238369366290487
964573992491210468811534527654473244805538752857876571089293393
166419085894518875422366553972495734144400164136366221109829868
734421253293170264512614524557035815463248033605254006174372943
451309061928999423991909351758193467567476443363104682574783686
854679448963430307089875857291539647930150034100648385359952727
261932354340830053174120686742228499724674515233362904678521973
342863896546561396879159716148457586793965791656147509291414523
015475597657840254205574472425923934383371537302913090703362040
130212529488350141472896999321791873237417224511986346652681679
019437427892832464186653754062813161549616903738876150214082834
486324984172691220112286737196234937700458932134837432501748272
384025785678171761969101978311092452040165938315299762217534298
062048178256884198698572545996633207689497682494779181477325093
617795461719949008166852488573643045134605609447028426049681236
650933346746873491317202682535561360514959731448006841753790157
149776485836216971644376049096425573907744858908357764335138176
149578300080134255635127326641410860726836996012282819254306541
966419769631617726380834456674601783180354823903148629425601554

9143629243139054331299366241349997558170181176687585214309249711131508453610727196424380262952460319172988446270470400315682118921612439093587340260607547656009229272823346686379771914203000229793266716081783561069460003561788921830137062315329831899534342711230407693340954323215652335589113478635410218802969708334601649833331113398212081673088071037073490361568833733999977205479912647937758369821894279221812821795520029045316518052178638093210344524262354002961137022658360128915050950073217906966154880642821789579731779258678242994940236207680043180458441690125217630560499061379085614008211842556172544112437024082901682618665858101193749582277414006213325849527766098335993988330101996002357016254354168191739644641064738603413125372675771109929478613369705871713069828689530514695856027316277175564747062982507723874701090576686861187273315644700553144995333537478522914443745378801941189351312074778584934979921038589733306458757371116664272182727906747915123047891178876165739677112611027356858731570792388640031895350046267803794728039684531496 1 [25561]

B. Números Primos de Lucas

Estes são os números primos encontrados nos 27000 primeiros números de Lucas. A leitura deve ser feita da seguinte maneira:

Número primo de Lucas [*índice do número dentro da seqüência de Lucas*]

Note que: -1 [0], 2 [1], 1 [2] e assim por diante.

2 [1]

3 [3]

7 [5]

11 [6]

29 [8]

47 [9]

199 [12]

521 [14]

2207 [17]

3571 [18]

9349 [20]

3010349 [32]

54018521 [38]

370248451 [42]

6643838879 [48]

119218851371 [54]

5600748293801 [62]

688846502588399 [72]

32361122672259149 [80]

412670427844921037470771 [114]

2588996112033034187216561572494455300468300730442011523322577175
21 [314]

59242995313457729780510823767354730798286848921481374874264534705573628371 [354]

13206357383328389639092239287555101400342560694181246841468823545188752258233374056947369248398554378768 79 [504]

12865405325406700178979615441467706102956391126633476654488471573707858207554620031114337724156366624943266585714503049793963452 1 [614]

88180799937469226316262355265088343409267483354802512091686683255994143459932801408634187303945781988373356403536999461684050957 1 [618]

2271608764959185627485350359425842019659014330597496174275357069499171361031764828754036539726394559450620958660050320088199236184776437699830957031191632116265394965429613743580479 [864]

18173616286745855059250452920138472019176580784879622884782044519119639477755338332666883926698117184588410526351774242875403634219350556225201650709256220731055620705234463753380151644751506849035482595585816411305899431781010371 [1098]

270506920428756191684035999089018851615401938805594773074967969704488936824411049864682656559629896230378301980421131408918187821267996215783467398038224543737468042037956373590209412458390442392466121653400338041966228025093960740131674681265070412932486600263932615753750907033544051 [1362]

26535903346121345087593586902909631156390354178863530306832184645297173321322886673378829049305451442247670595319147576149264065624268455369172314398328629995713868891137912404430226981453287408779635789875933499810092635495568980261294794569367068123468440711310095348901817072926261383111209697671084291419119925176744262682645622133287520765103855323089586501727524180948704419814875309281737054969233936118274852031208957580692446101900544969970404782839836010424322243982020245508597152045041340678710482247644197009228157089258333381976088370501545239749337995110871767176834569845531308573884567658908249977217508621798906630210324586214927639990316825812081613028464035861868049572996003621888657427466924410160443410305976704900237673294177783947383860005779301520003524640547087712744542258883015790736311375236808061717143671920999549933812564700567553496742882853016029503736234152096232636174686101038528232643947510118376168265773906466879080511878966753150739244744191300378424832271479 [4788]

4761674650202579377236840518455200658834848296116869513144461394
207193173647187880579773764991680476845543114606634842179582197
781869319983644070065822631532656669147444607435559960525302863
1075814433998801940999831384058269225313555758250057576938366689
294505815348081364923382599057673411300879267890611753070181098
930223950258722795034517999545490501806585583251108824227884860
549221001978452770597904284094592798843666168585703483697057344
640367566776091445610161503753644010658016216653677549295550679
880636648338064064286239952347035921119534138885790524489076166
260609566316267679097645322085197127998474143201261531524579275
051666780749938216213477571895641652246462403450283923629462651
518510231437802052380018618157655502695429395034246342560601327
334067869850588568188637157328991833074105614937113484615137433
318036750251733999642784399115054162083024337510363278643877846
079042983454917817086608887399683218420880209220652016580488150
410371748746174996309862502384756689326146051008326991971 [4794]

611903732929084552244624588774171103959217156084453197287383713
634270828610879689051351307684831146911692705530579405810502039
136717521231561554630792662175211640030143693769345223800042638
520462377846813800493882579153823155956634860712302701545066427
363428404087337310106582791859860962456940474106933417893888611
075301829666831913291133850983821865626400522652036876334265528
395031560352251856583000160676838737484562863907141516893345850
376157755651551099278068558062427477296895246566105597597705584
530091457592683084817130566371256629367821648865360267445217184
506335130509643061325157775658087723608428540998965232397813023
734069203270782369488937157092475103788976043977939267078245491
308255694854298794571857438581216816285325477317641301242673778
901021899630906465281179689082658385091618848502477979703496353
641612508006440689454504744533167649075372889895742647920491426
248533085246957964091759481905456549438466234331450411232785992
827659491012267037562230764386909308581538148950805787980890563
658278341801965466092875799745283145175198044122213768172416818
314899379251871008042686592525878819056566839398515718773246212
061630001785281017455874434193319800028093161167354232937062157
378675661685085709281257949 [5852]

