UTILIZANDO COMPUTADORES PARALELOS COM MEMÓRIA DISTRIBUÍDA E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM DOMÍNIOS 3D

Alessandro R. E. Antunes, Rogério Soares
Depto de Engenharia Civil, UFPE,
Av. Acadêmico Hélio Ramos S/N, CEP:50740530 , Recife, PE
areantunes@yahoo.com.br, rogsoares@yahoo.com.br

Paulo R. M. Lyra, Ramiro B. Willmersdorf
Depto de Engenharia Mecânica, UFPE,
Av. Acadêmico Hélio Ramos S/N, CEP:50740530 , Recife, PE
prmlyra@ufpe.br, ramiro@willmerdorf.net

Resumo: *O objetivo deste trabalho é discutir a implementação paralela em computadores com memória distribuída de uma formulação numérica para tratar as equações de Navier-Stokes Incompressíveis em domínios tridimensionais. As equações governantes finais são espacialmente discretizadas via Método dos Elementos Finitos Misto Estabilizada, com elementos tetraédricos lineares, e com estabilização do tipo SUPG para controlar a ordem da dicretização em regiões de gradientes elevados. A estrutura de dados é baseada nas arestas dos elementos, e este tipo de estrutura é atrativo tanto do ponto de vista de eficiência computacional quanto do ponto de vista numérico, garantindo ainda conservação local e simetria em nível discreto. A implementação computacional é feita em computadores paralelos com memória distribuída (clusters de pc's) utilizando-se a técnica de partição de domínios, efetuada através do Parmetis via PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) e comunicação via MPI (Message Passing Interface). Alguns exemplos numéricos são apresentados para verificar as implementações efetuadas.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, Navier-Stokes Incompressíveis, Computação Paralela, Estrutura de Dados por Arestas*

Introdução

Diversas formas de tratar numericamente problemas envolvendo escoamentos incompressíveis têm sido desenvolvidas ao longo das últimas décadas, das quais citamos: esquemas monolíticos, compressibilidade artificial, pré-condicionamento das equações de Navier-Stokes completas, métodos de projeção, ou "Fractional Step methods", dentre outros, todos apresentando vantagens e desvantagens [8]. Neste trabalho utiliza-se uma formulação implícita, monolítica, baseada no fracionamento algébrico das equações de Navier-Stokes que é desenvolvida de forma a se obter estabilidade para a pressão [5,16], preservando segunda ordem e permitindo a resolução de forma segregada. Esta formulação é implementada utilizando-se o método dos Elementos Finitos com uma estrutura de dados baseada nas arestas. Todos os elementos do LHS e RHS envolvidos nos sistemas algébricos finais são computados através de "loops" nas arestas, acumulando-se a contribuição de cada aresta para o sistema final. Os sistemas de equações são resolvidos utilizando o PETSc. Nesse trabalho, o paralelismo é baseado nas técnicas de particionamento de domínio, e as partições são obtidas usando o PARMETIS. A comunicação entre processadores e gerenciada pelo MPI.

Formulação Matemático-Numérica

As equações de Navier-Stokes incompressíveis, sem considerar efeitos térmicos, na sua forma contínua podem ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \upsilon\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } \Omega\times(0,t) \quad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega\times(0,t) \quad (2)$$

onde Ω é o domínio espacial do fluido, t é a variável tempo, $(0,t)$ é o intervalo de tempo, $\mathbf{u}$ é o campo de velocidade, υ é a viscosidade cinemática, p é a pressão, $\mathbf{f}$ é o vetor das forças aplicadas, ∇ é o operador gradiente e Δ é o operador laplaciano.

Sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor das tensões viscosas, $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal ao contorno $\partial\Omega$, e $\overline{t}$ as tensões de superfície, e denotando por uma sobre-barra os valores prescritos, as seguintes condições de contorno são consideradas:

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_{du}, \; p = \overline{p} \text{ e } \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \overline{\mathbf{t}} \text{ em } \Gamma_{nu} \quad (3)$$

O contorno foi considerado dividido em dois conjuntos disjuntos Γ_{du} e Γ_{nu} onde são prescritas as condições de Dirichlet e Neumann para cada equação do sistema resultante, respectivamente. Condições iniciais devem ser conhecidas em todo o domínio.

