INFORMAÇÕES TRADEOFF EM PROBLEMAS MULTIOBJETIVOS

JESUS OSSIAN DA CUNHA SILVA[1*] AND PAULO ROBERTO OLIVEIRA[2]

[1]Programa de Engenharia de Sistema e Computação, COPPE-UFRJ, CP. 68.511, Rio de Janeiro-RJ, CEP 21.941-72, Brasil

[2]Programa de Engenharia de Sistema e Computação, COPPE-UFRJ, CP. 68.511, Rio de Janeiro-RJ, CEP 21.941-72, Brasil

E-mails: jossian@cos.ufrj.br / proliveir@cos.ufrj.br

Abstract. MOPs are characterized by having no single solution and conflicting goals, a point where the solution does not meet all the goals simultaneously. And there isn't a relationship of order between the point solutions. We studied briefly in a methodology that helps decide what the best solution point.

Key words: multiobjetivo, tradeoff, multiplicadores de KKT.

1. Introdução

Problema 1.1. *[MOP]Denominamos Problema de Otimização Multiojetivo o seguinte problema*

$$\begin{aligned} &Mimizar\ (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \\ &Sujeito\ a\ x \in S \end{aligned}$$

onde S é denominado conjunto viável, $x \in S \subset \mathbb{R}^m$ é um ponto viável.

Uma caracteristica dos MOPs é a não existência de uma solução única para os mesmos. No nosso caso as soluções estão definidos no $\mathbb{R}^n$ o qual não possui uma relação de ordem bem definida. Desse modo fica difícil decidir qual o melhor ponto solução. Uma saida seria encontramos uma função que definisse uma relação ordem entre

*Suportado pelo CNPQ.

os pontos pertecentes ao conjunto solução de forma a possamos estabeler uma preferência. Uma boa idéia seria definir uma adequada função utilidade.

Definimos um problema de Tomada de Decisão.

Problema 1.2. *[MDMP] Seja S^* o cojunto solução do Problema (1.1). Qual o melhor $x^* \in S^*$?*

Na vida real sempre nos deparamos com situações em que temos que tomar alguma decisão diante de duas ou mais opções.

Para resolver o MDMP, temos antes que resolver o MOP e depois establelecer e utilizar alguma informação para determinar o melhor ponto solução do MOP. Neste trabalho utilizaremos o método ϵ-restrito para resolver o MOP e estabeleceremos informação trade-off como meio para decidir qual a melhor solução do MOP e para finalizar faremos uma relação entre elas e os multiplicadores de KKT.

Definition 1.3 (Pareto ótimo)**.** Dado $x^* \in S$, temos que x^* é uma solução Pareto ótimo do Problema (1.1), se não existe outro $x \in S$ tal que $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e no máximo uma das desigualdades estritas.

Definition 1.4 (Pareto ótimo fraco)**.** Um vetor decisão $x^* \in S$ é Pareto ótimo fraco se não existe outro $x \in S$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Definition 1.5 (Pareto ótimo local)**.** $x^* \in S$ é Pareto ótimo local se existe $\delta > 0$ tal que x^* é Pareto ótimo em $S \cap B(x^*, \delta)$.

Theorem 1.6. *Se o MOP é convexo então toda solução de Pareto ótimo local é também Pareto ótimo global.*

Existe outras extensões da definição de conjunto Pareto ótimo para maiores informações consulte [1] e [2].

2. Gerando o Conjunto Solução

Para encontrar o conjunto Pareto ótimo devemos resolver o seguinte problema.

Problema 2.1 (Problema ϵ-restrito)**.**

$$\begin{aligned} &\textit{mininizar } f_l \\ &\textit{sujeito a } f_j(x) \leq \epsilon_j \textit{ para todo } j = 1, \ldots, k, j \neq l, \\ &\qquad x \in S, \end{aligned}$$

onde $l \in \{1, \ldots, k\}$.

Estabelecemos agora alguns resultados que fazem uma conexão entre o conjunto solução do Problema(2.1) e o conjunto Pareto ótimo para o Problema(1.1). Para um estudo mais profundo consulte [1].

Theorem 2.2. *A solução do Problema(2.1) é Pareto ótimo fraco.*

Proof. Ver [3].

□

Theorem 2.3. $x^* \in S$ *é Pareto ótimo do MOP se e somente se ele é solução do Problema(2.1) para todo* $l = 1, \ldots, k$, *onde* $\epsilon_j = f_j(x^*)$ *para* $j = 1, \ldots, k, j \neq l$.

Proof. Ver [3].