5933667071290707836577408569058885212212701819138184924303524256766192274482143656018333251199122660678723364757928778884126068345454985709574306894674546068155795429439886224694317280507758224686370357387903507978410859326452086383757628366709554795651603364706882636085453528998384815764126349523105015945962018102978661038642969547377857449448330048374040385520186260951576887271173942114561088463403895064894757503792245173170391056220891739416873367558685900591396822007191124067992480377205666116282076073969458414044481557204806533391986496857277594571814189712915132109828531457237196591414865470435739050817591642841028683662004396688203253460107131146069361207983214206263572761406889709743407879314799241248915364021342595415230943736356137329538144978236447201382543122416348934849439845476260034693903618889512155371129036940314852361959661995934813525756350880606993624851563764941932803543371898119840909785893879659330911099795571054948989763199203307015364555035211643629628187031243677508827378543298054180234562978675370927168807171304720719621201337855119141817713532441945722705928076563765117926998321871522224697275128795618639947019399807660858208544049989713565308403168479416110221575816810761007307900737576434938870375369968137985159937440322134063398257081200459910613618601092297547368117183294607918701466547020848401278353967274857322449293015499359736942212271398788849639389218687491712229240483115154116190435744009370487521031759668372575866466422283496462965004816961384254576637138046051100048439377054733173195495114977641259322981537501797487414557807152070122619241499936748201 [7742]

3150286097119329462656054120578917163132071281167431576431536235191843566942222037238959067825917265834405731570911466956878573723339451166721060619730446063813410213062456466745888369313253411668109732014991083655145229552049394276282622452523474554322549051576839668750448730506397701309160959002354212832473087362295281812839247852578293778805319070841871708943824792043781090414181892386840679631492240604077832866810534207437727397847671953604676662264198754724704639503630398597994337168760059880655720773892605480090770817275866211029677620020093827517154024480662405003804420738991838094764875452978009261695966362387018061074403151340969865578052559103292428555092599630385495922674727181666792494999387666576750333859177198929003451445516452743973645905239386170318084866387157500181329202039788383165495019009557318884308908152108104548426763513970512725370410635395132150631266971037948168916682327816253087049615945807780463121701126668017184087961243850428474183199101302650777534161192224980944062626184586537836183438747688648415242234242700574645525099319210449107454012015657839326572090198753975895820663555585038303082505952550926017034423339135048540122217703660022860403879150507962320588668215084414963945615098130307318865224882368911459224211688134551292050554185133002672044857974492586555182141163940276449106603524677484783515029691914175133806502459378175512674753684945833754977499170508172491659363719708909813739810543197835944667864577791483002870065661887090750419497456657805027708918150618782314475225537713280969747204767767405107844313879620988474817439776547576070609529513571632638467194598719958208780182891601156639803589861139068741171518606627380139880220577049392109830674480959286374609104738425635669423407665177577997994299 [8468]

1935806360641856762016488512205843413358341435365422976908244448
1671290669740378200754066600995323026229231122222316488122991500
7263655269398347881588757619933063516131332492379215890866431115
1166987927394314541115103985271513926768089399293808257927016001
1786206415266981355362214042564202319994262331023128777617921115
8883561744645164667897373136040344807204509321660489645167790966
6917358355052786676307828806235441232283592632031252826713074388
4662877484445529293573627428732031886977829941102541773121449377
0275794963164886071387117433569196851457916923987786305001372666
5932901915862345715628755295942656496968921427444611931740009911
3158020772105961069510025845493810828260354324307450790943472500
0683843228075483449955507447385692717108642172654559404257727188
9300728528269005758325158395227762889588825788979375502256839533
0866102007451939029436379796757166258976832346162776127445701711
5119896884431905845097242765290193273051226526575700656729631155
1972998796782987421346604139010342029737568209344661326794031488
6085139476758602119468970312428900579037105877057867115617314300
4111795293318226041689426046158519587874336874381668848756352411
6361891468724480060809761302617389922044172647081761996422279688
1349222592948309056857615968174407749409825944922954375426118266
5869831386860582608937352311013609186203733397333508960166262588
4039129698032328290316373907567946495395739001191278590070505333
6187583862027549017234988738776467281001974741140432984959557722
1602617706724692462098368716798144457415015668910257814704833500
0477343365522925978593882333754217202125772707396689312544396299
4597902620309477076075636608846220029831429626314499850022319866
6089475534754303083593049504240296410685817049571072567596879966
5680946423870007297777391326042636973603645104291969645545299588
5660546054157870359786917971826060756701825065204580231893648499
9566248783800724427666493953836518759637601210824622936898602066
7112868242030365031664048548542462243071098446584176871487534866
4529680594750261441311299528605312876101384330963884820774054400
2977016034990943317871173314759144826626944751444956116606149377
1173950285304620282574126392976099503450884015095877241076510155

570768289604479065880358169754640010370229397058103256610794705
505843143020403839718739475799 [10692]

2030395781781171539516292555631669771408625889601037030437336992

21970387268188083257896599852145279579574848848005114926949142

63111105372606696361548031347611263648407431679332726057812922

20

1096078535151297148192491982932812039742270481937447378190170
43

856496225942295325876588966456840337887820672636342412500595470

726290010039964436064388640212249897507503225182912842770671602

442473702351773405615318951993894957416530624930835488437592456

032321746437896669603169611848640348916087885775500293351007697

632923940614199818320150566341181813314705358303195383143666431

575876172899144383134944927314017904874773502263722543164181934

322586072681191816544690358448554545118360546199377872941276822

821316058284476939881583409991328156620024070903556851803383766

198221860122661527788662696533971934311517963081986428442874255

907799027047658031231046955438966730747000494870259326494081729

309543737610727477543749063147304637534948372224054379826920230
5

534164523152899325568288987901939526104049864428172186712554251

780530749753536424997228920042894740859443925327842402887745401

471777264740866886998491715708548497815256812694450288612957074

556407850326300133405186741126936482842779263653571847178346958

395269425930657421372591460767345846997399144766602633834728975

857458862978365669394153530916603382269436777231398010832286871

168842623563061166317770597460338230341627550076334403858620089

232156078486249335431160206329890515763190567896598468948085146

880713108203040240688659194198753990217609899970826145655303876

968410222259661933660982825264599717074873889227454675791710236

584124630248235494861510473959215997149455981939949026859700891

206852185608926280581766980942511496428003215394968458624272710

288878102875013237388968482609308924779109610784699418594731017

922330538070507441257963228513550549982401603277565399277175951

980806805203841490041062831846164760218242018354078888160812347

799119293459952394856027822374577918573242204010108086789989932

588036495051655198481367466676487609671123925040313947916138571

370040478115546338705036776062326654273597715562538198120643540

575962361590451878792225000866581361618289171687094730688480094

4252571118392561114812702575996354678779267816411373769747557398575713163577955534522056560593829722414802048392667752898118011590508426611047115013096328701410529307107915467747987429528401123613747961886959306412744790778029209297368695992859058816445030397428301549173798154590765807157015222038058849816417890356604661409206245041268484684461583115133743558578411290401270570788557708418011924485386041908695114 4999 [12252]

