VIII ERMAC-R3

8º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional
20 a 22-Novembro-2008
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Estimação de Máxima Verossimilhança dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders utilizando a técnica de Otimização Não-Linear BFGS

Patrícia Silva Nascimento,
Depto. de Estatística, UFPE,
50740-540, Recife, PE
E-mail: patriciajp1408@hotmail.com

Kleber Napoleão N. O. Barros **Carlos S. A. Santos** **Joseilme F. Gouveia,**
Programa de Pós-Graduação de Biometria e Estatística Aplicada, UFRPE,
52171-900, Recife, PE
E-mail: napoleaok@hotmail.com carlossergioaraujo@gmail.com juniorfg99@hotmail.com

Resumo

Birnbaum e Saunders (1969) propôs a distribuição Birnbaum-Saunders para modelar o tempo de falha de um material sujeito a uma mesma configuração de estresse ciclicamente. Esta distribuição é utilizada para modelar tempo de falha em processos de fadiga. Este artigo objetiva implementar um programa na linguagem Ox para encontrar os estimadores dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders(α, β). Obteve-se os estimadores pelo Método da Máxima Verossimilhança e sua versão com correção de viés. Por não apresentar solução analítica 'fechada', encontrou-se os estimadores utilizando a técnica de otimização não-linear BFGS para maximização numérica da função de log-verossimilhança. Com os resultados, observou-se que as médias dos estimadores (α, β) nos dois métodos se aproximam assintoticamente do parâmetro. Entretanto, os estimadores com correção de viés, apresentaram vieses e Erro Quadrático Médio consideravelmente menores para todos os tamanhos amostrais. Notou-se também que os estimadores apresentaram assimetria à esquerda. Outro fato interessante é que a curtose dos estimadores aproximou-se da curtose da distribuição normal padrão. Contudo, para os estimadores com correção de viés, a assimetria e a curtose aproximaram-se de zero. Portanto, o ganho de precisão do estimador com correção de viés é significativo.

Palavras-chave

Distribuição Birnbaum-Saunders, Otimização Não Linear, Método BFGS, Método de Máxima Verossimilhança.

Introdução

A distribuição Birnbaum-Saunders, também conhecida como a "distribuição de vida útil à fadiga", foi inicialmente proposta por Birnbaum e Saunders (1969) para modelar o tempo de falha de um material sujeito a uma mesma configuração de estresse e que se repete ciclicamente. A cada ciclo ocorre um aumento na ruptura do material e a falha ocorre quando o tamanho da ruptura atinge um valor limiar. Esta distribuição foi derivada a partir de um modelo em que as falhas acontecem devido ao crescimento de uma rachadura dominante oriunda do processo de fadiga [6]. Embora a distribuição Birnbaum-Saunders tenha sido originalmente concebida a partir de observações relacionadas à área de engenharia, diversos pesquisadores têm vislumbrado outros campos de aplicação, como biologia, atuária, física, medicina, entre outros [7].

Uma das alternativas para estimação dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders é aplicar o método de máxima verossimilhança através da maximização numérica da função de log-verossimilhança. A utilização deste método apresenta muitas vantagens, pois as estimativas obtidas apresentam propriedades importantes, como consistência, invariância e eficiência assintótica [1]. Entretanto, é necessária a escolha de um processo numérico eficaz de maximização que possibilite encontrar as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros que definem o modelo, dado que podem surgir problemas numéricos dependendo da forma da função.

Técnicas de otimização não-linear são de grande importância na resolução de problemas estatísticos cuja solução corresponde a pontos de máximo ou de mínimo de funções de interesse que não possuem forma "fechada". A otimização surgiu no final do século XIX. Em 1960, o processo de otimização ganhou mais força com o desenvolvimento em larga escala de métodos de otimização irrestrita. Dentre os métodos de otimização não-linear existentes, destaca-se o BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno), pertencente a classe dos métodos de métrica variável ou quasi-Newton. Trata-se de uma técnica bastante difundida e de minimização irrestrita, cuja fórmula de aproximação da matriz Hessiana se mantém simétrica e positiva definida, propriedades fundamentais para garantir boas taxas de convergência [4]. O objetivo deste artigo é implementar um programa em linguagem Ox para encontrar $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, os estimadores dos parâmetros α e β da

distribuição Birnbaum-Saunders, pelo Método da Máxima Verossimilhança e sua versão com correção de viés.