□

Theorem 2.4. *:* $x^* \in S$ *é Pareto ótimo se ele é solução unica do Problema(2.1) para algum* l *com* $\epsilon_j = f_j(x^*)$ *para* $j = 1, \ldots, k, j \neq l$.

Proof. Ver [3]. □

Theorem 2.5. x^* *é Pareto ótimo local do MOP se* x^* *é uma solução estrita do Problema(2.1) para algum* k.

Proof. Ver [3].

□

Definition 2.6. Uma solução útopica $y^* \equiv (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ de um MOP é definida como

$$y_i^* = f_i(x^i), i = 1, \ldots, m$$

onde,

$$x^i = arg\ min_{x \in S} f_i(x)$$

Resolvendo m problemas mono-objetivos podemos obter valores de f_i, que são os ótimo individuais de cada objetivo, os quais compõem o vetor y^*, correspodente a solução útopica do problema.

Paralelamente a essa operação, podemos determinar os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro está no seu ótimo, formando o vetor y^0.

Cada Problema (2.1) é resolvido usando vetores resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidades uniforme, atendendo a restrição $y^* \leq \epsilon \leq y^0$.

3. Informação tradeoff

Definition 3.1. Seja $x, x^* \in S$. O tradeoff entre x e x^* envolvendo as funções f_i e f_j é definido como

$$T_{ij}(x, x^*) = \frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_j(x) - f_j(x^*)}$$

onde $f_j(x) \neq f_j(x^*)$.

Definition 3.2. Tradeoff $T_{ij}(x, x^*)$ é chamada tradeoff parcial se $f_j(x) = f_j(x^*)$ para todo $l = 1, \ldots, k$ e $l \neq j, i$. Quando $f_j(x) \neq f_j(x^*)$ para no máximo um l, $T_{ij}(x, x^*)$ é chamada trade-off total.

Definition 3.3. Suponha que exista uma direção viável d em S. Se o limite

$$t_{ij}(x^*, d) = \lim_{\alpha \to 0^-} T_{i,j}(x^* + \alpha d, x^*)$$

existe, dizemos que $t_{ij}(x^*, d)$ é uma taxa trade-off em x^* na direção d envolvendo os objetivos f_i e f_j. No entanto, se f_i e f_j são ambas classe C^1 temos em x^*

$$t_{ij}(x^*, d) = \frac{\nabla f_i(x^*)^T d}{\nabla f_j(x^*)^T d}$$

Theorem 3.4 (Teorema da Sensibilidade)**.** *Dado $\epsilon^0 \in \epsilon$, x^* resolve o Problema(2.1) com λ^*_{kj} sendo o multiplicador de KKT associado a restrições $f_j(x) \leq \epsilon^0_j, j \neq k$. Se*

(1) *x^* é um ponto regular das restrições do Problema(2.1),*

(2) *as condições suficientes de segunda ordem são sastifeitas em* x^*, *e*

(3) *não existe restrições degeneradas em* x^*, *com* $\lambda^*_{kj} = -\dfrac{\partial f_k(x^*)}{\partial \epsilon_j}$ *para todo* $j \neq k$.

Proof. Ver [1]. □

Corollary 3.5. *: Se* x^* *é Pareto ótimo do Problema(2.1) e sastisfaz as hipotéses do Teorema(3.4), então existe uma vizinhança* $B(\epsilon^0)$ *de* ϵ^0, *tal que para todo* $\epsilon \in B(\epsilon^0)$, $x(\epsilon)$ *resolve de forma única localmente o Problema(2.1), e é uma função de classe* C^1 *com* $x(\epsilon^0) = x^*$.

Corollary 3.6. *: Suponha as hipoteses do Teorema(3.4) satisfeitas, então existe uma vizinhaça* $B(\epsilon^0)$ *de* ϵ^0, *afim de que para cada* j *com* $\lambda^*_{kj} > 0$, $f_j(x(\epsilon)) = \epsilon_j$ *para todo* $\epsilon \in B(\epsilon^0)$.

