VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Circuitos removíveis em grafos

José Laudelino Menezes Neto

Depto. de Matemática, UFPB

58059-900, João Pessoa, PB

E-mail: laudelino7@gmail.com

Resumo

Descreve-se o Teorema de Lemos e Oxley (1999), o qual garante que, sobre certas condições, ao remover arestas de um circuito de um grafo 2-conexo, o mesmo continua 2-conexo. O comprimento do circuito removido pode ser maior do que o que é estipulado no Teorema de Jackson (1985).

Este resultado pode ser utilizado em redes de computadores com o intuito de minimizar o número de conexões e, mesmo assim, manter quaisquer dois computadores conectados por duas conexões independentes.

Palavras-chave

Grafo. Circuito. 2-conexo.

Introdução

Em redes de computadores, temos vários computadores interligados entre si por meio de cabos, seria interessante mantermos estas ligações de tal forma que, caso ocorra uma interrupção na comunicação entre dois deles, exista uma rota alternativa para reestabelecer esta comunicação.

Esta mesma situação pode ser abordada no planejamento de uma cidade, onde cada bairro está conectado por meio de estradas. Digamos que na estrada que liga dois bairros exista uma ponte, caso ocorra um acidente e a ponte não possa ser utilizada, uma rota alternativa é necessária para manter o tráfego entre estes dois bairros.

Um problema que poderá surgir nestas situações são os custos para construirmos tais sistemas. Sendo assim, podemos representar estas situações por meio de grafos e utilizar os resultados desta teoria matemática para minimizar os custos. No nosso caso, o Teorema de Lemos e Oxley irá garantir a existência de conexões que poderiam ser retiradas sem afetar a propriedade de que dois computadores fiquem interligados por, pelo menos, duas conexões independentes e dois bairros fiquem conectados por, pelo menos, duas estradas que não se interceptam.

Antes de falarmos do referido Teorema, bem como de resultados que o antecederam, vamos a algumas explicações pertinentes.

O que é um grafo?

Um *grafo* G é um par de conjuntos $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito e $E(G)$ é um conjunto composto de pares não-ordenados de elementos distintos de $V(G)$. Chamamos $V(G)$ de conjunto de *vértices* do grafo G e $E(G)$ de conjunto de *arestas* do grafo G.

Podemos representar um grafo por uma figura. Seja G_1 um grafo com conjunto de vértices $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e conjunto de arestas $E(G_1)$ composto pelos elementos $v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_6, v_4v_5$ e v_5v_6, a Figura 1 é uma representação para o grafo G_1.

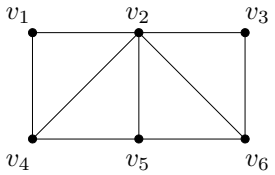

Figura 1: Grafo G_1.

Entendemos por *subgrafo* de um grafo G, como sendo um grafo $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. O grafo H_1 com conjunto de vértices $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_5\} \subset V(G_1)$ e conjunto de arestas $E(H_1) = \{v_2v_5\} \subset E(G_1)$ é um subgrafo do grafo G_1.

Em um grafo G, o *grau* de um vértice v, $d_G(v)$, é a quantidade de arestas incidentes neste vértice. No grafo G_1, o vértice v_1 tem grau dois, $d_{G_1}(v_1) = 2$, pois existem duas arestas incidentes a este vértice, as arestas v_1v_2 e v_1v_4.

Caminhos, circuitos e conexidade

Um *caminho* em um grafo é uma sequência de vértices tal que cada dois vértices em sequência devem estar conectados por uma aresta. Um caminho pode ser visto como um tipo especial de subgrafo. O grafo C_1 com $V(C_1) = \{v_1, v_2, v_4\}$ e $E(C_1) = \{v_1v_4, v_1v_2\}$ é um caminho no grafo G_1, representamos C_1 pela sequência de vértices $v_2v_1v_4$. O *comprimento* de um caminho é a quantidade de arestas que o caminho possui. Portanto, C_1 é um caminho de comprimento 2, pois $E(C_1)$ é um conjunto com 2 elementos.

Se os vértices de um caminho forem todos distintos, com exceção dos vértices inicial e terminal, então chamamos o caminho de *circuito*. Em outras palavras, um circuito é um caminho fechado. O caminho C_2 com $V(C_2) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ e $E(C_2) = \{v_2v_3, v_3v_6, v_5v_6, v_2v_5\}$ é um circuito de comprimento 4 do grafo G_1. O caminho C_1 não é um circuito, pois possui v_2 como vértice inicial, v_4 como vértice terminal e $v_2 \neq v_4$.