As avaliações numéricas e simulações computacionais descritas ao longo deste artigo foram feitas utilizando a linguagem de programação *Ox* em sua versão 4.10. Trata-se de uma linguagem orientada a objetos criada por Jurgen Doornik em 1994 na Universidade de Oxford (Inglaterra) [3]. Do ponto de vista da precisão numérica, *Ox* é uma das mais confiáveis plataformas para computação científica e oferece vários recursos matemáticos e estatísticos. Caracteriza-se pela eficiência diante de tarefas computacionalmente intensivas e pela semelhança da sintaxe às linguagens de programação C e C++. A versão que não oferece interface gráfica está disponível gratuitamente para uso acadêmico em *http://www.doornik.com* [2;3].

Metodologia

Números Pseudo-aleatórios

O principal objetivo em Geradores de Números Pseudo-Aleatórios (GNPA) é usar uma pequena seqüência verdadeiramente aleatória para expandir e criar uma seqüência grande de modo que não se consiga distinguir entre uma verdadeira seqüência aleatória e uma produzida pelo GNPA. Sendo um GNPA um processo determinístico e com domínio finito, eventualmente uma seqüência se repetirá, sendo tal repetição denominada de ciclo ou período, e deseja-se que o tamanho deste ciclo seja o maior possível, pois, a partir do conhecimento de um ciclo, é possível determinar totalmente o restante da seqüência, que serão cópias do ciclo inicial, independentemente do processo de geração utilizado. Outras características desejáveis em um GNPA são a repetibilidade, a portabilidade e a rapidez [5].

Existem vários métodos para a geração de números pseudo-aleatórios através de sistemas computacionais. As seqüências obtidas com esses métodos são submetidas a vários tipos de testes, que examinam as características da seqüência sob o ponto de vista de sua distribuição em um domínio. Os testes são escolhidos de acordo com a finalidade a que se destina a seqüência, pois um gerador pode gerar seqüências mais aleatórias em alguns aspectos do que em outros. A plataforma *Ox* versão 4.10, oferece três geradores de eventos uniformes. O usuário escolhe o gerador desejado com a função **ranseed**, fornecendo-lhe como argumento uma das seguintes possibilidades:

1. "PM" Modified Park Miller (período aproximado de 2^{32}).
2. "GM" George Marsaglia (período aproximado 2^{60}).
3. "LE" Pierre L'Ecuyer (período aproximado 2^{113}).

O gerador de números aleatórios utilizado neste trabalho foi o desenvolvido por George Marsaglia (GM). Trata-se de um gerador de números aleatórios uniformes entre 0 e 1 que passa em testes rigorosos de aleatoriedade.

Método de Monte Carlo

Os métodos de Monte Carlo [4] vêm sendo utilizado há bastante tempo com a finalidade de se obter aproximações numéricas de funções complexas. Esses métodos envolvem geração de observações de alguma distribuição de probabilidade e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse. Quando se deseja avaliar integrais através de aplicações mais comuns usa-se o método de Monte Carlo Simples. O objetivo desse método é escrever a integral que se deseja calcular como um valor esperado. Uma dessas integrais, por exemplo, é:

$$I = \int_a^b g(x)dx.$$

Esta integral pode ser reescrita como:

$$\widehat{I} = \int_a^b (b-a)g(x)\frac{1}{b-a}dx = (b-a)E[g(X)], \quad (1)$$

identificando X como uma variável aleatória com distribuição $U(a,b)$. Assim, transformamos o problema de avaliar a integral, no problema estatístico de estimar uma média, $E[g(X)]$. Dispondo de uma amostra aleatória $x_1, \ldots, x_n$ de tamanho n da distribuição uniforme no intervalo (a,b) tem-se também uma amostra de valores $g(x_1), \ldots, g(x_n)$ da função $g(x)$ e a integral da expressão (1) pode ser estimada pela média amostral, ou seja,

$$\widehat{I} = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$

Não é difícil verificar que esta estimativa é não viesada já que $E[g(Xi)] = E[g(X)]$, para todo i, e portanto:

$$E(\widehat{I}) = (b-a)E[g(X)] = \int_a^b g(x)dx.$$

Pode-se então usar um algoritmo com os seguintes passos:

1. gere $x_1, \ldots, x_n$ da distribuição $U(a,b)$;
2. calcule $g(x_1), \ldots, g(x_n)$;
3. calcule a média amostral $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{n}$;
4. calcule $\hat{I} = (b-a)\bar{g}$.

VIII ERMAC-R3

8º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Método de otimização não-linear BFGS

Os métodos de otimização de funções são comumente utilizados na resolução de problemas estatísticos cujas soluções das funções de interesse não possuem forma "fechada". O Método BFGS foi desenvolvido por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno. Ele utiliza o mesmo princípio do método de Newton-Raphson, diferenciando-se pelo fato de utilizar uma seqüência de matrizes simétricas e positivas definidas $B^{(k)}$ no lugar da matriz $-H^{-1}$, onde H^{-1} é a matriz Hessiana, tal que [4]:

$$\lim_{k\to\infty} B^{(k)} = -H^{-1}.$$

Comumente, toma-se como matriz inicial, $B^{(0)}$, a matriz identidade de mesma ordem, pois ela é positiva definida e simétrica, assim conduzindo a aproximações $B^{(k)}$ positivas definidas e simétricas. A forma recursiva para obter tais matrizes é dada por [4]:

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} - \frac{B^{(k)}g^{(k)}(g^{(k)})^\top B^{(k)}}{(g^{(k)})^\top B^{(k)} g^{(k)}} + \frac{h^{(k)}(h^{(k)})^\top}{(h^{(k)})^\top g^{(k)}},$$

em que $g^{(k)} = \theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}$ e $h^{(k)} = U(\theta^{(k+1)}) - U(\theta^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$. O máximo é obtido pela recorrência

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} B^{(k)} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\lambda^{(k)}$ é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $-B^{(k)}U(\theta^{(k)})$.

O método BFGS, supera uma limitação do método de Newton-Raphson onde a matriz $B_{(k)} = -H_k^{-1}$ pode não ser positiva definida se estivermos longe do ponto ótimo. Elimina também a necessidade do cálculo de segundas derivadas, da inversão da matriz hessiana e da avaliação desta matriz em cada iteração do processo otimizador [4].

A Distribuição Birnbaum-Saunders

Para chegar à esta distribuição, uma das suposições feitas por Birnbaum e Saunders (1969) foi que o tamanho da ruptura seguia uma distribuição normal. Entretanto, Desmond (1985) mostrou que uma variedade de distribuições para o tamanho da ruptura resulta em uma distribuição Birnbaum-Saunders ($BS(\alpha, \beta)$). A distribuição $BS(\alpha, \beta)$, possui a seguinte distribuição acumulada [6]:

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right], \qquad (2)$$

em que $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição acumulada normal padrão; e $0 < t < \infty$, $\alpha, \beta > 0$.

Considere a seguinte transformação monotônica para a distribuição $BS(\alpha, \beta)$:

$$X = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{T}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{T}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \qquad (3)$$

ou seja,

$$T = \beta\left[1 + 2X^2 + 2X\left(1 + X^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (4)$$

Então, temos que X tem distribuição normal com média zero e variância $\frac{1}{4}\alpha^2$. Usando a transformação dada acima, o valor esperado, a variância e os coeficientes de assimetria e curtose são dados, respectivamente, por:

$$E(T) = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right),$$

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2\left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right),$$

$$\gamma_3 = \frac{16\alpha^2\left(11\alpha^2 + 6\right)}{\left(5\alpha^2 + 4\right)^3}, \quad \gamma_4 = 3 + \frac{6\alpha^2\left(93\alpha^2 + 41\right)}{\left(5\alpha^2 + 4\right)^2}.$$

Além disso, se T tem distribuição $BS(\alpha, \beta)$, então T^{-1} tem distribuição $BS(\alpha, \beta^{-1})$. Conseqüentemente, temos que

$$E\left(T^{-1}\right) = \beta^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right),$$

$$Var\left(T^{-1}\right) = \left(\alpha\beta^{-1}\right)^2\left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right).$$

O parâmetro α é um parâmetro de forma; à medida que α tende a zero, a distribuição $BS(\alpha, \beta)$ tende para a distribuição normal de média β e variância τ, onde $\tau \to 0$ quando $\alpha \to 0$. O parâmetro β é um parâmetro de escala, isto é, $T/\beta \sim BS(\alpha, 1)$. Temos, ainda, que β é a mediana da distribuição, pois $F_T(\beta) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Para qualquer constante real $k > 0$, tem-se que $kT \sim BS(\alpha, k\beta)$.

Na Figura 1, tem-se a função densidade para alguns valores de α considerando $\beta = 1.0$. Observa-se, que para diferentes escolhas dos parâmetros (α, β), as suas respectivas funções de distribuição são diferentes, isto é, a distribuição $BS(\alpha, \beta)$ é identificável: se temos (α_1, β_1) e (α_2, β_2) com $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ou $\beta_1 \neq \beta_2$, as probabilidades correspondentes a $F(\cdot; \alpha_1; \beta_1)$ são diferentes das probabilidades correspondentes a $F(\cdot; \alpha_2; \beta_2)$.

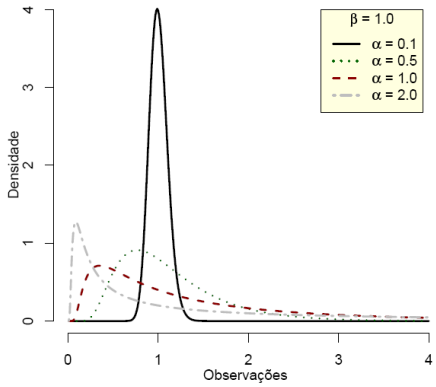

Figura 1: Gráfico da densidade Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α e $\beta = 1.0$

Estimadores de Máxima Verossimilhança - EMV

Este método consiste em obter estimadores pontuais a partir da maximização da função de verossimilhança. Segundo Cordeiro (1992), as estimativas de máxima verossimilhança apresentam propriedades importantes como: consistência, invariância e eficiência assintótica. Seja $t_1, \ldots, t_n$ uma amostra aleatória independente de tamanho n com distribuição $BS(\alpha, \beta)$. Então, o estimador de Máxima Verossimilhança para β (representado por $\widehat{\beta}$) é obtido pela raiz positiva da equação [1]:

$$\beta^2 - \beta\left[2r + K(\beta)\right] + r\left[s + K(\beta)\right] = 0, \qquad (5)$$

onde

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad s = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{-1}\right)^{-1},$$

$$K(\beta) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\beta + t_i)^{-1}\right)^{-1}.$$

Aqui s, r e $K(\beta)$ são a média aritmética, a média harmônica e a função da média harmônica, respectivamente. Importante destacar que para resolver a equação não-linear dada em (5) e obter o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\beta}$ é necessário utilizar um processo numérico iterativo que maximize a função de log-verossimilhança da distribuição $BS(\alpha, \beta)$. As derivadas da função de log-verossimilhança com respeito aos parâmetros α e β são [1]:

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha}\left(1 + \frac{2}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{\alpha^3\beta}\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{\beta}{\alpha^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i},$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i + \beta} +$$

$$+\frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}.$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são obtidos solucionando, simultaneamente:

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial l(\alpha)} = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial l(\beta)} = 0$$

Neste artigo, para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de α e β, a função de log-verossimilhança foi maximizada utilizando o algoritmo de otimização não-linear BFGS com derivadas analíticas. Com $\widehat{\beta}$ obtido como solução da equação (5), o estimador de máxima verossimilhança de α (denotado por $\widehat{\alpha}$) é obtido por:

$$\widehat{\alpha} = \left[\frac{r}{\widehat{\beta}} + \frac{\widehat{\beta}}{s} - 2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança com correção de viés - EMVc

Ng, Kundu, Balakrishnan (2003) introduziram uma correção de viés no estimador de máxima verossimilhanças, dados em [7] por:

$$Vies\left(\hat{\alpha}\right) \approx Vies\left(\tilde{\alpha}\right) \approx -\frac{\alpha}{n},$$

$$Vies\left(\hat{\beta}\right) \approx Vies\left(\tilde{\beta}\right) \approx -\frac{\alpha^2}{4n}.$$

Sendo assim, os estimadores de máxima verossimilhança com correção de viés são dados por:

$$\check{\alpha} = \left(\frac{n}{n-1}\right)\hat{\alpha},$$

$$\check{\beta} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{4n}\right)^{-1}\hat{\beta} \approx \left(1 + \frac{\check{\alpha}^2}{4n}\right)^{-1}\hat{\beta},$$

Após a estimação dos parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders e objetivando analisar os resultados da estimação pontual, calculou-se a média, variância, viés, erro quadrático médio, assimetria e curtose para cada tamanho de amostra. As estimativas são obtidas através das seguintes equações:

Média de α e β estimados:

$$E\left(\alpha\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i}{N}, \qquad E\left(\beta\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\beta_i}{N},$$

onde: N = número de repetições do experimento; α_i e β_i são os estimadores de α e β nas N repetições do experimento, respectivamente.

Variância de α e β estimados:

$$Var\left(\alpha\right) = E\left(\alpha^2\right) - \left(E(\alpha)\right)^2,$$

$$Var\left(\beta\right) = E\left(\beta^2\right) - \left(E(\beta)\right)^2,$$

em que:

$$E\left(\alpha^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2}{N}, \qquad E\left(\beta^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \beta_i^2}{N}.$$

Viés de α e β estimados:

$$Vies\left(\alpha\right) = E\left(\alpha\right) - \alpha, \qquad Vies\left(\beta\right) = E\left(\beta\right) - \beta.$$

Erro Quadrático Médio (EQM) de α e β estimados:

$$EQM\left(\alpha\right) = Var\left(\alpha\right) + Vies\left(\alpha\right)^2,$$

$$EQM\left(\beta\right) = Var\left(\beta\right) + Vies\left(\beta\right)^2.$$

Assimetria de α e β estimados:

$$\gamma_3\left(\alpha\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i - E\left(\alpha\right)\right)^3}{\left(n-1\right)\sqrt{\left(Var(\alpha)\right)^3}},$$

$$\gamma_3\left(\beta\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i - E\left(\beta\right)\right)^3}{\left(n-1\right)\sqrt{\left(Var(\beta)\right)^3}}.$$

Curtose de α e β estimados:

$$\gamma_4\left(\alpha\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i - E\left(\alpha\right)\right)^4}{\left(n-1\right)\left(Var(\alpha)\right)^2},$$

$$\gamma_4\left(\beta\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i - E\left(\beta\right)\right)^4}{\left(n-1\right)\left(Var(\beta)\right)^2}.$$

Resultados

Para comparar os desempenhos dos estimadores dos parâmetros da distribuição $BS(\alpha,\beta)$ obtidos pelos métodos de máxima verossimilhança e sua versão com correção de viés, realizou-se simulações de Monte Carlo para diferentes tamanhos de amostra e diferentes valores dos parâmetros. Os tamanhos de amostra considerados foram $n = 10$, 20, 50 e 100, considerando o parâmetro de forma $\alpha = 0.10$ e o parâmetro de escala $\beta = 1.0$. As simulações foram realizadas utilizando 10.000 réplicas de Monte Carlo e todo o processo executado a partir da linguagem de programação Ox.