Fractional Step Method

Neste trabalho foi utilizado um método de projeção, ou "Fractional Step Method" [6,7], que foi obtido a partir de uma fatoração LU do sistema matricial resultante [6,7,9,11]. Este método é conhecido como fracionamento algébrico das equações, e assemelha-se ao fracionamento proposto por Chorin em 1967, e Temam em 1969, que consiste em utilizar a decomposição de Helmholtz de um vetor em suas componentes solenoidal e gradiente de uma função escalar. Uma das vantagens do fracionamento algébrico é o fato que as vaiáveis intermediárias resultantes do fracionamento não necessitam condições de contorno, pois não têm significado físico.

As equações de Navier-Stokes após discretização através do método dos elementos finitos misto levam ao seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{*} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

onde **B** contém as contribuições da matrizes de massa, convecção e difusão, **G** contém a contribuição da matriz gradiente e $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ contém a contribuição da matriz divergente. $\mathbf{f}^{*}$ é o vetor das forças aplicadas modificado pela contribuição da pressão e condições de contorno, e q contém as variáveis de pressão, sendo $q = p^{n+1} - p^{n}$ [2].

Note que a dificuldade em resolver o sistema acima vem do fato da existência de uma submatriz zero na matriz global, então, para que o sistema tenha solução é necessário que a matriz tenha posto completo, cuidados devem ser tomados com respeito às ordens de interpolação das variáveis de velocidade e pressão [20]. Entretanto isto pode ser contornado dividindo o sistema inicial em sistemas menores, que é a idéia central dos métodos de projeção. Efetuando uma fatoração LU do sistema acima resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}} & -\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Fazendo $\mathbf{B}^{-1}$ na matriz triangular inferior igual a $\mathbf{H}_1$ e na matriz triangular superior igual a $\mathbf{H}_2$ resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}} & -\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}_1\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H}_2\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}\mathbf{H}_2\mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathbf{T}} & \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\right)\mathbf{G} \end{bmatrix} \tag{6}$$

e diferentes aproximações da matriz $\mathbf{B}^{-1}$ ou $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ levam a diferentes tipos de métodos de projeção [2]. Fazendo $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{I}\Delta t$ tem-se o chamado "Classic Fractional Step Method" [2], e nenhuma matriz inversa precisa ser calculada, porém perde-se consistência em relação às equações de conservação, o que pode ocasionar dificuldades de convergência nas soluções aproximadas dos sistemas lineares.

Formulação Numérica

A seguir apresentamos o sistema discreto resultante, onde os termos temporais foram discretizados utilizando-se a regra trapezoidal, ou método θ, e a discretização espacial é obtida através do método dos elementos finitos [8]. O termo convectivo e o gradiente de pressão são estabilizados utilizando-se a projeção ortogonal destes termos no espaço de elementos finitos [4,5,16], o que na prática implica em controlar o resíduo mediante a aplicação do método dos resíduos ponderados, o que está apresentado no quinto e segundo termos das Eqs. 7 e 8, respectivamente.

A formulação variacional [16,17] o problema pode ser descrita como: dado $\mathbf{u}_h^n$ e p_h^n, encontrar $\left(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\pi}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1}\right)$ em $\mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$, tal que tenhamos:

$$\frac{1}{\delta t}\left(\mathbf{u}_h^{n+1,i} - \mathbf{u}_h^{n}, v_h\right) + \left(\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, v_h\right) +$$
$$\left(\upsilon \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \nabla v_h\right) - \left(p_h^{n+1,i-1}, \nabla \cdot v_h\right) +$$
$$\left(\tau\left(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} - \beta^{n+1,i-1}\boldsymbol{\pi}_h^{n+\theta,i-1}\right), \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla v_h\right) =$$
$$\left(\mathbf{f}^{n+\theta}, v_h\right) + \left(\boldsymbol{\sigma}^{n+\theta,i-1} \cdot \mathbf{n}, v_h\right)_{\Gamma_{nu}} \tag{7}$$

$$\delta t\left(\nabla p_h^{n+1,i} - \nabla p_h^{n+1,i-1}, \nabla q_h\right) + \left(\tau\left(\nabla p_h^{n+1,i} - \beta^{n+1,i-1}\boldsymbol{\xi}_h^{n+1,i-1}\right), \nabla q_h\right) = -$$
$$\left(\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}, q_h\right) \tag{8}$$

$$\left(\boldsymbol{\pi}_h^{n+\theta,i}, \tilde{v}_h\right) = \left(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \tilde{v}_h\right) \tag{9}$$

