VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional
20 a 22-Novembro-2008
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Registros de Representações Semióticas no Uso de Fóruns Educacionais de Álgebra Linear

Ana Isabel de Azevedo Spinola Dias **Fernando Náufel do Amaral**
LLaRC – Laboratório de Lógica e Representação do Conhecimento
Depto. de Ciência e Tecnologia, Pólo Universitário de Rio das Ostras, Universidade Federal Fluminense
28.890-000, Rio das Ostras, RJ
E-mail: belspinola@gmail.com, fnaufel@ic.uff.br

Resumo

Apesar de, hoje, existirem várias plataformas de ensino a distância disponíveis para uso também no ensino presencial, faltam relatos de experiências na área da aprendizagem em Matemática. Na verdade, seu uso implica em novos paradigmas educacionais, que, em geral, envolvem a mudança de enfoque do ensino para o da aprendizagem. Nosso artigo descreve registros do fluxo de comunicação no fórum do ambiente virtual de aprendizagem Moodle[1], em Álgebra Linear. Analisa o processo de aprendizagem desta disciplina, que foi oferecida para os cursos presenciais de graduação em Química e Física, na UFF. Além disso, buscamos fornecer subsídios para o estudo da relação entre o uso de diferentes registros de representação semiótica [Duval 2007] e aprendizagem.

Palavras-chave

Representações Semióticas, Aprendizagem, Álgebra Linear, Fóruns, Ambiente Virtual de Aprendizagem

Introdução

Muito já foi pesquisado sobre a relação entre aprendizagem em Matemática e representações semióticas. Observamos que o uso de diversas representações pode ser potencializado por um ambiente virtual de aprendizagem. Em especial, usamos o fórum para registrar fluxo de comunicação entre alunos em estado de aprendizagem de Álgebra Linear.

Por que Álgebra Linear?

A disciplina de Álgebra Linear apresenta-se, em geral, como sendo um curso um tanto árduo para os alunos, por tratar de conceitos abstratos tais como matrizes, determinantes, espaços vetoriais e transformações lineares, que podem ser estudados exclusivamente sob o ponto de vista teórico, sem a luz advinda de aplicações práticas. É uma disciplina complexa, por exigir que o aluno ao mesmo tempo efetue corretamente cálculos inerentes ao estudo, compreenda os conceitos envolvidos (saiba o que está fazendo e por quê) e conheça suas aplicações.

1 Como se aprende Álgebra Linear?

Não temos a pretensão de responder esta pergunta, mas contribuir para uma discussão ampla sobre o tema apresentando dados para a reflexão. Aprendizagem requer resolução de problemas, exploração, colaboração e oportunidades de reflexão.

Segundo Maturana [Maturana 2001] o conhecimento é uma construção da linguagem, que por sua vez, é construída nas relações. Vista desta forma, a aprendizagem pode ser potencializada quando proporcionamos espaços relacionais alternativos aos oferecidos usualmente.

Procuramos proporcionar atividades para que os alunos possam:

1. Formular argumentações adequadas;
2. Desenvolver destreza com os cálculos;
3. Ter interesse e domínio de aplicações;
4. Usar com desenvoltura algum sistema de computação algébrica.

Comentários sobre os objetivos listados:

1. Ao longo do curso, é esperado que o aluno compreenda e saiba provar alguns resultados básicos de Álgebra Linear. Em sala de aula, é feito um trabalho árduo e constante na tentativa de melhorar a escrita de provas em Matemática, com o objetivo de obter argumentações corretas e adequadas.
2. Uma vez compreendido um conceito, o aluno de Álgebra Linear precisa saber fazer determinados cálculos inerentes ao estudo. E mais, precisa saber tratar corretamente os mínimos detalhes sem esbarrar em dificuldades algébricas básicas. Exemplos de cálculos que precisam ser feitos no curso são operações com matrizes, resolução de sistemas lineares pelo método de eliminação de Gauss-Jordan, inversão de matrizes, cálculo de determinantes, cálculo de autovalores e autovetores de matrizes, etc. Não é

[1] http://moodle.org/

raro encontrar alunos com dificuldades em fazer tais cálculos por problemas de base. Por exemplo, várias vezes encontramos alunos que têm sérias dificuldades em somar frações, expandir produtos notáveis, dividir polinômios ou efetuar operações envolvendo irracionais como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Portanto, parte do trabalho é dedicada a desenvolver nos alunos uma destreza nos cálculos.