A simulação de uma variável aleatória T com distribuição Birnbaum-Saunders com dois parâmetros foi realizada através da transformação monótona (3), onde a partir de (2) temos que $X \sim N(0, \frac{1}{4}\alpha^2)$. Assim, T pode ser escrito da forma (4). Ou seja, números pseudo-aleatórios da distribuição $BS(\alpha,\beta)$ foram obtidos a partir de números pseudo-aleatórios normais; os números pseudo-aleatórios normais foram gerados a partir de números pseudo-aleatórios uniformes, utilizando o gerador "multiply-with-carry", de período de aproximadamente 2^{60}, de George Marsaglia.

Para cada réplica de Monte Carlo foi gerada uma amostra aleatória da distribuição $BS(\alpha,\beta)$ $t_1,\ldots,t_n$, onde $t_i \sim BS(\alpha,\beta)$, $i = 1,\ldots,n$. Para o processo de maximização da função de log-verossimilhança foi empregado o método de otimização não-linear BFGS, cuja rotina de otimização utilizada foi a função MaxBFGS da linguagem de programação Ox, utilizando derivadas analíticas (fornecidas pelo usuário). Os valores de α e β associados ao ponto máximo desta função são as estimativas $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição $BS(\alpha,\beta)$. Além disso, também calculou-se os estimadores de máxima verossimilhança com correção de viés ($\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$).

Tabela 1: Estimativas do parâmetro α, no caso de $\alpha = 0.1$ usando o EMV.

n	10	20	50	100
Média	0,0923	0,0961	0,0986	0,0993
Variância	0,0222	0,0157	0,0101	0,0071
Assimetria	0,2283	0,1544	0,0706	0,0900
Curtose	3,0046	3,0085	3,0231	3,0270
Viés	$-0,0077$	$-0,0039$	$-0,0014$	$-0,0007$
EQM	0,0223	0,0157	0,0101	0,0071

Tabela 2: Estimativas do parâmetro α no caso de $\alpha = 0.1$ usando o EMVc.

n	10	20	50	100
Média	0,1025	0,1012	0,1006	0,1003
Variância	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001
Assimetria	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Curtose	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Viés	0,0025	0,0012	0,0006	0,0003
EQM	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001

Tabela 3: Estimativas do parâmetro β, no caso de $\beta = 1.0$ usando o EMV.

n	10	20	50	100
Média	1,0009	1,0005	1,0000	1,0000
Variância	0,0317	0,0222	0,0141	0,0101
Assimetria	0,1245	0,0794	0,0548	0,0342
Curtose	3,0669	2,9638	3,0117	3,0863
Viés	0,0009	0,0005	0,0000	0,0000
EQM	0,0317	0,0222	0,0141	0,0101

Nas Tabelas (1-4) apresentou-se, os resultados numéricos dos estimadores $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ e dos estimadores $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ para o caso em que $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$. Observa-se que as médias das estimativas de $\widehat{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ se

Tabela 4: Estimativas do parâmetro β no caso de $\beta = 1.0$ usando o EMVc.

