Processo de Ramificação Aplicado à Extinção de um Sobrenome

Fabiana Tristão de Santana
Faculdade Câmara Cascudo
59030-350,Natal, RN
fabianatristão@fcamaracascudo.com.br

Resumo: Neste trabalho, estudamos os resultados obtidos por Watson e Steffensen, os quais relacionam funções geradoras de probabilidades e esperança de variáveis aleatórias para se estimar a probabilidade de extinção do sobrenome de uma família. Além disso, apresentamos uma aplicação ao problema de extinção com algumas hipóteses pré-definidas.

Palavras-chave: Probabilidade de extinção, geradora de probabilidade, processo de ramificação.

Introdução

Seja $\{X(t): t \in T\} = \{X_t, t = 0,1,2,\cdots\}$ um processo estocástico a tempo discreto onde $t \in T$ é finito. O conjunto dos valores possíveis assumidos pelas variáveis aleatórias X_t no tempo $t \in T$ é chamado espaço de estados.

Processo de Markov ou cadeias de Markov é um caso particular de processos estocásticos que apresenta a propriedade de Markov, chamada assim em homenagem ao matemático Andrei Andreyevich Markov.

A propriedade $P(X(n+1) \mid X(0),\ X(1),\ \cdots, X(n))$ $= P(X(n+1) \mid X(n)) = P(X_{n+1} \mid X_n)$, conhecida por propriedade de Markov, também chamada de memória markoviana, mostra que o estado atual é suficiente para se tirar conclusões sobre o estado seguinte e que os estados anteriores são irrelevantes.

Neste trabalho vamos estudar um caso particular de cadeia de Markov, introduzida por Bienayme em 1845 e posteriormente formalizada por Galton e Watson chamada de processos de ramificação. Os estudos se iniciaram devido a um problema interessante relacionado à conservação do nome de uma família. Levando em consideração que o nome se transmite através dos filhos do sexo masculino, investiga-se probabilidade do número de descendentes do sexo masculino da n-ésima geração de uma família ser igual a zero. Hoje podemos encontrar várias aplicações deste estudo em diversas áreas tais como Física e Biologia.

Consideraremos uma população de indivíduos ou organismos vivos, onde X_n representa o tamanho da população do sexo masculino no tempo n e ξ_n o número de descendentes do sexo masculino de cada indivíduo da n-ésima geração. Determinaremos com que probabilidade a população se extingue, isto é, vamos estudar a existência da probabilidade $P(X_n = 0$ para algum $n)$.

Para analisar as possibilidades de uma família ou seu sobrenome se extinguir basta analisar o que acontece com os descendentes da população. A função geradora de probabilidades é muito importante para desenvolver este estudo e Watson, em seu teorema, mostra a existência da distribuição de probabilidade para a variável aleatória X_n conhecendo as funções geradoras de probabilidade das variáveis aleatórias ξ_n, que representam o número de descendentes de cada individua da n-ésima geração.

Com os resultados obtidos, Watson e Steffensen passam a investigar a probabilidade de extinção levando em consideração que nunca haverá extinção se a probabilidade de um indivíduo não gerar descendentes for nula. Assim, considerando $0 < p_0 < 1$ e algumas iterações utilizando a relação $\varphi_{n+m}(s) = \varphi_n(\varphi_m(s))$, do teorema de Watson, eles mostram que a probabilidade de extinção pode ser previamente analisada através da esperança de X_n além de ser a menor solução positiva da equação $\varphi(s) = s$, onde φ é a função geradora de probabilidade de ξ_n.

Processos de Ramificação

Considere o processo estocástico $\{X_n\}$ onde X_n é o tamanho da população de indivíduos do sexo masculino da n-ésima geração de uma família e cada organismo em seu tempo de vida produz um número aleatório ξ_i de descendentes do

sexo masculino. As variáveis aleatórias ξ_i são independentes com distribuição de probabilidade dada por

$$p_k = P(\xi_i = k) \qquad (2.1)$$

$k = 0,1,2,\cdots$ onde $p_k \geq 0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Assumimos que todos os descendentes são independentes e até o fim de seus tempos de vida (por simplicidade, assumiremos que o tempo de vida de todo organismo é o mesmo) tenham descendentes individualmente de acordo com a distribuição de probabilidade (2.1), assim multiplicando sua espécie.

Propriedade 2.1 O processo estocástico $\{X_n\}$, onde X_n é o tamanho da população da n-ésima geração é uma Cadeia de Markov.

De fato, considerando as distribuições de $X_{n_1}, X_{n_2}, \cdots X_{n_r}, X_n, \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_r < n$ o único conhecimento relevante é o conhecimento da última população contada, desde que o número de descendentes é uma função meramente do tamanho da população presente.