3. Alunos sentem-se mais motivados com o estudo de Álgebra Linear quando lhes são apresentadas aplicações na resolução de problemas diversos de outras áreas de conhecimento tais como computação gráfica, crescimento populacional, criptografia, fractais, genética, grafos, etc. Os autores também têm algumas experiências didáticas com desenvolvimento de projetos pelos alunos com temas de aplicação.

4. É grande a quantidade de livros de Álgebra Linear com sugestões de atividades envolvendo o uso de algum sistema de computação algébricas. Existem vários sistemas de computação algébrica disponíveis, alguns livres e outros proprietários. É muito rico o trabalho realizado com o uso destes sistemas. As turmas têm algumas aulas no Laboratório de Informática, onde conhecem alguns comandos básicos de um sistema; aos alunos, são propostos problemas a serem resolvidos com o uso do software. Como o software faz os cálculos mais trabalhosos, o aluno fica livre para pensar no problema sem se fixar nos cálculos, concentrando-se na essência do problema. Além disso, podemos trabalhar com dados mais próximos da realidade, como, por exemplo, problemas envolvendo o cálculo de determinante de uma matriz de ordem 10 por 10. Por motivos de ordem prática, nem sempre é possível desenvolver trabalhos usando um sistema computacional. Uma boa opção é o *Linear Algebra Toolkit* que encontra-se disponível em `http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi`. Trata-se de uma ferramenta na Internet para fazer cálculos tais como resolver sistemas lineares usando Gauss-Jordan, cálculo de determinantes, cálculo de inversas de matrizes, determinação de dependência e indenpendência linear, etc. que não apenas apresenta a resposta, como também as etapas de resolução, passo a passo.

Outro fator que pode enriquecer as aulas de Álgebra Linear é a apresentação sistemática do desenvolvimento histórico de certos conceitos envolvidos. Baseados em [Katz 1995], estamos trabalhando no sentido de conseguir evidências de que conhecer como se deu o processo de criação matemática acarreta uma compreensão maior do assunto, e com isso conseguir uma motivação maior.

Na experiência desenvolvida, que será relatada neste artigo, alunos dos cursos presenciais em Física e Química, inscritos numa mesma turma de Álgebra Linear na UFF usaram o fórum da Plataforma Moodle para fazer dois trabalhos de Álgebra Linear.

2 Fundamentação Teórica

Um problema enfrentado na aprendizagem da Matemática, em geral, é a natureza abstrata de seus objetos e conceitos, que faz com que o contato com eles se dê unicamente através de *representações* desses objetos. É crescente a utilização, em pesquisas ligadas à aquisição de conhecimento, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Segundo [Damm 1999], é através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento. No âmbito desta reflexão, analisamos a aprendizagem do ponto de vista da mobilidade entre diferentes registros de representação semiótica, além do interacionismo.

Existem dois conceitos associados a uma representação semiótica: o de *tratamento* e o de *conversão*. O tratamento de uma representação é sua transformação dentro do próprio registro. A conversão é a transformação da representação em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. Uma conclusão importante apontada em [Damm 1999] é: "*Quanto maior for a mobilidade com registros de representação, maior será a possibilidade de apreensão do conceito.*"

A literatura aponta a dificuldade que os alunos têm na conversão de um sistema de registro a outro, impedindo a real compreensão do conceito. Nosso experimento analisou a mobilidade entre diferentes sistemas de representação para registrar os raciocínios dos alunos. Assim foi possível detectar o discurso matemático empregado por eles. Foram usados quatro tipos de representação: linguagem natural, escrita algébrica, representações gráficas e símbolos numéricos.

No artigo [Karrer and Jahn 2004] as autoras analisam livros de Álgebra Linear, comparando os tipos de representação semiótica de determinados tópicos relacionados a transformações lineares e as conversões estabelecidas entre os possíveis registros constantes nos livros. Além disso, estabelecem uma classificação dos registros em simbólico, gráfico, numérico e da língua natural especializada. Seguindo as evidências apontadas pelos trabalhos mencionados, procuramos, em sala, apresentar uma diversidade de registros de representação dos objetos a serem ensinados, explorando as conversões entre eles. O objetivo é que os alunos consigam encarar como natural a passagem pelos diferentes registros; isto é, que compreendam que o conceito é o mesmo apesar das diferentes representações. O trabalho realizado no fórum também foi planejado para poder instigar um maior uso de diferentes registros pelos alunos.

3 Cenário da Experiência

A experiência consiste na introdução de elementos virtuais na dinâmica presencial, rompendo com o paradigma espaço e tempo, requerendo interação entre alunos e exigindo registros em diversos sistemas de representações para auxiliar a aprendizagem da disciplina.