1242855991987381194229082744154380188714866356307053954940440470534991560437928615002338796536365611456099400898407034287816020150374820539263084767119977088990519818567458205007504280030809673663706260830412355775585775751877064879511031953124003916507309617973046661912311142314435091670751321937609621457277624069014936232692141434539629522756602809557644207904449520860143604757371580865047718092275253243301546732953679415284335564222422905505543697855046827634557369039176708820480801313682242673179524215079015707701203938312250141886958421018610618612759576411213538804252657299929358649532610351983157724667596999594181812057236232897945043360570274378629458298088636064546394898066767679341584876635544069807019888372615013695168610581552420801482907585144222941124277087066548691952920858564315776723537723760705223152293490970871362927871855351020635829732144113132059201882898037954471245529733402663630990795526764571991999916703088812750295778614828149223411005479166664595419219905665493990664956993072402613631574642636372298284313595489857736148248908382465943636375339415272470353127260456842649161562904603657693704886889910273035020504207789416565133822198541881126373525811145366637805974172366119495315131009239350529675685733354543372244737107056561628312922458127779052909207537541169455629683683929255172456542728181144179747151297031841467131717572965096337744384660345860381575094447368604233763377507618437932316515170384794748285847912872398265444195752284322639072025049906460833059803702894813531240243425256891919565818368664521313055143640020640670969018441349307619108938396424345067777780189524020681979613612240589879388249294591028101150409246752925743365899086399823465838303321991842556630052204729077097314068995680454416147354412995443016707057048109633728896278828291749844720148726298075811053898475483946877149360784868041465251370424481365906550176189975253863672451544434824396796443324448068940935219263015998584526932857315200698100814484605902682876624031560205446202535612829867923787937547244970016205054355303281686444491931958177863217376033801473821311371475819884864710824420090293938636

7179702958657057482300074952482624069687979933704629736358187405466704312622621374660814901465247983874446092450369184106152415052232446674046297566808129677656199102694163232922079342077102530853567718298199033813883733427185826193100603991261537512112601384039301212193985281981909236653559883794243819523810999476887918842723688779735534282528049788205038540914055823726479899749773044078137214243163240402586849375935590111273965880521889813444345261005466096781977845040508624138128049487317647465728401090833440123343936351758334772611104135643556009333743821838743358178529534719215243409314957891679972540691900024366731297520727936319213634397665615324782084202735026868022987962880838389382618355992185913625131386255545708979147785102415749677029535531081044819902 29 [13964]

4596359316455199559859312994701681716382699317969739432012912926104513451807533348832833645140894608823840578743319705496959162656201702558533845850723466659767527886263140735024552024926492311710275867185037124137870703411696892925765290470058459276887704130846521915641822389336874861663614627237338157666795379787457157738577190191011232626622872301539692165889665062121144482343531048148373373762358224977249019592214442467232896857616339424248889368130972455813456347971242750423973709680380190451006306578745484846706877895891003587928782264277970796186666652592994586947078960126513167556965698540771140273729566588541033568791878058816244212951611134165342620334147932764742271596879722606939361319951021390440600543521531803956656435667431285519493757221477327030721037588588580148949504422721731308332781465428577854702340065540372300846668538229201760912264536115149651600376717780251748056232365748604939371786145850798435918838023623130082051241366661135198806040896735142493017676355047600218021164414764406956277991889361642629992345281115989841700488723896734497996314812979557830439872399721883868535293480625970061067644853001003559445666695858441939043866046945333017115911150439759903271034982275441681117743622957823829061249940888690196566280888465598947188053444100377907618901585236300348888657532313351052302319199360387082341503695810136674252674846745606317349938914462191735435062666907170353367053270940659089133000911599310980126084121981454301838343472152217849368729513526527234179851037624776779013840899042890927795968508751430884976010645352042885201386046673470482242895553825445760270514334836017614193589192417772210660718726632621263124713980278401530461308918242454115689846690803833162471696773367555580445991996994696696116698868320743135777785264971874002135752515398841611874589223750886293173950079004898200162536546500419332880896868437316261794217603264060947112824371228474934727546528413400478980797607909288642926995168601262142859530028780876803918668680741046129538072042082517942682284173179673095238149611865423297225309673391623505493080657927603537307902179639733011622429546348838046050

33215847326191825523171022969480461978848345878376188149235313596539636323846361973153073865210630444010206118458679089779026053021029777114187075351919062472575230594855424297015861221047520117957177866071455087060238071902928685118032755957471075277619680241111850783502587556078997504104723557813568104509815074968337918925145961332675901294190279070307252490460221609473787688356603563543274591140634351655149711644163509146538682364983264202869631384015742813408159304588334584008844696600373073484821095551733496479045000213516943508094702257122800791814248232134283813539441462054313459134242792595931084531874011676736063790936699670681244036318155320095654834147840354211961370012428749918796820779021035901944284051122333636643203833195984736387506845334693633782838180751283912583901395816322467861695664339112725873315331817271734483301723165097300461164814408244001
[14450]

6030704193777853208783967547703359188113858818799699298499284445
7250325257207997494279286128146649527434566663617844884745882366
0962569965112432755011673797501376934442971776259824194225597233
7391233723933927239829442155042517286267213736290707823457881444
2862603124977777475162256442726321251725484314499744279804795544
6164072883238238522395824477791400794402117234870260482826980133
4241907888630653100329705269335233283450053378469086287298708133
3287629888008824799016757583038705543223871072194009487349634955
4973764974463134945793298584088213056626445695952523150119808455
2364777300214671758846035683981357847221194254406188887758888322
1895136711383203222831098684937349472115044991573004040941887600
7926567119636230436291537200547035970137772859922940602604411744
9753877722463569950455070396179007526139261536731521237588519155
9137896335600671754180126083198590440993345671721762087789697155
1544873108915732208919559621497594661097533993515303942721241944
0047179588041754299629948448680274351712878850862697881161035311
9712239517495051135714351270355676403796642235314796998826292877
9024211443657977493762049150520270578671752974442238723782252199
2769249173105228443382818451020367708314340698937376168300258911
0582299533605948039303950827478914207059473331117804324676531322
3395555853999601561783241358400000554106721813308009680196115333
1010465911985279193035226120522134971147575198189497233635590566
4035291674934619641454188387588465651161880391541100389555573522
4360508448759558737775265405670323484476338002948008645767506022
4721420542711288621579915462941998609526191499561019028447673100
3926574139174099261862946572794337721373688386032189454363846422
9483460265386993474375431918352536197828637652956910345061576899
3817754934424075267586566672482578300450353902463772980065664744
5371853963174066520844674664958077527988279603388784289290240755
0728117099368941169688026348529018029137132908077364376781907788
8421617990932352525218282553306858275874452320985449408317354522
2050809352098503800111328995442322506554972609169612148010068388
8277215145172121359158604994369301647587129105067598149383951333
3409212671674722440868727051716249982271373081350967613810774100