$$\left(\xi_h^{n+1,i}, \tilde{v}_h\right) = \left(\nabla p_h^{n+1,i}, \tilde{v}_h\right) \tag{10}$$

$$\forall\left(v_h, q_h, \tilde{v}_h, \tilde{v}_h\right) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$$

onde $\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\pi}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1}$ são o vetor velocidade, a pressão, a projeção do termo convectivo e a projeção do gradiente de pressão no espaço de elementos finitos, respectivamente, e $\mathbf{V}_h \times Q_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$ são os espaços funcionais de elementos finitos correspondentes às variáveis acima citadas, respectivamente. Os sobrescritos n e i referem-se ao passo de tempo e ao contador de iterações em cada passo de tempo, respectivamente, o subescrito h refere-se à variáveis discretas, δt é o tamanho do passo de tempo, β é o parâmetro de estabilização na presença de gradientes acentuados, controlado pelo gradiente de pressão, cuja variação restringe-se ao intervalo $I=[0\ 1]$, tomando valores próximos de 1 em regiões onde o campo de pressão é suave, e próximo de 0 em regiões com fortes gradientes de pressão [12,17], τ é o parâmetro que controla a estabilidade e a convergência do sistema, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões viscosas, **f** é o vetor das forças externas aplicadas e condições de contorno, Γ_{nu} é a porção do contorno com condições de contorno de Neumann, υ é a viscosidade cinemática do fluido, e v_h, $\tilde{V}_h$, q_h, são as funções de ponderação dos espaços de elementos finitos para a ve-

locidade, as projeções da convecção e do gradiente de pressão e da pressão, respectivamente. Temos ainda a forma funcional (·,·), definida como:

$$(a,b) = \int_{\Omega} a \cdot b d\Omega \qquad (a,b)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} a \cdot b d\Gamma \qquad (11)$$

As variáveis $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\xi}$ são auxiliares que foram obtidas de forma algébrica através das fatorações LU realizadas nos sistemas lineares.

Estrutura de Dados por Arestas

As matrizes resultantes da discretização espacial por elementos finitos são obtidas mediante uma estrutura de dados por arestas [12], que tem como principal vantagem sobre uma estrutura baseada nos elementos, o ganho de tempo computacional, pois muitos termos discretos são computados no início, como pré-processamento, e apenas algumas poucas operações necessitam serem implementadas para que sejam re-computados os diferentes termos do sistema. Também, através de uma implementação por arestas, é possível garantir a conservação local e a simetria em nível discreto [17].

A seguir é apresentado, de forma simplificada, como é realizada a mudança de estrutura de dados, partindo do termo contínuo para o termo discreto com *loop* nos elementos e modificando para *loop* nas arestas.

Seja então o primeiro termo da Eq. (8), que possui caráter de transporte difusivo, eliminando os sub/super-índices por simplicidade, e assumindo que E, S, I, J, IJ, k, $ndim$, Ω, Ω_E, x_k, m, $\sum_{E \supset I}$, $\sum_{E \supset IJ}$, $\sum_{S=1}^{m}$, referem-se a: elemento, aresta, nó inicial da aresta, nó final da aresta, aresta do nó *I* a *J*, direção coordenada, dimensão espacial, domínio total, domínio do elemento, coordenada espacial na direção *k,* número de arestas, somatório sobre todos os elementos que contém o nó *J*, somatório sobre todos os elementos que contém a aresta *IJ*, e somatório sobre todas as arestas, respectivamente, temos:

$$(\nabla p, \nabla N) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla N d\Omega = \sum_{S=1}^{m} C_{IJ} \left(\hat{p}_I - \hat{p}_J \right) \qquad (12)$$

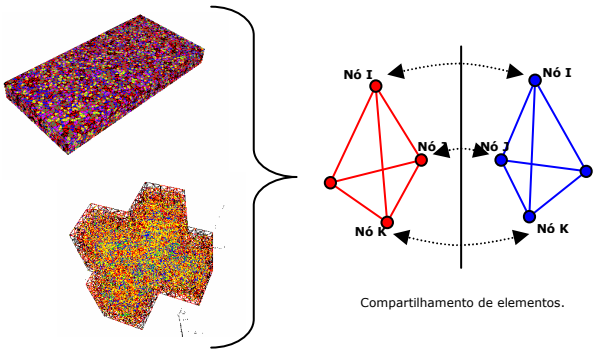
onde C_{IJ} é o coeficiente associado à aresta *IJ* dado por

$$C_{IJ} = \sum_{E \supset IJ} \int_{\Omega_E} \left(\sum_{k=1}^{n\dim} \frac{\partial N_I}{\partial x_k} \frac{\partial N_J}{\partial x_k} \right) d\Omega_E \qquad (13)$$

Note que o termo final da Eq. (16) é naturalmente conservativo, mesmo em nível discreto, o que do ponto de vista físico, isto significa que o transporte difusivo do ponto *I* para o ponto *J,* é igual ao transporte difusivo do ponto *J* para o ponto *I*. Esta propriedade é garantida para todos os termos de cada equação do sistema resultante, fazendo com que os termos que não são naturalmente conservativos, tornem-se conservativos, obtendo os termos da diagonal principal de cada matriz resultante de cada termo do sistema, como a negativa da soma dos elementos que estão fora da diagonal principal, porém na mesma linha, sendo, portanto, garantida a conservação de todo o sistema em nível discreto [17].

Tópicos de Computação Paralela

O uso de computadores paralelos oferece a possibilidade de resolver problemas de tamanhos praticamente impossíveis de serem tratados por máquinas com apenas uma CPU desta forma viabilizando análise em tempo aceitável. Para máquinas de memória distribuída, o tamanho dos problemas que podem ser tratados pelo computador pode ser aumentado, permitindo que cada processador trate com uma parte do problema. Desta forma ainda o tempo de tratamento de um determinado problema pode ser consideravelmente reduzido. Os problemas envolvendo escoamento de fluidos possuem natureza extremamente complexa, portanto, requerem um enorme esforço computacional para realizar simulações precisas. Em geral, os problemas a serem resolvidos envolvem quantidades enormes de dados, pois são problemas de grande porte, e as malhas computacionais envolvidas necessitam alto grau de refinamento para capturar os fenômenos envolvidos com a precisão desejada. Sendo assim, um paradigma da computação paralela na Dinâmica dos Fluidos Computacional é a decomposição de domínio, que consiste em particionar o domínio de interesse em subdomínios e atribuir cada subdomínio a um processador. Para isso foi utilizado o Parmetis (Parallel Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering) [10], que é uma biblioteca paralela baseada em MPI (Message Passing Interface) [13,14]que possui uma grande variedade de algoritmos para particionamento e reparticionamento de malhas não estruturadas, de forma a reduzir a esparsidade de matrizes, e assim reduzir a comunicação entre subdomínios. Em se tratando de problemas de grande escala, ou seja, envolvendo malhas computacionais com grande quantidade de elementos, a comunicação entre os processos envolvidos pode ser drasticamente reduzida se a malha for decomposta de tal forma que o número de interfaces (elementos nas interfaces) seja minimizado.



Particionamento de malha aleatório.

Figura 1: Exemplo de particionamento aleatório.

Na Fig.1, acima, um exemplo de particonamento de malha utilizando um procedimento aleatório, possibilita a resolução do problema em múltiplos processadores, porém, como mostrado, as interfaces entre elementos em diferentes processadores tomam proporções que tornam computacionalmente inviável a obtenção da solução, devido à enorme quantidade de comunicação necessária a cada passo de tempo.

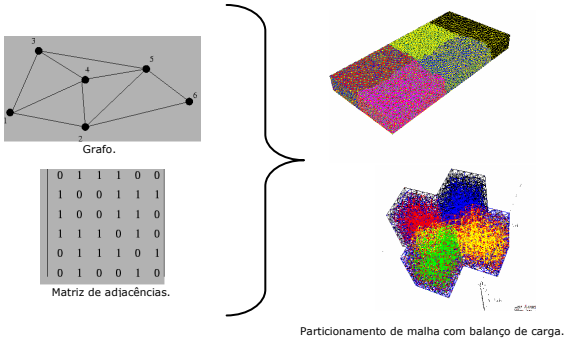


Figura 2: Exemplo de particionamento com balanço de carga.

A Fig.2 mostra uma malha tridimensional com um particionamento utilizando o Parmetis onde fica evidente que as interfaces entre os processos foram reduzidas, gerando grande economia no tempo computacional que seria desperdiçado durante as comunicações entre os processos. O particionamento com balanço de carga e minimização das interfaces é realizado através de uma matriz de adjacências do grafo representativo da malha computacional. Neste caso, a comunicação paralela é necessária apenas em uma região do domínio, sendo que a maior parte dos nós da malha pertencem a apenas um processo.

A Fig.3 mostra uma malha particionada para 4 processadores, onde podemos analisar a comunicação necessária par este particionamento.

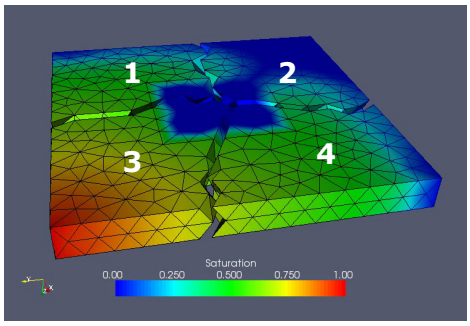


Figura 3: Exemplo de particionamento de malha com 4 processadores.

A Fig.4 mostra o nível de comunicação necessária para o particionamento da Fig.3, onde as setas representam as comunicações necessárias. Note que há nós que estão contidos em todos os processos, e neste caso, todos os processadores necessitam de informações sobre as varáveis de campo nestes nós, indicando um alto nível de comunicação nesta região.

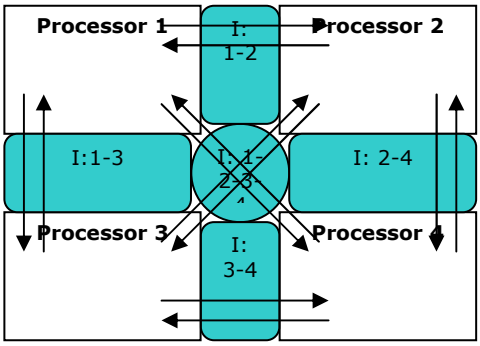


Figura 4: Esquematização da comunicação entre processadores.

Neste trabalho estamos utilizando o PETSC (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computations) [15], que consiste em um conjunto de ferramentas que auxiliam em diversas etapas do processamento de informações. O PETSc é essencialmente útil para a obtenção de soluções numéricas de equações diferenciais parciais quando utiliza-se computação de alto desempenho, pois consiste de rotinas que auxiliam na definição de estruturas de dados e estruturas matriciais em ambientes que envolvem computação em grande escala. Uma outra vantagem é que o PETSc utiliza o MPI para viabilizar suas estruturas paralelas. O PETSc possui aplicações desenvolvidas em Fortran, C e C++, tais como rotinas de soma e produto matricial, necessárias na simulação de escoamentos fluidos.

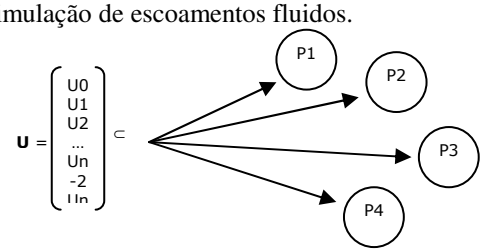


Figura 5: Exemplo de variável vetorial no PETSC.

A Fig.5 mostra um exemplo de um vetor definido em ambiente paralelo. Esta variável vetorial, quando definida para vários processadores, é dividida de forma que cada processador mantém localmente uma apenas uma parte do vetor, sendo partes as restantes encontram-se em outros processadores. Desta forma é vantajoso que os nós locais a cada processo sejam armazenados nas posições do vetor que estão locais ao mesmo processo. Isto evita que comunicação adicional seja necessária cada vez que uma informação do vetor tenha que ser buscada. Com isso, foi realizado um mapeamento dos nós da malha, que maximiza a utilização das posições locais do vetor pelos nós locais do mesmo processador, como mostra a Fig.6.

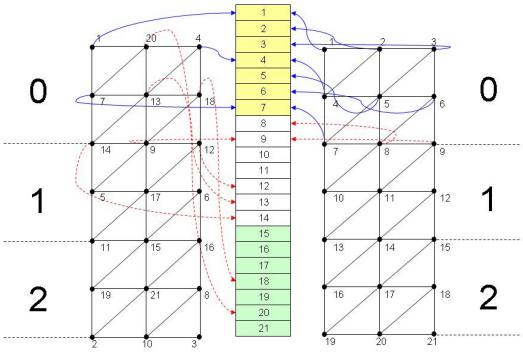


Figura 6: Mapeamento da malha particionada.

Aplicações Numéricas

Back-Facing Step

Neste exemplo foi considerado um escoamento viscoso e incompressível em um canal com um "back-facing step". A malha computacional utilizada neste exemplo possui 77163 elementos tetraédricos, e o número de partições utilizadas foi 2.

Sendo de *1m* a dimensão da entrada do canal, *0.94m* a altura do degrau, e de *31m* o comprimento total do canal.

As condições de contorno para este caso são:

- entrada: perfil de velocidade parabólico prescrito
- saída: pressão prescrita $p = 0$ e o tensor viscoso é prescrito como zero
- condição de não deslizamento nas paredes do canal: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- nas fronteiras frente e trás o tensor viscoso nas direções x e z foi prescrito como zero, e a componente da velocidade na direção y foi prescrita como zero.

As simulações foram realizadas com números de Reynolds 100 e 1000, e U_{max} é a máxima velocidade na entrada, ajustada para se obter o Reynolds desejado. Neste caso o número de Reynolds é dado por:

$$\mathrm{Re} = \frac{(2/3)U_{max}\,2h}{\upsilon} \tag{14}$$

Número de Reynolds 100

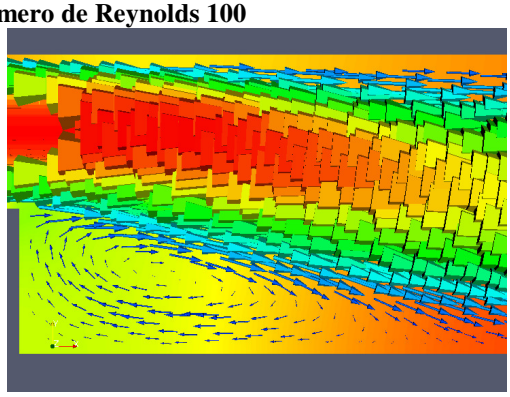


Figura 7. Detalhe do campo na região de recirculação.

A Fig. 7 mostra o campo de velocidade, detalhando o vórtice formado devido à presença do degrau.

A Fig. 8 mostra o campo de pressão, onde verifica-se uma queda de pressão na região de recirculação

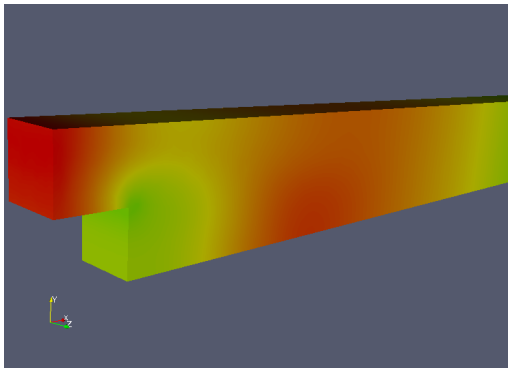


Figura 8. Mapa de cores do campo de pressão.

Neste exemplo comparamos com outros autores o comprimento do vórtice, e neste trabalho o vórtice teve comprimento de 2,6, muito próximo dos valores encontrados na literatura [1,19], que ficam em torno de 2,8.

Número de Reynolds 1000

A Fig. 9 mostra o campo de velocidade, detalhando o segundo vórtice formado na parede superior devido à presença do degrau e o alto número de Reynolds.

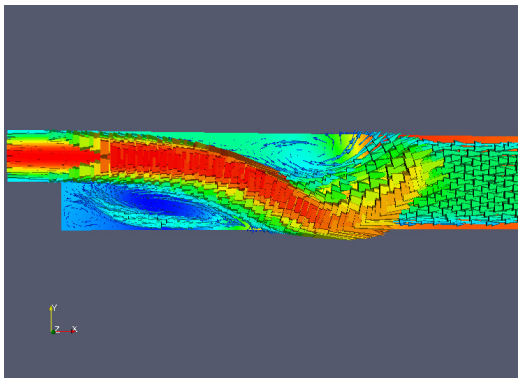


Figura 9. Campo de velocidade (a), e detalhe do campo na região de recirculação (b).