O fluxo de comunicação considerado em nosso estudo foi a comunicação assíncrona de mensagens eletrônicas produzidas pelos participantes e postadas no fórum da plataforma de EAD Moodle, além da troca de material no formato de arquivos de texto, imagem e com símbolos matemáticos.

O assincronismo do fórum permite que as colaborações dos alunos possam se dar de maneira mais elaborada, visto que têm tempo para refletir, estudar e pesquisar antes de participar. Uma grande vantagem do fórum é a realização do registro e memória das conversações que podem ser consultadas posteriormente para eventuais consultas.

A turma tinha 40 alunos, sendo 20 da Física e 20 da Química. Em nossa experiência foram apresentadas duas atividades usando o fórum cuja avaliação foi traduzida em nota computada da média final do aluno. Seguem abaixo a apresentação das atividades tais como foram propostas aos alunos:

Atividade 1: Argumentações sobre Questões de Verdadeiro ou Falso

Atenção para a dinâmica do fórum.

A turma foi dividida em 10 grupos de 4 alunos cada. Localizem-se nos grupos e podem começar a participar como "guardiões" da questão do grupo ao qual vocês pertencem e como "invasores" das questões dos outros.

Quem é guardião de uma questão deve esperar que os outros "invadam"sua questão para começar a dialogar sobre ela.

Qualquer um pode começar a responder (invadir) as questões dos outros grupos.

Deu para entender?

Outra coisa: evitem respostas de pouco esclarecimento do tipo: "concordo", "discordo", "V" ou "F". Argumentem!

Bom trabalho!

Enumeramos abaixo as questões que foram classificadas como verdadeiras ou falsas pelos alunos, servindo de alimento para discussão e interação:

1. As operações elementares realizadas sobre as linhas de uma matriz A podem mudar as relações de dependência linear entre as linhas de A.
2. Se nenhum dos vetores do $\mathbb{R}^3$ no conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é um múltiplo escalar de um dos outros vetores, então S é LI.
3. Em alguns casos, é possível que quatro vetores gerem o $\mathbb{R}^5$.
4. Suponha que u, v, w sejam vetores não-nulos do $\mathbb{R}^5$ tais que v não é múltiplo de u, e que w não é combinação linear de u e v. Então $\{u, v, w\}$ é LI.
5. Se A contém uma linha ou uma coluna de zeros, então o número 0 é um autovalor de A.
6. Existe uma matriz 2×2 que não tem autovetores no $\mathbb{R}^2$.
7. Dois autovetores associados ao mesmo autovalor são sempre LD.
8. A soma de dois autovetores de uma matriz A é sempre um autovetor de A.
9. $T : M_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(A) = detA$ é uma transformação linear.
10. $\{1+x, 1-2x+x^3, 4+x+x^2+5x^3\}$ forma uma base de $\mathcal{P}_3$.

Esta etapa do fórum durou 16 dias e gerou 190 mensagens, assim distribuídas.

Questão	Tamanho da conversa no Fórum
1	14
2	20
3	32
4	22
5	28
6	12
7	17
8	16
9	14
10	15

Atividade 2: Construção coletiva de um FAQ de Álgebra Linear

Nesta etapa a turma foi dividida em duplas. Cada dupla deverá formular uma pergunta sobre o conteúdo da disciplina Álgebra Linear e colocar no fórum para ser respondida pelos colegas da turma. Além de responder, a turma pode perguntar, levantar questões, fazer considerações a respeito da pergunta colocada. No final do fórum a dupla deverá compor a resposta final de sua pergunta levando em conta todas as considerações feitas pelos colegas.

Neste tópico deve entrar a pergunta que a dupla escolher para fazer parte do FAQ (Frequently Asked Questions - Perguntas Mais Frequentes) do site de Álgebra

Linear. Os demais alunos da turma devem responder e/ou fazer considerações a respeito da pergunta desta dupla. Vale fazer novos questionamentos a partir da pergunta formulada. Ao final do fórum esta mesma dupla deverá apresentar a resposta final da sua pergunta, levando em conta as participações da turma.

4 Alguns Registros de Alunos

Em resposta à questão 2 da atividade 1, após o mesmo aluno ter dado esposta errada, percebe seu erro e diz:

> Opa!!
> Revendo a questão eu percebi o seguinte:
> (i) Se os três vetores do conjunto S não forem múltiplos escalar um do outro é uma condição para que S seja L.I (Provei anteriormente)
> (ii) Por outro lado, se tomarmos três vetores em $\mathbb{R}^3$;
> v1= (1,-2,5), v2= (2,3,1) e v3= (3,8,-3)
> Podemos ver q nenhum desses vetores é múltiplo escalar do outro, mas v3 é combinação de v1 e v2.
> (3,8,-3) = (-1)(1,-2,5) + (2)(2,3,1)
> Então S é L.D
> Corrigindo, AFIRMATIVA É FALSA.
> Questão muito capciosa!!!!!!!

Abaixo mensagem do conjunto da conversação sobre a questão 8 da atividade 1, onde a aluna pede que o colega prove o que havia afirmado anteriormente.

> Neste exemplo β=2 =>4 (-2z, -z, z), a multiplicidade é igual a 1 e você AFIRMA que mesmo a multiplicidade sendo igual ou maior que 2 a soma de dois autovetores continuará sendo um autovetor de A.
> VOCÊ PODERIA ME PROVAR ISSO?

Inserimos aqui trecho de uma conversação estabelecida na atividade 2 onde, através da interação entre pares registrando suas interpretações pelas diferentes linguagens, dois alunos se correspondem escrevendo sobre o assunto estudado, se convencendo, tirando dúvidas. Depois das entradas deles, houve uma sequência de 13 mensagens, onde os alunos tentavam tatear o caminho para a solução e o aluno que propôs ia corrigindo e norteando os argumentos apresentados. Nenhuma intervenção foi feita pelo professor, a mediação foi feita completamente pelo aluno, que ao final apresentou a resposta completa com explicação usando linguagens simbólica, algébrica e natural para se expressar.

1. Participante A lança uma pergunta:

   Lá vai a pergunta:

   Escreva a transformação T: $\mathbb{R}^3 - - > \mathbb{R}^3$ na base canônica que possui o efeito geométrico de uma projeção ortogonal sobre o plano x - y - z = 0

2. Resposta do Participante B:

   "Pessoal o que eu entendo por projeção ortogonal sobre um plano é:

   T: R3—>R3

   T(x,y,z) = (x,y,0)

   * gráfico no final do texto.

   Minha pergunta é a seguinte, ele não teria que ter dado quem é T(1,0,0), T(0,1,0) e T(0,0,1), pra que eu pudesse fazer as combinações desse jeito:

   T(x,y,z) = a.T(1,0,0) + b.T(0,1,0) + c.T(0,0,1)

   e achar a transformaçãode R3 na base canônica ?

   Outra dúvida, na equação do plano uma das incógnitas não deveria ser zero ?

   ex.: (x,y,0), como no exemplo acima.

   Se tiver como fazer sem isso, me ajude, pois, não entendi como ficaria."

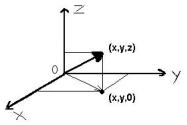

Figura 1: Registro gráfico apresentado pelo aluno na plataforma

3. Participante A corrigindo o participante B:

   "Participante A, eu acho q vc esta pensando na projeção no plano xy e naum no plano x-y-z=0 da uma olhada como é q fica o gráfico desse plano."

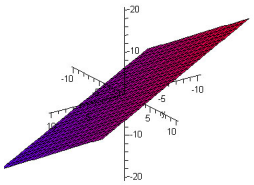

Figura 2: Registro gráfico apresentado pelo aluno corrigindo o colega

Outra pergunta lançada por alunos na atividade 2:

"Duas matrizes diferentes podem ter polinômios caracteríscos iguais? Se isso for possível, qual seria semelhança entre os autovetores dessas matrizes??"

Abaixo intervenção do aluno que propôs a questão, corrigindo raciocícnio dos colegas.

> Calma aí gente!
>
> De onde vocês estão tirando que para os polinômios característicos de duas matrizes serem iguais,"SÓ" se as matrizes forem múltiplas???
>
> Pensem P(l) = det(A-lI) = 0
>
> Uma dica: Pense nas matrizes triangulares!!
>
> Veja se elas podem não serem múltiplas umas das outras mas possuirem polinômios característicos iguais. Praticamente respondi a primeira questão... Agora é com vocês deselvolver mais um pouco essas respostas!
>
> A parte dos autovetores não está certa Fulano!! Para facilitar façam um exemplo.
>
> Abraços

Uma intervenção como a acima descrita tem muito mais valor pedagógico do que se tivesse sido feita pelo professor. Abaixo mensagem do aluno que propôs a pergunta, apresentando a resposta em arquivo enviado pela plataforma depois de ter colado a resposta no próprio fórum que não tem toda potencialidade de expressão em termos de símbolos matemáticos.