n	10	20	50	100
Média	1,0006	1,0004	0,9999	1,0000
Variância	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001
Assimetria	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Curtose	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Viés	0,0004	0,0004	$-0,0001$	0,0000
EQM	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001

aproximam do parâmetro de forma α à medida que o tamanho da amostra aumenta. Entretanto, no que diz respeito ao viés, os estimadores $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ apresentam, em módulo, vieses consideravelmente menores que os vieses dos estimadores $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ para todos os tamanhos amostrais. Também é possível notar que a estimativa do EQM do estimador $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ não difere muito da estimativa do EQM do estimador $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$. Esse comportamento permanece para os diferentes tamanho de amostra. No que tange a assimetria, a distribuição dos estimadores $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ apresentaram valores concentrados à esquerda, já que esta medida é sempre positiva. Um outro fato interessante é que a curtose dos estimadores $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ estão próximas de 3, ou seja, a curtose destes estimadores estão próximas da curtose da distribuição normal padrão. Contudo, quando executada a correção dos vieses dos estimadores, tanto a assimetria quanto a curtose aproximam-se de zero.

De forma geral, verifica-se que com o aumento do tamanho da amostra o coeficiente de assimetria decresce e se aproxima de zero enquanto que para a curtose há uma leve variabilidade que não provoca mudanças bruscas no grau de achatamento de ambos os estimadores implementados. Ainda em relação à assimetria, notamos que a distribuição dos estimadores apresentam valores concentrados à esquerda, ou seja, assimétricas positivas; já em relação a curtose, as distribuições de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ têm uma forte tendência para curvas de pouco achatamento, ou seja, são distribuições com valores tipicamente concentrados em torno da média.

Considerações Finais

Este artigo implementou um programa em linguagem *Ox* para encontrar os estimadores dos parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders. Obteve-se os estimadores pelo Método da Máxima Verossimilhança e sua versão com correção de viés. Por não apresentar solução analítica de forma "fechada", encontrou-se os estimadores utilizando técnicas de otimização não-linear. Utilizou-se o método de otimização não-linear BFGS com derivadas analíticas para maximização numérica da função de log-verossimilhança, encontrando-se as estimativas pontuais dos parâmetros de forma α e de escala β. Com os resultados numéricos dos estimadores para o caso em que $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$, observou-se que as médias dos estimadores de α e β para os dois métodos se aproximam assintoticamente do parâmetro, ou seja, à medida que o tamanho da amostra aumenta. Entretanto, no caso dos estimadores com correção de viés, tais estimadores apresentam, em módulo, vieses e Erro Quadrático Médio (EQM) consideravelmente menores para todos os tamanhos amostrais. Notou-se também que a assimetria dos estimadores apresentou valores concentrados à esquerda. Um outro fato interessante é que a curtose dos estimadores aproximou-se de 3, ou seja, a curtose destes estimadores estão próximas da curtose da distribuição normal padrão. Contudo, quando executada a correção dos vieses dos estimadores, tanto a assimetria quanto a curtose aproximaram-se de zero. Dessa forma, o ganho de precisão do estimador com correção de viés é significativo.

Referências

[1] G. M. CORDEIRO (1992). *I*ntrodução à Teoria de Verossimilhança. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística.

[2] F. CRIBARI-NETO, S. G. Zarkos (2003). Econometric and statistical computing using Ox. *Computational Economics*, 21:277-295.

[3] J. A. DOORNIK, (2006). *Ox: An Object-Oriented Matrix Programming Language*. Timberlake Consultants Ltd, London, 4 ed..

[4] C. A. FRERY, F. CRIBARI-NETO, (2005). *E*lementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito. Publicações Matemáticas, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA.

[5] D. E. KNUTH, (1997). *The Art of Computer Programming*, vol. 2 (Seminumerical Algorithms). Addison-Wesley, 3 ed..

[6] A. J. LEMONTE, A. B. SIMAS, F. CRIBARI-NETO, (2008). Bootstrap-based improved estimators for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Jornal of Statistical Computation and Simulation*, vol.78, n^o1, p.37-49.

[7] H. K. T. NG, D. KUNDU, N. BALAKRISHNAN, (2003). *Modified moment estmation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribuition. Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, ScienceDirect, 43, p.283-298.