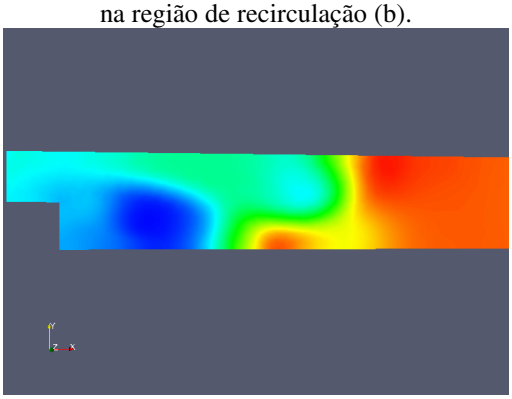


Figura 10. Mapa de cores do campo de pressão.

A Fig. 10 mostra o campo de pressão, onde podemos verificar nas regiões de recirculação uma queda de pressão, como esperado.

Neste exemplo objetivamos observar a captura da fenômeno físico, pois a partir de Reynolds 1000, há a formação de um vórtice na parede superior.

Conclusões

Uma formulação matemático-numérica monolítica, implícita, e com propriedades de estabilidade para a pressão e para a convecção, discretizada através da aplicação do Método dos Elementos Finitos e o Fractional Step, baseado em uma estrutura de dados por arestas, e utilizando computadores com memória distribuída foi apresentada para resolver problemas envolvendo as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Resultados numéricos foram obtidos, e comparados com resultados obtidos por outros autores, indicando de forma promissora a eficiência da formulação para simular escoamentos laminares com diferentes números de Reynolds.

Referências Bibliográficas

[1] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, Schönubg, B., Experimental and theoretical investigation if backward-facing step flow, Journal Fluid Mech., vol 127, p. 473-496, 1983.

[2] W. Chang, F. Giraldo, B. Perot, Analysis of an exact fractional step method, J. Computational Physics, vol 180, p. 183-199, 2002.

[3] A. J. Chorin, A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Problem, J. Comput. Phys., vol 2, 1967.

[4] R. Codina, Stabilization of incompressible and convection trough orthogonal sub-scales in finite element methods, Compt. Meth. Applied mechanics and Engineering, v. 190, p. 1579-1599, 2000.

[5] R. Codina, Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows, J. Computational Physics, vol 170, p. 112-140, 2001.

[6] R. Codina, Stability finite element approximation of transient flows using orthogonal subscales, Comp. Meth. Applied mechanics and Engineering, vol 191, p. 4295-4321, 2002.

[7] J. Donea, A. Huerta, Finite Element Methods for Flow Problems, John Wiley & Sons Ltd., 350p, 2003.

[8] P. M. Gresho, R. L. Sani, Incompressible flow and the finite element method, John Wiley & Sons, vols 1 e 2, 1998.

[9] O. M. Henriksen, J. Holmen, Algebraic splitting for incompressible Navier-Stokes equations, J. Computational Physics, vol 175, p. 438-453, 2002.

[10] G. Karypis, K. Schgloegel, and V. Kumar, PARMETIS – Parallel Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering Library, Reference Manual, University of Minnesota, 2003.

[11] J. B. Perot, An analysis of the fractional step method, J. Computational Physics, vol 108, p. 51-58, 1993.

[12] R. Löhner, Applied CFD techniques - An introduction based on finite element methods, john Wiley & Sons Ltd., 2001.

[13] P. S. Pacheco, *MPI User's Guide in FORTRAN,* 1995.

[14] P. S. Pacheco, Parallel Programming with MPI, Morgan Kaufmam Publishers Inc, 1997.

[15] PETSc Online Manual, Web page. http:/www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-as/documentation.

[16] O. Soto, R. Löhner, J. Cebral, An implicit monolithic accurate finite element scheme for incompressible flow problems. In: 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, EUA, june, 2001.

[17] O. Soto, R. Löhner, J. Cebral, Camelli, F., A stabilized edge-based implicit incompressible flow formulation, Comp. Meth. Applied Mechanics and Engineering, vol 193, p. 2139-2154, 2004.

[18] R. Temam, Sur l'approximation de la solutin des équaciones de Navier-Stokes par la méthode dês pás fractionaires (I), Arch. Ration. Mech. Anal., vol 32, 1969.

[19] P. T. Williams, A. J. Baker, Numerical simulations of laminar flow over a 3D backward-facing step, Int. Journal Num. Meth. In Fluids, vol 24, p. 1159-1183, 1997.

[20] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, The finite element method: basic formulation and linear problems, vol 1, MacGraw-Hill, 4ª edition, 1988.