Theorem 3.7. *Um* $x^* \in S^*$ *solução Pareto ótimo é uma solução para o Problema(2.1), para algum* $\epsilon^* = (\epsilon^*_1, \ldots, \epsilon^*_{k-1})^T$, *tal que as seguintes condições são satisfeitas*

(1) x^* *é um ponto regular com respeito as restrições ativas do problema,*

(2) *as condições suficientes de segunda ordem são sastifeitas em* x^*, *e*

(3) *todas as retrições ativas em* x^* *são não-degeneradas.*

λ^*_j *é o multiplicador de KKT correspodente à restrição* $f_j(x^*) \leq \epsilon_j, j = 1, \ldots, k-1$. *Assuma sem perda de generalidade que estas restrições estão ordenadas de tal modo que* $\lambda^*_j > 0$ *para todo* $j = 1, \ldots, p$ *e* $\lambda^*_j = 0$ *para todo* $j = p+1, \ldots, k-1$. *Baseado no Teorema da Função Implícita* [5] *temos*

a) *Se* $p = k-1$*(isto é,* $\epsilon^* = f_j(x^*)$ *para todo* $j = 1, \ldots, k-1$*), então existe uma vizinhança* $B(x^*)$ *de* x^* *e uma função de classe* C^1, $\overline{x}(.) : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^n$ *definida em alguma vizinhança* $B(\epsilon^*) \subset \mathbb{R}^{k-1}$ *de* ϵ^* *tal que* $S^* \cap B(x^*) \subset x(B(\epsilon^*)) \subset S^*$.

b) *Se* $p = k-1$ *e* $B(x^*)$ *é como em* **a)**, *seja* $Z^k = \left\{(f_1(x), \ldots, f_k(x))^T | x \in S^* \cap B(x^*)\right\}$ *e* $Z^{k-1} = \left\{(f_1(x), \ldots, f_{k-1}(x))^T | x \in S^* \cap B(x^*)\right\}$. *Então existe uma*

função de classe C^1, $\overline{f}_k$ *definida em* Z^{k-1}, *tal que para cada* $(f_1(x), \ldots, f_k(x))^T \in Z^K$ *podemos encontrar* $f_k(x) = \overline{f}_k(f_1(x), \ldots, f_{k-1}(x))^T$. *Além disso*

$$\frac{\partial \overline{f}_k}{\partial f_j}(f_1(x^*), \ldots, f_{k-1}(x^*)) = -\lambda_j^*$$

para cada $j = 1, \ldots, k-1$.

c) *Se* $1 \leq p < k-1$ *então seja* $Z_\epsilon^k = \left\{(f_1(x), \ldots, f_k(x))^T | x \in \overline{x}(B(\epsilon^*))\right\}$. *Existe funções de classe* C^1, $\overline{f}_{p+1}, \ldots, \overline{f}_{k-1}$ *e* $\overline{f}_k$ *definidas em* $B(\epsilon^*)$ *tal que para cada* $(f_1(x), \ldots, f_k(x))^T \in Z_\epsilon^k$, *temos*

$$\overline{f}_j(x) = \overline{f}_j(f_1(x), \ldots, f_p(x), \epsilon_{p+1}^*, \ldots, \epsilon_{k-1}^*), \text{ para todo } j = p+1, \ldots, k.$$

Além disso para cada $i = 1, \ldots, p$ *temos*

$$\frac{\partial \overline{f}_k}{\partial f_i}\Big|_{\epsilon=\epsilon^*} = -\lambda_j^* = \frac{\nabla f_k(x^*)^T d^i}{\nabla f_i(x^*)^T d^i}$$

onde d^i *é a direção de* $\dfrac{\partial \overline{x}(\epsilon^*)}{\partial \epsilon_i}$, *e para cada* $j = p+1, \ldots, k-1$ *temos*

$$\frac{\partial \overline{f}_j}{\partial f_i}\Big|_{\epsilon=\epsilon^*} = \nabla f_j(x^*)^T \frac{\partial \overline{x}(\epsilon^*)}{\partial \epsilon_i}$$

Proof. : Ver [5].

□

4. Conclusão

É possivel transformamos um problema Multiobjetivo em um problema Escalar, onde conhecemos bons métodos de resolução e temos que o conjunto solução de um problema transformado está relacionado ao conjunto solução do outro. Temos um tipo de informação denominada tradeoff que pode ser usada para tomar decisões entre pontos de um conjunto solução. Estas informações pode ser obtida da própria estrutura do método de resolução do problema transformado e a mesma possui uma relação com os famosos multiplicadores de KKT responsáveis pela determinação de pontos ótimos em problemas escalares.

References

[1] David E. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, USA - (1984).

[2] Elon Lages Lima, *Análise Real*, v. 2, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, (2004).

[3] Kaisa Miettinen, *Nonlinear Multiobjetive Optimization*, Kluwer, Boston/London/Dordrech - (1999).

[4] Yacov H. Haimes and Vira Chankong, *Kuhn-Tucker Multipliers as Trade-Offs in Multiobjetive Decision-Making Analysis*, Automatica, **15** (1979), 59–72.

[5] Yacov H. Haimes and Vira Chankong, *Multiobjective decision making: theory and methodology*, Dover, Mineola, USA - (1983).