Sejam G um grafo e C um circuito de G, G deleção C, em símbolos $G\backslash C$, é o subgrafo de G obtido a partir da deleção das arestas de C em G. Na Figura 2 temos G_1 deleção C_2.

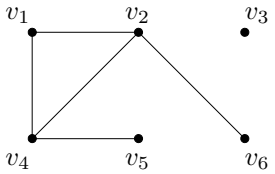

Figura 2: $G_1\backslash C_2$.

Um grafo G é *conexo* se para quaisquer dois de seus vértices existe um caminho que os liga. Podemos dizer que um grafo conexo é constituido de um único pedaço. O grafo G_1 é um exemplo de grafo conexo, já o subgrafo H_1 de G_1 não é um grafo conexo; no grafo H_1 não existe caminho ligando os vértices v_1 e v_5. Chamamos um grafo que não é conexo de *desconexo*. No caso, H_1 é um grafo desconexo. O grafo $G_1\backslash C_2$, apresentado na Figura 2, também é um exemplo de grafo desconexo.

Seja n um número inteiro positivo diferente de zero. Existe um tipo mais forte de conexidade chamado de n-conexidade. Dado um grafo conexo G, se é necessário retirar, no mínimo, n vértices para que este grafo se torne desconexo, então dizemos que G é um grafo *n-conexo*. Atentamos para o seguinte fato, quando retiramos um vértice de um grafo, também retiramos as arestas incidentes a este vértice. Se retirarmos os vértices v_2 e v_6 do grafo G_1, o grafo se torna desconexo, Figura 3, ou seja, o grafo G_1 é um exemplo de grafo 2-conexo. Mas, necessitamos tomar cuidado, porque não são quaisquer vértices que devem ser retirados para tornar um grafo desconexo. No caso de G_1, se retirarmos os vértices v_1 e v_3, G_1 sem v_1 e v_3 continua conexo.

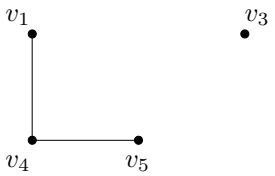

Figura 3: G_1 sem os vértices v_2 e v_6.

Uma outra observação a ser feita sobre 2-conexidade é que dados dois vértices quaisquer em um grafo 2-conexo, existem dois caminhos disjuntos ligando estes dois vértices. Esta é a propriedade que tem relação com as situações descritas na Introdução.

Circuitos removíveis

Um dos primeiros teoremas na Teoria dos Grafos que garante a existência de um circuito em um grafo, apenas verificando os graus dos vértices, é o

Teorema 1 (Dirac - 1952) *Seja n um número inteiro. Se G é um grafo com n vértices e $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$, para todo vértice v de G, então G possui um circuito que passa por todos os vértices do grafo G.*

Este resultado também é um dos mais famosos no que diz respeito em verificar se um determinado grafo é *Hamiltoniano*. Um grafo é Hamiltoniano se possui um circuito que passa por todos os vértices do grafo.

Mas, e se deletarmos este circuito que o Teorema 1 garante que existe, o grafo continuaria sendo Hamiltoniano? É justamente uma condição destas que o Teorema de Mader garante, isto é, dado um grafo com uma determinada propriedade, então, de certa forma, existe neste grafo um conjunto de arestas que não influencia nesta propriedade.

Teorema 2 (Mader - 1974) *Seja G um grafo n-conexo com $d_G(v) \geq n + 2$, para todo vértice v de G. Então, existe um circuito C de G tal que $G\backslash C$ continua n-conexo.*

Na hipótese do Teorema de Mader não é a toa que o grau dos vértices são maiores ou iguais a $n + 2$. Quando retiramos o circuito, o grau de alguns vértices diminuirão em 2, sendo assim, os referidos vértices ficarão com grau maior ou igual a n, uma condição necessária para o grafo continuar sendo n-conexo.

Um dos problemas que encontramos no Teorema de Mader é que não há garantias quanto ao comprimento do circuito a ser retirado, desta forma, não teremos controle na quantidade de vértices que serão afetados após a remoção das arestas do circuito.

Jackson provou um resultado que nos diz a quantidade mínima de arestas que serão retiradas, mas seu resultado é para o caso 2-conexo.