A matriz de transição é dada por

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \\ &= P\{\xi_1 + \cdots + \xi_i = j\} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Isto é, na n-ésima geração os i indivíduos independentes produzem o número de descendentes $\{\xi_k\}_{k=1}^{i}$ e então o tamanho da população de indivíduos do sexo masculino na n-ésima geração é $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i$.

Definição 2.1 Seja ξ_n, $n \geq 1$, uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com valores em $S = \{0,1,2,\cdots\}$ e distribuição comum dada por $p_k = P(\xi_r = k)$, $K \geq 0$. Uma Cadeia de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ é chamada Processos de Ramificação com espaço de estados S se as probabilidades de transição são dadas por $p(x,y) = P\{X_n = y \mid X_{n-1} = x\}$ $= P\{\xi_1 + \cdots + \xi_x = y\}$, para $x \geq 1$, $y \geq 0$ e $p(0,0) = P\{X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0\} = 1$.

Função Geratriz e o Teorema de Watson

Considere o processo estocástico $\{X_n\}$ onde X_n é o tamanho da população da n-ésima geração de uma família. Estabelecemos algumas relações para a função geratriz de probabilidade da variável aleatória X_n.

Suponha que a população inicial consiste de um indivíduo, isto é, $X_0 = 1$. Para $n = 0,1,2,\cdots$ podemos escrever $X_{n+1} = \sum_{r=1}^{X_n} \xi_r$, onde ξ_r $(r \geq 1)$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, que representam o número de descendentes de um indivíduo, com distribuição dada por $P(\xi_r = k) = p_k$, $k = 0,1,2,\cdots$ e $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Defina a função geradora de probabilidade $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ e $\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) s^k$, para $n = 0,1,2,\cdots$. Assumimos $\varphi_0(s) \equiv s$ e $\varphi_1(s) = \varphi(s)$.

Além disso,

$$\varphi_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = k\} s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = k \mid X_n = j\} P\{X_n = j\} s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_n = j\} P\{\xi_1 + \cdots + \xi_j = k\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_n = j\} \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi_1 + \cdots + \xi_j = k\} s^k$$

Como ξ_r, $r = 1,2,\cdots,j$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função geratriz comum $\varphi(s)$, a soma $\xi_1 + \cdots + \xi_j$ tem função geratriz de probabilidade dada por $(\varphi(s))^j$.

Então,

$$\varphi_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_n = j\} (\varphi(s))^j.$$

Nesta equação, o lado direito é a função geradora de probabilidade de X_n (tamanho da população do

sexo masculino da n-ésima geração) avaliada em $\varphi(s)$, que é a função geradora de probabilidade de ξ_r (número de descendentes do sexo masculino de cada indivíduo da n-ésima geração). Assim, conclui-se que $\varphi_{n+1}(s)=\varphi_n(\varphi_1(s))=\varphi_n(\varphi(s))$.

Desta relação, segue que

$$\varphi_{n+1}(s)=\varphi_n(\varphi(s))=\varphi_{n-1}(\varphi(\varphi(s)))$$
$$=\varphi_{n-1}(\varphi_2(s))=\varphi_{n-2}(\varphi_2(\varphi(s)))=\varphi_{n-2}(\varphi_3(s))$$

Por indução, para algum $k=0,1,\cdots,n$, temos $\varphi_{n+1}(s)=\varphi_{n-k}(\varphi_{k+1}(s))$.

Em particular, com $k=n-1$, $\varphi_{n+1}(s)=\varphi(\varphi_n(s))$.

Portanto, dada uma função geratriz $\varphi(s)$, pelo Teorema de Kolmogorov, existe uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\xi_1,\xi_2,\cdots$ com a função geratriz φ, onde $X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}\xi_i$, tal que

$$\varphi_{n+1}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X_{n+1}=k\}s^k=\varphi(\varphi_n(s))$$ e

podemos concluir que $\varphi_n(s)$ é função geradora de probabilidade das variáveis aleatórias X_n, $n\geq 0$.

Com isto mostramos o seguinte teorema

Teorema 3.1 (Watson) Seja $\varphi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$, $|s|\leq 1$, a função geratriz de probabilidade de ξ_1 e defina, indutivamente $\varphi_0(s)=s,\ \ \varphi_1(s)=s,\ \ \varphi_n(s)=\varphi(\varphi_{n-1}(s))$ para $n\geq 1$. Então, $\varphi_n(s)$ é a função geratriz de X_n, $n\geq 0$.

Por iteração é possível mostrar que $\varphi_{n+m}(s)=\varphi_n(\varphi_m(s))$. Em particular tem-se $\varphi_{n+1}(s)=\varphi_n(\varphi(s))$.

Probabilidade de Extinção

Com o resultado obtido por Watson no teorema 3.1, Watson e Steffensen passam a investigar a probabilidade de extinção levando em consideração que nunca haverá extinção se a probabilidade de um indivíduo não gerar descendentes for nula e fazendo iterações com a relação $\varphi_{n+m}(s)=\varphi_n(\varphi_m(s))$.

Para determinaremos com que probabilidade a população se extingue vamos estudar a existência da probabilidade $P(X_n=0$ para algum n) e adiantar que sempre que $X_n=0$ teremos $X_k=0$, para $k>n$.

Nunca haverá extinção se a probabilidade de um indivíduo não gerar descendentes for nula, ou seja, $p_0=P(X_n=0$ para algum n) = 0. Assim, para analisar a probabilidade de extinção, vamos considerar $0<p_0<1$.

Defina q_n como a probabilidade de extinção da n-ésima geração da população. Como 0 é um estado absorvente, temos

$$q_n=P\left\{\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=0\}\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\{X_k=0\}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}P\{X_n=0\}=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(0).$$

Como $\varphi_{n+1}(s)=\varphi(\varphi_n(s))$, segue que

$$q_{n+1}=\varphi_{n+1}(0)=\varphi(\varphi_n(0))=\varphi(q_n) \quad (4.1)$$

A função geradora de momentos $\varphi(s)$ é uma função estritamente crescente, pois é uma série de potência com coeficientes não negativos e $0<p_0<1$, e

$q_1=\varphi_1(0)=p_0>0$ e

$q_2=\varphi(\varphi_1(0))=\varphi(q_1)>\varphi(0)=q_1$.

Assumindo que $q_n>q_{n-1}$, segue que, $q_{n+1}=\varphi(q_n)>\varphi(q_{n-1})=q_n$.

Indutivamente, isto mostra que a seqüência $q_1,\cdots,q_n,\cdots$ é crescente e limitada superiormente por 1. Portanto, existe o limite $\lim_{n\to\infty}q_n=\pi$ existe onde $0<\pi<1$.

Como $\varphi(s)$ é contínua, para $0\leq s\leq 1$, passando ao limite para $n\to\infty$ na expressão (4.1), obtemos $\pi=\varphi(\pi)$ e concluímos que π é a probabilidade da eventual extinção e uma solução para a equação $\varphi(s)=s$ (4.2)

Afirmamos que π é a menor solução possível de (4.2). De fato, seja s_0 uma outra solução positiva de (4.2). Então $q_1=\varphi(0)<\varphi(s_0)=s_0$. Assumindo que $q_n<s_0$, segue de (4.1) que

$q_{n+1} = \varphi(q_n) < \varphi(s_0) = s_0$. Assim, por indução, deduzimos que $q_n < s_0$, para todo n e consequentemente $\pi = \lim_{n\to\infty} q_n \le s_0$, ou seja, π é a menor solução positiva para (4.2), concluindo a afirmação feita.

Temos como objetivo, neste momento, determinar pontos fixos para $\varphi(s)$. Para isso usaremos o conceito de função convexa, dado abaixo.

Definição 4.1 Uma função $\varphi : I \to R$ é convexa se para $a < x < b$, arbitrários em I, o ponto $(x, \varphi(x))$, do gráfico de φ está situado abaixo da secante que liga os pontos $(a, \varphi(a))$ e $(b, \varphi(b))$.

Como $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, podemos escrever

$$p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} p_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} p_k = 1 - (p_0 + p_1)$$

$$\Rightarrow \varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k > 0,$$ pois estamos assumindo $p_0 + p_1 < 1$. Assim, podemos concluir que φ é uma função convexa em $0 < s \le 1$ e seu gráfico pode interceptar a reta de 45^0 no máximo em 2 pontos . Como $\varphi(1) = 1$ podemos afirmar que $s = 1$ é um ponto de interseção. Neste ponto, vamos analisar a inclinação da reta tangente ao gráfico de φ.

Se $m = \varphi'(1) > 1$ a inclinação da reta tangente ao gráfico de φ em $s = 1$ excede 1 e o gráfico de φ intercepta a reta de 45^0 em $s < 1$, como mostra a figura 1. Neste caso $0 < \pi < 1$.