479186982994776342900699276824543700651554363906162655908834507
635182883232597471494687913133098617951501015748965069794200358
637251377462089263314537447156498949446992199863206502011866538
378434476418976526245736206411770911180387067406764242132145763
294007704776079559086256469640283900915971471587942667797831382
542469223455630726402264623686169091169808186175072239425848760
715637119758705496506798260336259536012096762906983305364893657
670452857661938051911690674943354113162931952239448474470723038
080997662691167692104204854371241380825491885730013554546568769
228702121884765899439249307248427386839149904693830201896516252
535017070683180074933832875878694121548566217956851768077643501
665630184745095687812845589076045907589372719008777577653852786
487952215824677686153182488320882692607619186952948600625643315
538580073956313385139706494628871349027267336727208067211950921
256822432782922081390392027277936762730639265525711005798347579
337820135542940049224161998820300248141633208737160878213994085
675591993270988614070972288968018327376153212499749679905100089
981010108745707630017062345529208530053208672933302849796865165
502945209125238462973835244367409444255384314294795047622875205
400567755062365774011022689955614837459342307173590039710105084
752495508447134592653602309142117394112351184950760898854392525
189539509912112987734280631587593321736754115772252448317013812
304637277489542033053500304202684618321825497674646632212184806
320617787649099205899992727242069613788931660951955304799298365
071365603380970672709976056903964311449271579004752029578525095
333973536711805680354759289674320529622231047536104736928502178
529400070740665548034327913940165235287810638226937192629891688
267542231223859540360212910280506558300811145728576425496596304
078519220332014435211336317627216093196391680196000822016756888
138078651486745318972184593439497202998237863370157264407048699
5515032653315349887388669356750254651 [19470]

C. Números primos da seqüência generalizada com $k = 2$, $G_1 = 2$ e $G_2 = 5$.

Estes são os números primos encontrados nos 20000 primeiros números da seqüência generalizada com $k = 2$, $G_1 = 2$ e $G_2 = 5$. A leitura deve ser feita da seguinte maneira:

Número primo [*índice do número dentro da seqüência Generalizada*]

Note que: 2 [1], 5 [2] e assim por diante.

2 [1]

5 [2]

7 [3]

19 [5]

31 [6]

131 [9]

1453 [14]

2351 [15]

42187 [21]

1981891 [29]

3206767 [30]

13584083 [33]

332484016063 [54]

66165989928299 [65]

146028309791690867 [81]

1619478772188347101 [86]

47020662244482792763 [93]

229030451631542624193448579 [125]

1569798068858809572115420691 [129]

232492485134052830921839055027210678729416149361457369596534215
144061 [326]

479155237577163723796109754326949316521582410719452823753807916
925505222445604169461776720656214911161353764078706840043129208
9283912649706364406847148030026738069441981 [806]

447962236736093404152005908383609356960880097748815023518313455
251581870233695742026845999291071113818642579508402218643365597
95668778607933415002060875219629964471711430179 [825]

302117711603255864834350205106097788356129144197168650928969896
871537712735387217670624301915341507918531653396605334671509706
191796711899172562141004020550012027627106262761397951503717198
151192275594245568880379578512880203 [1073]

2381048900216772042901933647313789785922405287451492222189931O3
9426390625813641414499068088919734254006162824751019525229O4235
6977527389853824053317736464654705747557610793963599624222411 21
709314852563246798810780873579097972703818 1 [1106]

9232274834393861653435134433387238657220888541430557781267212 49
5473206532420985052933797690764051089129932841604671794006793 14
6173629483159615717630407684296677397694421974588442185832O9336
75843523352648337963619689976552613862031001167918433841720466 9
816099478186485624419 [1305]

8069359308672186027382597275733564411750951583963294814448063 98
9299504649341313654836260648896948724766915942214319384921251 94
7243225787217131442616932899832403679280147308858239649135659 02
8938572728202532484466937013780087415125222707721068388819588 43
80450711166440991854258703487 [1343]

3063315920090262570893904329692319235111626664689780378979760 90
0853227473032418740074768234801260629090185411384206010640575 58
3119075646572409074183772628412306314573917882493478321174273 17
1339635892765489589959373959538967964866978525138534445779916 76
9221666402418841756735961914948137251408566155264904815553089 64
37760872612214827444533782953196205239584 4639 [1719]

8315156632857758421756085706490912142631191509807344033846345 96
4708333790453827318969394865125445073848446454645966500056166 68
1052442525408291107729563486232867688139414451985636814144403 09
0211957398286734781993403499892300852943452983709729486070392 07
4102158347269022701916845180391224003696246479250019426789214 03
6716978591953038116694296758302655525186784323213 9 [1745]

4448779408539927674977879475826706550394231152506389453474243109760329353312023677736316144348710246027536798801244222468258820490964952576294937562069954915880136892394013167780905745336835025673532885017341861520044637218512032325283513100371371100936604782886330084450013609877014920718138726315712733973560594697345712533993145142098119906304862303565900532991242103483376241557321470014567926236309152294748263927792332539857322510205444899217429536484382088120417364546895510413184505912408087442652447644317320975976098775404217948459310066746532301979537738787902092881702379838464047393134061120567731863804584816360946510990812117549399188799986073418142241327517090400205126872528785993704157310289205756576548429877011 1 [3495]

110960604842985282329535649342988216191881415991806068186435640322526231426434692924234705327135795565437752021561980163955962438264691171175644180297562436385573850629401353687915733889258015226001533031799283904148650669949249751099521063755057062631741806200251886342737544159761746197887352409046649216909898747590141737166328875436514657213459398149413817754928756963923806124290039873129460316171764431722445340989769329805788196098828350481907184711698940485020230022764414113809896308828375112657094893891541510274074142990396287301541825935847446592161510983571652832525279559227052208550838776933236246534243233151600032705327260092994320847844469196093796246590175764888383796726241198854436785878513184086300830903198831805566383391613739450900404343306390266427937302936540137140607186748584140693049658473203143692729887734983849178029488563470326874428486836138477961491 [4229]