> Pessoal, desculpa o trastorno, pois tinha feito minha resposta no WORD, depois que colei no fórum ela ficou meio desconfigurada!
>
> Então vou deixar aqui a resposta em anexo também, ela está mais arrumadinha e alguns detalhes a mais!
>
> Abraços

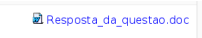

Figura 3: Interação por envio de arquivo pela plataforma

A seguir, o aluno sentiu necessidade de registrar seus argumentos escrevendo em linguagens simbólica e algébrica e esbarrou na limitação de funcionalidade da plataforma. Como solução o aluno escaneou sua argumentação e colou na plataforma. Abaixo um trecho de seu registro:

Fato curioso foi o de haver poucas mensagens isoladas. Consideramos uma mensagem como sendo *isolada* quando não está relacionada a nenhuma outra, isto é, não é resposta nem comentário de nenhuma outra mensagem.

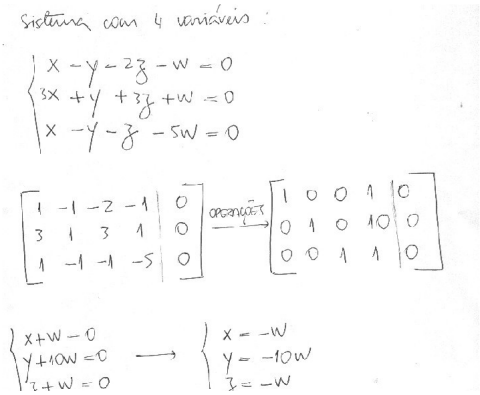

Figura 4: Uso da linguagem algébrica

5 Conclusões

Pudemos observar que a resolução de problemas, muitas vezes, se deu através de construção coletiva. A compreensão de certos conceitos matemáticos surgiu da cooperação e da interação, indicando que estes processos também desempenham papel fundamental na aprendizagem, além da mobilidade entre os diversos registros de representação.

É importante salientar que o ambiente virtual de aprendizagem sozinho não garante aprendizagem. O papel do professor que planeja a aprendizagem e as situações didáticas, e que atua como moderador no fórum é fundamental. As mensagens foram analisadas tendo por finalidade detectar tipos de registros de representação semiótica usados pelos alunos e fatores de gradação de interação, alguns dos quais também foram explorados em [Brandão et al. 2006]. O moderador deve estar atento constantemente para as discussões evitando que elas se desviem do foco principal e se tornem infrutíferas. Seu papel é fundamental, como apontado em [Fuks et al. 2005].

Ressaltamos a importância da mediação que o próprio aluno pode exercer sobre o coletivo tal como observada na dinâmica proposta.

Consideramos ter obtido uma experiência de sucesso, sendo uma evidência disso os resultados na prova escrita realizada após este trabalho que foram bem superiores às provas (com conteúdo análogo) aplicadas em períodos anteriores. A experiência contribuiu para reforçarmos as evidências em torno da relação entre aprendizagem, interação e registros de representação semiótica, apontando o uso do fórum como sendo ferramenta promissora para aumentar as oportunidades de aprendizagem.

Referências

[Brandão et al. 2006] Brandão, M., Peixoto, M., Ferraz, V., and Coutinho, R. (2006). Indicativos

de participação e conversação em uma comunidade virtual de enfermagem e considerações sobre aprendizagem. *Revista Brasileira de Informática na Educação, SBC*, 14(2).

[Damm 1999] Damm, R. F. (1999). Registros de representação. In Machado, S. D. A., editor, *Educação Matemática: uma Introdução*. Educ.

[Duval 2007] Duval, R. (2007). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In Machado, S. D. A., editor, *Aprendizagem em Matemática – Registros de Representação Semiótica*. Papirus Ed.

[Fuks et al. 2005] Fuks, H., Gerosa, M., Pimentel, M., Filippo, D., and Lucena, C. (2005). Informações estatísticas e visuais para a mediação de fóruns educacionais. *Revista Brasileira de Informática na Educação, SBC*, 13.

[Karrer and Jahn 2004] Karrer, M. and Jahn, A. (2004). Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registro de representação semiótica. In *Educação Matemática em Revista*. ano 11 n.17.

[Katz 1995] Katz, V. (1995). Historical ideas in teaching linear algebra. In Swet, F., Fawel, J., Bekken, O., Johansson, B., and Katz, V., editors, *Learn from the masters*. The Mathematical Association of America.

[Maturana 2001] Maturana, H. (2001). *A ontologia da realidade*. UFMG, Belo Horizonte.