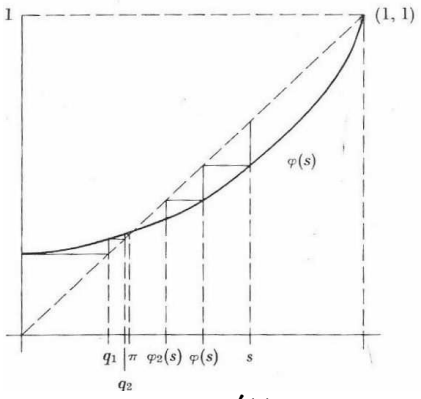

Figura 1: $m = \varphi'(1) > 1$

Se $m = \varphi'(1) \le 1$ a inclinação da reta tangente ao gráfico de φ em $s = 1$ é menor ou igual a 1 e o gráfico só intercepta a reta de 45^0 em $s = 1$, como mostra a figura 2. Neste caso $\pi = 1$.

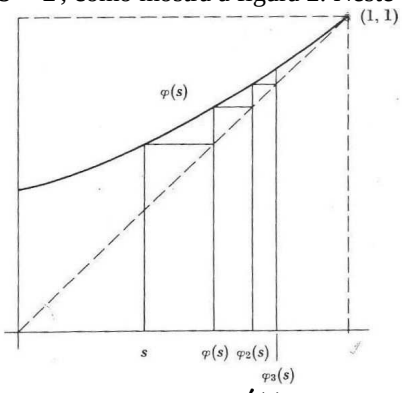

Figura 2: $m = \varphi'(1) \le 1$

Com isso, fica provado o importante teorema de Watson e Steffensen.

Teorema (H. Watson, J. Steffensen) Se $m = EX_1 \le 1$, então $q = 1$. Se $m > 1$, então q é a única solução não negativa em [0,1) de $\varphi(s) = s$.

Utilizaremos os resultados obtidos em uma aplicação prática para calcular a probabilidade de extinção de um processo de ramificação, supondo pré-definidas algumas probabilidades.

Exemplo 4.1 Considere um processo de ramificação $\{X_n\}$, $n \ge 0$ onde $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{16}$, $p_k = \frac{1}{16}$ e $p_k = 0$ para $k \ge 4$. Encontre a probabilidade de extinção definida por π.

Solução:

Primeiro vamos calcular a esperança da variável aleatória X_n para verificarmos como se comporta a probabilidade de extinção. Temos

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} + k \cdot 0.$$

$$= \frac{17}{16} > 1$$

Com isso, podemos concluir que a probabilidade de extinção é menor que 1 e consequentemente é dada pelo ponto fixo da equação $\varphi(s) = s$.

Agora,

$$\varphi(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot s+\frac{3}{16}\cdot s^2+\frac{1}{16}\cdot s^3 \cdot$$

Fazendo $\varphi(s)=s$, segue que

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot s+\frac{3}{16}\cdot s^2+\frac{1}{16}\cdot s^3 = s$$

$$\Rightarrow \frac{4+8s+3s^2+s^3}{16}=\frac{16s}{16}$$

$$\Rightarrow s^3+3s^2-8s+4=0$$

$$\Rightarrow (s-1)\left(s+2-2\sqrt{2}\right)\left(s+2+2\sqrt{2}\right)=0.$$

Como a probabilidade de extinção é o menor valor positivo que satisfaz $\varphi(s)=s$, concluímos que $\pi=-2+2\sqrt{2}$.

Exemplo 4.2 Seja $\varphi(s)=\left(as^2+bs+c\right)$ com $a>0,\ b>0,\ c>0$ e $\varphi(1)=1$. Mostre que a probabilidade de extinção é $\pi=c/a$, onde $0<\pi<1$.

Solução:

Como $0<\pi<1$, determinaremos o ponto fixo da equação $\varphi(s)=s$.

Temos, $as^2+bs+c=s$

$$\Rightarrow as^2+s(b-1)+c=0 \qquad (4.3)$$

Como $\varphi(1)=1 \Rightarrow c=1-a-b$

e de (4.3) temos

$$(s-1)\left(as+(a+b-1)\right)=0.$$

Dividindo a equação (4.3) por $s-1$ obtemos quociente $as+b+a-1$ e resto $r=a+b=c-1=0$, pois $c=1-a-b$.

Logo, as soluções de $\varphi(s)=s$ são $s=1$ e $s=\dfrac{a+b-1}{-a}=\dfrac{-(1-a-b)}{-a}=\dfrac{c}{a}$.Como a probabilidade de extinção é a menor solução positiva de $\varphi(s)=s$, podemos concluir que $\pi=\dfrac{c}{a}$.

Referências

JAMES, Barry R. Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário. 2 ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2002.

KARLIN, S. A. First Course in Stochastic Processes. Academic Press. New York, 1966.

KANNAN, D. An Introduction to Stochastic Processes. Elsevier North Holland, Inc, 1979.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. V 1. 11 ed. Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2004.