9894337765278326454020958636123936020019016279443018475737157388
0353243945935238458188088284954673147273825156725350720989526639
2075013705068072334524672857514182391016844176481259454233650
9085526341567522129419934097643155206425321294067925953592993308
2401753198166255743491597725734278436709413347009573021037988847
3751538308788490532099567619514560087621489016566351303342391003
7600032410957180579607920157311854961796546841930673496843328861
4602653054706690833140397124900808747560467993102963302456347222
2181733244413315931038644951411089143848995784500458649492676669
3948792910451962295597887034715626385935356586385131420016733315
6370944033593228647184538518472878160996967770802139290207282333
2762141457498619779351578426667288639853834036689821599047566612
9694611152708826244830223279048091070186236791060125098695190844
8507309768273869197936040604910222357850626085729133763420087899
4403667711082029929201251936528099386727456155615423378196016922
591 [4535]

1181417216981572178547794604201371492726048157872811774986096677606182297786330498943758523906819800837115147246554204889182488960488277611596759347672252828827663062232037937384468726113575520165802860774624049576214200703744936773252377281617427430948947275514233140977904321243294503401356693891652449581984543457770149663480495324593422348294577881057080798147176136672848978097105380954415442731055454325837609093381317865653738953718843314565334540395029568384163561069948667785340080188308763186103511323103706645576705961737541102069991015126587953551883468779678169594168072383700043559638115651629393072938287891039921831449920192405416538028729277342155552380790504851748394328424588078839373623891904388692954613412347021673105667093145006960428490177005436181882124931587129965446059117713949691003561432834372117821119965762372219379255752424078071676649488228591173152126483436052488457317371237253042803550332872661015084502878875415147009178894400511554295297738323785124978217843760917667377510733235116345975432400690742769349973433056100327768920036793277042781175989827692696344363631088657747685278338571734958706546371254303059499016326877380060167631572901778529236996997559595805073891763751934290478018402967797132346914160415 [5990]

4767809332032210343926269639668329749136015887682533593137591695676457857181939780646200507850742281184772002050724377627386286966445948362825857005209650390206527796241560761965188487075408932298990583094552085675627378905914724586212271436639823529425755661577896746731594629381694683190363779065610213616070942881266232402199247219151608923501219123533008576424612777731657369249584832620555030469350714124755731126409955337380273178315291494129837875270799956849101947698941970369225686088157575328366989985720259275354701025390913557213984963092760106296113490228256709541916933446051498148962069907903346371330990925152005272885240081597831407250224017428962041295989397795103704258487631025085886526637648653293179688147676472902159666211071373823092600499164168950929033647606959542089189855813056919937115904538912997795830878291017135014683562026248636117816851394225727093175987862831492045716552972561589963072125889986370181692733358837218015919671202795591896664198700527770300903483432491948859784148578335823272609393058236811440015769043771663356410407901315522699633707778591720919615189363164032665250932571769379804809479581253496322072574961730570022356978748209593658117758749213452554430057375399855436160050303376373365249928926793606469783641598581604734038639463382207179948866531836363464557557871350355823185821594122378623204903703201687518729012305361213650978603402540639379 [6725]

5310072250828090681483916073678110049598828380977595526375846410152459321653260463504254018220789754473818277067951520056823625474864316266375565489623809195094641747897191954226318209005459110726419227804440826825278528503866496739411938869628302219959824294388884157960187519194243213490809985774640526452659617052599855282773228337683518996189167672528806169620787922432153540760691170197349808824557171157469175973444345583190621255134270449674920171885687837565136918542195728490608324453277756249996512631369228397943530832532370976731518362589630090170911552127305555766030961205511021212475304177894405385230022128320805550198705019066135953979667831344149574001891372625923705857762543039791696998145367671056966750678036009780892620509506541830779582575577093562434681189926098440003764850358089648243350795416231398362783148389849856082022568293167632756141683387239976965556361388841724671626126739018166030880694163696059885526117262593497371188378928347635414183929557346494599644630683590871786268176289850087318290201352857623135751213424474853608268686891424007266607355414246559239807215653425558748344998963025781144359714295079696103535113176215501601505987549479309480283446404847752837233734264069160327507372475643877138199113188636275011271667091248626273397897221298509316928568061276237514422876686929839567333998767231486309652807967677665700422078541287553752043836662884653603501847456364407145386154993987069503117026766228428670637890977575823596288644161439657163406758094377717727364569485760813880039262290830636101991528110945806887309879563510526622313055909258508441457194298546592996542429352578471966453140600425163986006775121098079025354590884524420368874661817212582801451954428659273291324998654055709215988103707242216581397362341184637046682838622339973327685277150581906969466095757754861734021488474137221533474166878104069676472555089487566217767176171 [9089]

9661440270072484212076259097568548284856632826426110776245276978417737521379237195992466418873378285144853986008819263194519295795429778141080927017747688700978203041138713203624480565123287833490529216302217919018128102536534052078269710325960803707014497374586233330185561496771828071019132191644141412929965130405750309720025757171815147026490130772057575469911961032772545983478926603017141415290921048075494380074305211691709496810759837669942343463747628278577913543529042093266416313792812225225607474486020940791745185717392886565330119965612478591367862090140621847264369561956611129909545422296883566691383940746455902537401279602310506362352122188177843482454224897417678848002716209644961632617204923279468749976141319151805578094662931822514772391126011894308158837763332602267989752301199585516018641423029929796783048892171169421935096207952891977310109912681215221397062438850013713045248161601501825968595834250228766460958623843912399051245740991144233981607217762004431709097778178055863973404829467649289110547723716042582506687711515019798446614745785216653350518454444889635624193584220254948044466742188573606076162816411572296813120946658933936709186174296839487803699950002076716464237667030201205529907306120754904960676627963445005017836808370717674574203160234261702610015027567791519578068994601896185413929507289151985686685892281347392667661482896748299577217037776270591507599377466898321781639284160154747006656662245166374446786434706353500025678774886964484065096198533616779823500267276609827190161533778590904435365250053789632455601417329361172968797148081420064717880929442131409421392175798595225134041025184444142949693479304747544609038258880344333270782923204680110238086573047027187271068692126943551937715170917725123611392762333767666938961984048041038821593147740236369052109062697124121117613591236633261514292818357810930397623750341022297769667887031792704881119286518256731922162516297261130883605074315091634619080954231270401478514903915827284005661378569702059441981330227444990434 7 [9741]

2743263913193690695619983888611873536834697454585930051841650820180120955780036085365327117732471733136323901647246518502458906930822499920422590289260771355650523568343228147800708318971853040263573306886368523500736525707993321743812124936834875044347461957897673918274409523073096844349807520521151171948744290024288751941631213549808365306711583573144518671870773256055343946836136453176940530490543270480676400210308836639407554299000298046491085248713435024610519882847161108867199365862807206838744779175136589373387908827400919721287753960881020319841737041471136469843651434701970003191997977688849743214824222579589891768022618830936242515134414314973816038658203868098613119185767682830224969680912476619148525186263684752652967907033240638367697592465719435622517860669440540985993070067603711255317614222461222301308992870979410219149070942406184718117211920584926761154221695780750155717780873510487170871960819656251467538438666096908365114402965015645260161025775513520356911855743948289791236552577832151190742914153876957867833468366688567841672709112604575209038755298438147816799047507666794373480586232312992138385778208780450239744818080943539519182576606285319095371915478125740915367959306906665237317349904420196111145072837558320324437943473062462427423157240220301315222089728377277553352262995548280135130419782063933984902367790389377847112554635638276628388894478038146981884754006544792642455374892336774722300300283764633267836680359245094853860238649188353482665678827853533181513185320842223439030283120154526978549545542901061998900166372913235556827204411906590695878172803552343684909849237950766743594713623714225050616278193681682735686961798798282960530620478400225688431177392742285429209965141384411269804781367143766278916588271161347470500130867591658081175798366902381520075245788169961387610063939167186487908904149319401761726628380795823392995210296759074790201622689835565844245933200975087239099302678616865715259383918787343749005362019935393507221265804316987671161173570753127215736612948901754380066793516692060910493577124424

24840654077975990129683125499320466331304234650233451852177878675655904167452364931427077 [10370]

1086880392547679963201164275078706322312997483023999831212561411
1730132182140816321334150346336257638456347262340394481852343511
0579203930922502013731532739511756505262725876990663609766562722
8713813941401114325430834568395622545036654842508556513429719911
7691463389153035824057875307335534815696299048658756185131189111
5062902653780266373528815758830761742484046377399762012054175933
7551081483735259307401334507999459851089617757808734050057012355
0388859725926205353444030561788396765353532884365126595254706877
3551446737816187972885767959779205956374350838053441395152718922
7154157065636864815560759154938569265031671433937850786733151777
0275941047353308601875725033583117279900618248461885287738705322
8530523174181911500155848102372328858483315991725467694677475655
8411401018866090344631051938138527175777568136318974457131341488
9319553542655363669300779247577818356670867164749631334692452522
2711552773378319320596099063629937275425282088139429097526893155
9231827689695030783535511142025410782342840523077816074705051566
1345081183112721195170665822609841967995785504381097488424399344
0390239937483604540686146193919957664534572395997780108627170677
3537682287315850095339138415115694715211337590917161081168842422
0786466004195836875200078509879594168823632641266339885275606900
6319595673641674222161228931173995843905112867162605872348345022
1532109352892007494500559959195530189846772296779441586660700222
9330192108213294924128952215003018916170520298589436562161670099
5936952249241711638519703461510681748291338558624481334435099222
3580841738863327569309156262643855328976242083885190600047462622
7223273415054491359202572722356993186086311262330263348592450066
8275154655766383958474792667166664558045635972099137424779274111
1831120325738127047988367624724608212747672282554176958514493244
4565551358408353303640852479494068890582550473211002977931986044
6543525665312382995835988804220493851279955271214065611769781033
5888893584454952917803172386781264696749523073383659210200689322
4441209740436786134748609675368312639873211192097253224202373877
0714296142530042133782200324623679324420922742546318495409018999
2618874950636923064898034646064415664008121165239192214798235488

603944236353464714213211613374809550326038296829615015168697009
717629697026257295555653200453990172239396450790667854728164449
662151793916182534000764064955971493769959927536749241091664134
381362090797637016857013280395324120195824527293730917683430919
076989779784938599313515565647695830064452368494710257976524835
347024823566156558332589401328203422892469174016485169803951795
213862861902480628963600499634170665539199838635817436531240020
552686192607669585729601064145491199674839204325218330164211619
658202136158655153639574851712834074843468124986135300218751984
293777164425095109922993400217766630501634748349859322997138224
791461269550374359769851976358015725344918125731377949214905559
709955837079122615444822307765807542388664252789503206064078093
696708091255111041441441331284400726352329212638867950992973201
700421989592589819314561636501393714882630023786845807135992271
010272269065665698454295553764170092605348329821641962950391555
020875173158415179328550809146417191004994960678000359142220770
353435326984160961841089063345937772860423291925158700332963271
425637843221023097186785975779791289296041381588351222884787491
914736285573656521580178201946494113594906135973609049211001282
754731048420696753418631235713785873214525625644011925287224323
404239042357000672040602147777217380084849164569841247129560615
520052563733174803517879524015186604961339390757646703021509181
948746104102632526234944334751084659905693954097178435031994985
082614847495058027027731771981982744477366584882072579293652155
391778236325872658641001864278070532862114615751895639115159350
103897102346659886270242671499717446606330732742203667596278454
43143803745057964109229605137 [18225]

D. Números primos da seqüência generalizada com $k=2$, $G_1=3$ e $G_2=7$.

Estes são os números primos encontrados nos 20000 primeiros números da seqüência generalizada com $k=2$, $G_1=3$ e $G_2=7$. A leitura deve ser feita da seguinte maneira:

Número primo [*índice do número dentro da seqüência Generalizada*]

Note que: 3 [1], 7 [2] e assim por diante.

3 [1]

7 [2]

17 [4]

71 [7]

487 [11]

2063 [14]

37019 [20]

50493943 [35]

41260527855741160523 [92]

1938366527876006421329 [100]

2009737183245447935956 01057 [124]

605001031984641855792188397354823 [155]

2019813006309826990283666659593427360780 7 [191]

328451085456914926957040328292378421592459839693330 1439 [259]

41007452847907810409557906231373374657787095293018940727223321 7
956674890174190068978154935541144831 [470]

15182945896393405505697072172655969155537866246589712830316392 5
79324314076722236271640164101645510256836248 7 [511]

11598897309704115485605333834199429114027292623505863026975922 4
2384545898010775468946141896218812097926609112483938638495591
[587]

12207753733358316881146390721956537674110465441991738237967345 6
14347395426837969849186565174248113117051256233217372556184068 0
637363496458730215030726855471969927339358763 [812]

18559251689079406272455085283128092517376350650925219673800824 1
54604069574555169928299922563070639379714193769054266861967333 4
00653712539311369221751173498021781182713525179095834209732459 9
[899]

14287779407385717746488231462536833805843856171887880924643847 3
18773460467442599521166083679242593752715626710925024570559962 7
81365503453468419973224687585226162364193329293838674333824973 0
71226515755871716649667497931431963930019852845617400922589753 5
35644769449040397252887069410975733721019141732565736001920003 2
48745491658276437483698133627265280377237771517839636304898336 5
7379191721937873921855260333891599126299 9 [1999]

1126047899143725020555725181928077887781747356152441802927972317991632262196628357882268741079868408083612410110821580682715079479659866238536018935009043257913389391976001960632570517303493079398619042732399972632516830256185116198424901647088064562079868619747468368038939255094792138990460640676436632951198743125930862750997771500253436373289902764458853384468855656864579770441925608255620765128853372558636536041852977753 [2032]

1651118336217063673928674310934968956306554855866003426329524438102092438428902781720705064736053832479315468676664585684429580573694755565643306299814844278637650232274989660344030725574581614624793797095701613095903016981030530152827894014981290302664214127743867358833243360151383700475612784766175295035366322865081861852815216016534351268594295032699694724585931738758066770233735435517159850848324340029777066458672276061739745415383
[2095]

676409150917030297807008847481050855147309008297359648170408783550594207202670714427543373109754728131446155508711263054450652629362025024541914650176050352376147559136634776753895537190042238315369295473552922573001030610558496432725312353027756493141542075712288285733250821002836954121345295556157862546079425019748382372156381412061154650289608621054491823912305793996758110266831725870907297712299625354975692887851687845162438847921877711172936566471524057507508437557940959618479735211057179537426264471872868401155541378864500644152907994609534288464783897365394029306610146827566668921516332431536134068551090130850227238
8967 [3031]

8268255556155071381371107862831927839714312994225925179109638452246249487980413295184738909908413448393127700458717392389068339283978234368115822948858465364081573112884408525014711501850832963248252373347266000868153368415432672827493381050262773189180111501573422250932272995642542751829173065572207180357027520953975702385352811739272003731338792760033002901629655995182093810109156581194889802730134480353501096848373522258166837199417258217166770227993036456560897179720010052542968313388686860489634127199161859773589452641301181185701533219526242122364588516593657396640240974224786987513217148911669133358316494798181116522361951473931324360493539590227747277248316557973217831097166560139411099760430017479 [3419]

412456141219629204803380013376761207785859405416337752379439138812250582396463451135506100485509501151112998086374896855238984912337235683555153732975228672338807483319416231625397064356319867992607198197625428078739059134259271270684637540758907928200566567142278695618211156627621431194822320299043981042568436941363848652345701801781864607614121520706688331939841766090443742105715132935553909822393548233804307538136640294036455242548514245023558794780439028018309531844369152696431522080407456951679177145343719255747694893565686784493109626779850535672831390981151711087732937564127255317480558340140844631164696078942353096212862594911935642819841016763570234855693579325739592346477975797026786566821351779183656695379232516355654113252296552785435903906012269010586144294395747061346835603914672892489794089666354925067585289660060619656866014547724087075270908129276273597767 [4231]

6258551644510209850846989184212481843293941853295969958404050111430445880013725911446872323523088713073384224586586420764259986568491834822284245944122150122199316908999782088967447149730748530891078873780746662216477328001437770255321813241909563555063513740938969985032320199795012696888637045140454648297195013157317553324741779787561153456980461982395030580029718116008057024795915861967218643005839740979841460064866904945673605012354680164590942856247276385188905723880413265732217387759876217853751159336839930966980094434763415268750167043510899394345184747447987466699286089559563041469442841635713547088264342833793517610910077829344767353943366217256188658410829400725137322834598419060732903536872428332787127353975997183409439605045435365597823524582422680424846410152103049464862599731944772554493131999848249718177638200401826136723128559999699221509474993300443997411064777525146265495124646690561370856554887635224812955290842021821910735075763017992960029228632312906063784750365053120912655076967804338028083147698504546928878454609870914532630574589516781294232623260465036520809071007117908337576798269103134848290877299544678229197363410542500296842990345598076824460464650710657026072238072176907688957490666487038956548217182675258056759533263543464156555325316192964203606293224939939181110382385459212207651783404164558915415461519114753304698647260573192987714326660901920464269516501222110065407667109854818219611052734091278390381052735742851542 3 [7055]

2325315535795256776343942855940951686384030914471659539995931820751666856511483514997785682146099192418218915017826345636394267116357222929758765470806136153780843490331662351953614500805897427965077296600411873886467728064601487483725134619261799796124199458921080916926044972423681625054704380170226890385286001483920417876734657506878086553052255444273420349530448054464506625824589345365174937296811172626020766570644216456156668486730894629988304521199585294934457294290341278815771713987581227562864266977498733430900986865282413693610246891385086456468214147087512033119903558249515476647232511740638033235494612730202705575849883947620134786249704749405433784961674042551620694629135671976854686444493606021187887179504973778731867609680539888832998529205414686354571181818330643124347827063154069009890367881848129687180884322222844251764203299321526048000982641013700290237355966874118532131128729442941316505909509623353091072557561305512881618269216995653319449364371332763548990699538143858667829265951900989428235512874990705678998734304393255165695066752444243811074950407890407703301759550313161551125957181362796576971779056252937666515032824531614687312310638440572142621997530418922089095475922093974413859110746237489659837300967420880116519646674880210607922356114515764735116300915922839483232055272793458396588805201489244916785774383631700129564223954920376452810464259055980553292737489769529575492790412004398394887497475647134768915087633958452790484627721899189264950047818167204827081641370086952077013373766694100910357525284011615808712238100992202516196748871533563147699423383410312340749937076013967656277064723367139185666918041781897218165730453982955376105546869801761445617862468531712342257944790183750958007849117488918871542306195947318364439113092341853540905719216774056537413200640765513032906531948975020368803659860290938965101972551657102176023193000846331454486302802837292577177519207024434565619433601902435721243495394618140910726427749704610967108546661283189333141610368074938222564623131042268707554591939767300154948844497621454418359136158913605795208171584825484919603205444245989036882

0281083897044587705821993537165947811400401362772051533151576406680028523971668729281398643649852601730440631918596637853939434360219569780651815819096908896381405423235718639116845380767893759465049793230170136399195527919890634832045361227703918451594211205445040436968195183422462267403657003719807480926803263 1

[11747]

E. Números primos da seqüência generalizada com $k = 3$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ e $G_3 = 3$.

Estes são os números primos encontrados nos 19000 primeiros números da seqüência generalizada com $k = 3$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ e $G_3 = 3$. A leitura deve ser feita da seguinte maneira:

Número primo [*índice do número dentro da seqüência Generalizada*]

Note que: 1 [1], 2 [2], 3 [3] e assim por diante.

2 [2]

3 [3]

11 [5]

37 [7]

634061 [23]

7256527 [27]

1424681173049 [47]

123937002926372177911 [77]

1162645445259645761067186771261917789886280958272456912271142219571728
7525967039283737539228103088521392368347570190349402916473361073627530
4212849107570128456636811335313319095073179198057393971950178645856131
0952745946289738183796905255353904345218364364154709232727416673908288
6102458107761785566403040655482190296897713990172972514186473587602953
8303615510053640582984188419440219927784134064038384956008172207640820
4585031 [1611]

1515943909415591092192401065006903636103894228268727461759652020730696
5248864554972754888112747365859582160039751707662881578938344579281598
3433477896770738654273238303863272350320765790631220557835533509821287
7857893665506519564029397007553551652251297871575339899703348881482383
0655969181723633453947738752305137853484962448149339517327799321643908
2445963402616612445924330166534453886172538771456032926351007024033322
7758134169708190978141956781156301642490134798979403193964128010630895
7160783567844996223632108708464882819293900983109687436422847110972303
1728525670452872411788405016843534113561983023975555957836948497515751
0858050052346897703285350066556969808218493546106029869499931893929601
5606469533124842805086138040156917385516977838908397077234852641009113
3065928024012747697108012501653850860449771508345254987479556750690434
9907590044846418339543264220547866301138222175444099391754315346787450
3985873899978881389498891775361656569745849814664169841315655243323541 8
6820661690855796636722353546150919489585050141091574999260020834573733
3868287147379105531228953133718432732683738097890963631139263035995343
9116708726322917051890760276238657015339002302647400542192009142158567
1429939580039181587746565748226915217610904710499972336253559747677549
5675472902902060030486058956184057523383461235524371452999070634738135
8766606985847162608794967980406625078302920009151335302024875141680861
0919994230075813706954238926514818711786506753073536140178577057959288
7886282478410113889251732105729097570599938700737230822621764863322134
2559752982629282020008278088092238826590771722547921761090585827474266
2952689487111384628647769744720935081875864918002664200031261312976616
1119296754116324590544457141302067871388168948689337030899588022420590
0397743303502453236235153997589037199635084154594147207862510250259687
0036481954738784715791135710821605106166679165375950666230725450046229
9823000814116555793706962612010795234583181570923410027111609197529572
9453896258983191232277817028624794822455940654179942152623972833674099
9307455873876741136860873060625568929396482089345515060722164535225766
8670220982894808697485656911890877317363690043861538155205814437040242
0732382795665848649717313038166188441300652009991921695743060101443810
3466189704402468891377461013014024972445808306178736296207689280212781
4004162050425969698818202804071939669406066783879141753011717076608662

2760132288264025106495102538131988406706487352141805483030787498500106
7431731580028409376666715882919637030353804615865178726888635029576153
9692798391787412104764417200754241652204923735763763676137864895817707
5892208285789186341692492561323752478574346690182455847867868162006543
8416060857893865676279523252132696936525293675818981092795394218256903
0581400077272831253294675629058593139855743919432395419687657213525577
9296554283821902703812133409327145937873131601455555416470862483909322
5070354817035146131996200831799735039481833807477127077684384696720421
7526040020076782186185492759099435177087793090571150254165039210397837
7876671659836222927572186762816888964449858105977585940212773544907415
8256819491513955075468173153782102459244411995524840810010201076864259
0656801357717468674232358036038368465198307927413667052655953571147089
1095554288286676049418203966849867364295890257046580240852927954325779
6617407734992414916546548333942223130989239271717667942672137209898030
3869780018174884250448347521388829313732743262902348000584427954600158
2160523370992703487177895875948975871562136099782178126284656640899754
9355902931663108887441136943317939486997722932344664078637665056824424
2746932156093166500928480606382519461386404780086205850291495001567461
2470552938347943814859033297664831868075711204862410851781097130177904
8943250532816445408832917775998003852788414511340342981813784744394776
7359912451070704166263784902251916049116843867604307745253274743448689
2767099445675367822189331124658582700715799597090701518043402639424741
4376880538909307051869925881826167734574343536585714639725780775906601
5701592421510977277495860396994931 [15203]

F. Números primos da seqüência generalizada com $k = 4$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 3$ e $G_4 = 4$.

Estes são os números primos encontrados nos 19000 primeiros números da seqüência generalizada com $k = 4$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 3$ e $G_4 = 4$. A leitura deve ser feita da seguinte maneira:

Número primo [*índice do número dentro da seqüência Generalizada*]

Note que: 1 [1], 2 [2], 3 [3], 4 [4] e assim por diante.

2 [2]

3 [3]

19 [6]

1847 [13]

12354163586573353 [58]

62650119569526184337 [71]

1045587180235646638890118089975878747615648535017592579451262223184344
26265127889832968878593353366883 71 [363]

7403613774828869237263279089772518975188365524832488189682507197794613
311956933550612493365051696458728551 [373]

4732093762031137349046962861873167000934715341064637895418713674664427
553541051438862001782444505379558614178991675182440556851 [446]

969565222449415061132602462454826356647458548979248375848974813990351804868292365162258128801495096370118668738353727441279662259885213477252497111917974021320589708839674417730004663429125766916286272384192616735144882442233472213700739284632686690668296003423832217681440759164826477610614125295742092841448072428457839165609557595065289041145518914088135887936342970221969358095489112000281070278219535828491981553191323870821502250226359255122464262006094568250985054463868622635061406220628618217223431862408143133 1 [1826]

12937624570130351616115289654582502218984362577893602219841638203196876301870892588715432943178419532362283333558500580038744671095591780644139416574434526236242770589199200961313530278922611926070356451433660385463600923726783342919858865755744554424517956008350968733142213122009093102927330469801794299573051724711662867960399399783396640544308595294653241818194506266861754856571502467296710367048591833422969024122967085547524426436237002198943465427757342741416146792908343418917580425073812983824583653528714932639928464327163118184402025986780955753002452113932844054220644839589185071848002100336891145850353366295060332597609940436481217110150273958350138094749220585964195960411774538715497 [2458]