Teorema 3 (Jackson - 1985) *Sejam G um grafo 2-conexo, n um inteiro maior ou igual a quatro e a uma aresta de G. Suponhamos $d_G(v) \geq n$, para todo vértice v de G. Então, G tem um circuito C, de comprimento, no mínimo, $n-1$, tal que a aresta a não pertence ao circuito C e $G\backslash C$ continua 2-conexo.*

Temos um controle da quantidade mínima dos vértices afetados, pois sabemos o comprimento mínimo do circuito a ser retirado, no caso $n-1$. Este resultado foi o que serviu de inspiração para Lemos e Oxley, pois o Teorema demonstrado por eles é um aprimoramento do Teorema 3.

Antes de enunciarmos o Teorema de Lemos e Oxley, vamos definir o que é um *bloco*. Um bloco é um grafo completo de um ou dois vértices, ou, se tem pelo menos três vértice, é um grafo 2-conexo. Na Figura 4 temos os grafos completos de um e dois vértices.

Figura 4: Grafos completos.

Teorema 4 (Lemos e Oxley - 1999) *Sejam G um grafo 2-conexo, H um subgrafo, que é um bloco, de G e n um inteiro maior que três. Suponhamos $d_G(v) \geq n$, para todo vértice v pertencente a $V(G) - V(H)$. Então,*

1. *$G \backslash C$ é 2-conexo para todo circuito C que é aresta-disjunta de H; ou*
2. *G tem um circuito C que é aresta-disjunta de H tal que $G \backslash C$ é 2-conexo e, quando $n \geq 5$, o comprimento de C é, no mínimo, $n+1$.*

A primeira melhora notável é que nem todos os vértices do grafo precisam ter grau maior ou igual a n, o segundo aprimoramento relevante surge quando n é maior ou igual a cinco, porque o comprimento mínimo do circuito que pode ser removido, deixa de ser $n-1$ e passa a ser $n+1$. Além disso, caso tenhamos um resultado que garanta a existência de um circuito de comprimento maior que $n+1$ no grafo e a condição 1 do Teorema 4 seja válida, então teremos um aprimoramento melhor ainda.

O único problema é que o Teorema 4 é um resultado de existência, ele garante a existência de um circuito, mas não nos diz um algoritmo de como encontrá-lo, a demonstração também não nos dá nenhuma idéia, pois é feita por redução ao absurdo, supõe-se que o resultado não é válido e chega-se a uma contradição.

Portanto, quando o Teorema de Lemos e Oxley garante a existência de um circuito que pode ser removido de um grafo 2-conexo sem afetar a sua 2-conexidade, resta desenvolvermos um algoritmo para determinar tal circuito.

Exemplo

Seja G_2 o grafo apresentado na Figura 5. Consideremos o subgrafo H_2 de G_2 com o seguinte conjunto de vértices $V(H_2) = \{u_1, v\}$ e conjunto de arestas $E(H_2) = \{u_1 v\}$. O grafo G_2, juntamente com o subgrafo H_2, atende as condições do Teorema 4. Portanto, existe um circuito de comprimento, no mínimo, 5 que não intercepta a aresta de H_2 e que ao ser removido, o grafo G_2 continua 2-conexo.

Em particular, neste exemplo o comprimento máximo do circuito também é 5. Um circuito de comprimento 5 que pode ser removido tal que o grafo G_2 continua 2-conexo é o circuito formado pela seguinte sequência de vértices $u_1 u_3 u_5 u_2 u_4 u_1$.

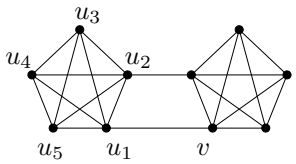

Figura 5: Grafo G_2.

Referências

[1] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications.* New York: North-Holland, 1976.

[2] JACKSON, B. Removable cycles in 2-connected graphs of minimum degree at least four. *J London Math Soc (2)*, v. 21, p. 385-392, 1980.

[3] LEMOS, M.; OXLEY J. On Removable Circuits in Graphs and Matroids. *Journal of Graph Theory*, v. 30, p. 51-66, 1999.

[4] MADER, W. Kreuzungfreie a, b-Wege in endlichen Graphen. *Abh Math Sem*, Hamburg, v. 42, p. 187-204, 1974.

[5] MENEZES NETO, J. L. de. *Circuitos removíveis em grafos.* 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco.