# VIII ERMAC-R3

**5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional**

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN


---

# Categorias de $t$–normas em Reticulados Limitados


**E. S. Palmeira** **G. I. Gomero**,

Depto. de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET, UESC,

45662-000, Ilhéus, BA

E-mail: espalmeira@uesc.br, gigferrer@uesc.br,



## Resumo

Após uma revisão do conceito de morfismo de reticulados, construímos dois tipos de categorias de reticulados limitados e analisamos suas diferenças. Uma destas categorias permite uma definição natural de morfismo de $t$–normas, e de categoria de $t$–normas. Esta definição pode ser copiada utilizando a outra noção de morfismo de reticulados. A nova definição de morfismo de $t$–normas permite também a introdução da noção de grupo de simetrias de uma $t$–normas. Apresentamos alguns avanços obtidos no estudo das propriedades destes grupos.



## Palavras-chave

Reticulados limitados, $t$–normas, morfismos de reticulados, morfismos de $t$–normas, simetrias de $t$–normas.


## 1 Introdução

Existem duas definições equivalentes de reticulados, uma algébrica e outra usando uma relação de ordem parcial. Enunciemos estas definições para o caso que nos interessa, o de reticulados limitados.

**Definição 1.1** Um **reticulado limitado** é uma estrutura algébrica $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ tal que $0, 1 \in L$, $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias comutativas e associativas que satisfazem leis de absorção, 0 é o elemento neutro de $\vee$ e 1 é o elemento neutro de $\wedge$.

**Definição 1.2** Um **reticulado limitado** é um conjunto estruturado $\mathbf{L} = \langle L, \leq, 1, 0\rangle$ onde $\leq$ é uma ordem parcial em $L$, 1 é o maior elemento de $L$, 0 é o menor elemento de $L$, e para todo $x, y \in L$ existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Se $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado segundo a Definição 1.1, defina $x \leq y$ se e somente se $x = x \wedge y$ para todo $x, y \in L$. Temos que $\mathbf{L}_o = \langle L, \leq, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado segundo a Definição 1.2. Reciprocamente, ae $\mathbf{L} = \langle L, \leq, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado segundo a Definição 1.2, defina as operações $\wedge$ e $\vee$ fazendo $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ e $x \vee y = \sup\{x, y\}$ para todo $x, y \in L$. Temos que $\mathbf{L}_a = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado segundo a Definição 1.1. Mais ainda, se começarmos com um reticulado limitado $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$, definido algebricamente, então $(\mathbf{L}_o)_a = \mathbf{L}$, e reciprocamente, se começarmos com um reticulado limitado $\mathbf{L} = \langle L, \leq, 1, 0\rangle$, definido com uma relação de ordem parcial, então $(\mathbf{L}_a)_o = \mathbf{L}$.

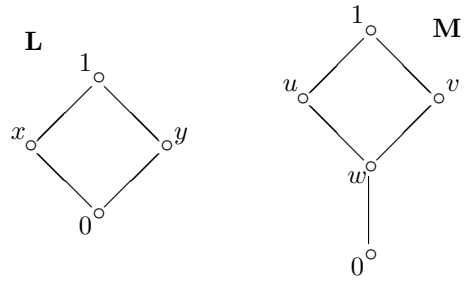
Passemos agora à definição de morfismos entre reticulados limitados. Podemos começar com qualquer uma das duas definições de reticulado limitado para definir um morfismo da maneira natural. Como as duas definições de reticulado são equivalentes, então as duas definições resultantes de morfismos serão equivalentes, certo? Errado! Em geral existem mais morfismos definidos usando a relação de ordem. Para entender como isto acontece, enunciemos as duas possíveis definições de morfismos de reticulados limitados.

**Definição 1.3** Sejam $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ dois reticulados limitados segundo a Definição 1.1. Um **morfismo** de $\mathbf{L}$ a $\mathbf{M}$ é uma função $f : L \to M$ que preserva as opreções binárias e os elementos neutros.

**Definição 1.4** Sejam $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ dois reticulados limitados segundo a Definição 1.2. Um **morfismo** de $\mathbf{L}$ a $\mathbf{M}$ é uma função $f : L \to M$ que preserva a estrutura de ordem e os elementos máximo e mínimo.

Acontece que um morfismo definido algebricamente é também um morfismo definido pela relação de ordem. De fato, se $f : L \to M$ é um morfismo definido algébricamente, e $x, y \in L$ são tais que $x \leq y$, i.e. $x = x \wedge y$, então temos $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, e portanto $f(x) \leq f(y)$. No entanto, se $f : L \to M$ é um morfismo definido por uma relação de ordem, como $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$, temos que $f(x \wedge y) \leq f(x)$ e $f(x \wedge y) \leq f(y)$. Mas daquí temos apenas que $f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y) = \inf\{f(x), f(y)\}$, e pode acontecer que $f(x \wedge y) \neq \inf\{f(x), f(y)\}$. Um exemplo simples mostra que esta possibilidade pode, de fato, acontecer.

**Exemplo 1.1** Considere os reticulados $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ dados pelos seguintes diagramas de Hasse.



A função $f : L \to M$ que preserva os extremos e tal que $f(x) = u$ e $f(y) = v$ é obviamente um morfismo segundo a Definição 1.4 mas não segundo a Definição 1.3 pois não preserva a operação $\wedge$.

Neste trabalho estudamos algumas consequências interessantes deste fato. Na Seção 2 estudamos imersões, mergulhos e conceitos afins. Entre outras coisas, mostramos que a possibilidade de mergulhar um reticulado em outro depende da definição de morfismo escolhida. Na Seção 3 estudamos as duas categorias mais simples que podemos construir usando as definições de morfismo apresentadas e mostramos as diferenças entre ambas. Na Seção 4 estudamos $t$–normas em reticulados limitados, generalizamos a noção de morfismo de $t$–normas, e definimos o conceito de de grupo de simetrias de uma $t$–norma. Na Seção 5 estudamos categorias de $t$–normas em reticulados limitados gerados pelas diferentes definições de morfismos de $t$–normas. Finalmente, na Seção 6 revisamos nossos resultados e levantamos algumas questões interessantes.

## 2 Subreticulados e mergulhos

Um isomorfismo entre os reticulados limitados $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ um morfismo bijetivo cuja inversa é também um morfismo. Agora, será que existem duas noções diferentes do conceito de isomorfismo entre reticulados limitados? Negativo. As duas definições de morfismo geram definições equivalentes de isomorfismo. Em primeiro lugar, como um morfismo definido algebricamente é também um morfismo definido por uma relação de ordem, o mesmo acontece com os isomorfismos.

Por outro lado, considere um isomorfismo $f : L \to M$ definido com uma relação de ordem, i.e. tal que $f$ e $f^{-1}$ preservão a ordem. Como $f$ é um morfismo temos que para todo $x, y \in L$ vale $f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$. Além disso, como $f^{-1}$ é também um morfismo, temos

$$f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leq f^{-1}(f(x)) \wedge f^{-1}(f(y)) = x \wedge y \ ,$$

e portanto $f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$. Segue–se que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, ou seja $f$ é um morfismo definido algebricamente. O mesmo vale para $f^{-1}$.

Uma imersão de $\mathbf{L}$ em $\mathbf{M}$ é um morfismo injetivo $f : L \to M$. Um mergulho de $\mathbf{L}$ em $\mathbf{M}$ é uma imersão tal que $L$ e $f(L)$ definem reticulados limitados isomorfos. Um subconjunto $N \subseteq M$ é um subreticulado de $\mathbf{M}$ se é a imagem de um mergulho. Estas definições devem ser interpretadas de acordo com a escolha das definições usadas para reticulado e morfismo. No Exemplo 1.1, o conjunto $N = \{0, u, v, 1\}$ será um subreticulado de $\mathbf{M}$ se considerarmos a estrutura de ordem, mas não se usarmos a definição algébrica.

Mais ainda, usando a Definição 1.3, uma imersão de $\mathbf{L}$ em $\mathbf{M}$ é um mergulho, mas isto não é assim se usamos a Definição 1.4. De fato, considere os reticulados $\mathbf{L}$ do Exemplo 1.1 e $\mathbf{L}' = \langle L, \preceq, 0, 1\rangle$, com o mesmo conjunto de base $L$, mas relação de ordem $\preceq$ dada por $0 \preceq x \preceq y \preceq 1$. A função identidade $\mathrm{id} : \mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ é uma imersão, segundo a Definição 1.4, mas não um mergulho pois $\mathbf{L}$ e $\mathbf{L}'$ não são reticulados isomorfos.

Vamos descrever agora um outro resultado curioso. Neste caso as duas definições de morfismo permitem um mergulho de um reticulado em outro, mas o subreticulado correspondente possui propriedades diferentes em cada caso. Mais ainda, parece ser que esta diferença tem consequências importantes na teoria e nas aplicações. Vamos usar duas construções dadas em [1].

Dado um reticulado $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$, defina o reticulado produto pela estrutura algébrica

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = \langle L \times L, \wedge, \vee, (1,1), (0,0)\rangle$$

com as operações definidas ponto a ponto, ou seja, para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L \times L$,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) &= (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) \quad \text{e} \\ (x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) &= (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Daqui obtemos a ordem parcial

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \leftrightarrow \quad x_1 \leq y_1 \ \text{ e } \ x_2 \leq y_2 \ . \tag{2}$$

Por outro lado, para cada $x, y \in L$ tais que $x \leq y$, defina o intervalo

$$[x, y] = \{z \in L \ / \ x \leq z \leq y\} \ ,$$

e o conjunto dos intervalos de $L$ como

$$IL = \{[x, y] \ / \ x, y \in L \quad \text{e} \quad x \leq y\} \ .$$

O reticulado dos intervalos de $\mathbf{L}$ é

$$\mathbb{I}\mathbf{L} = \langle IL, \wedge, \vee, [1,1], [0,0]\rangle \ ,$$

com as operações definidas ponto a ponto, ou seja, para quaisquer $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in IL$,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \wedge [y_1, y_2] &= [x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2] \quad \text{e} \\ [x_1, x_2] \vee [y_1, y_2] &= [x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2] \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Daqui obtemos a ordem parcial

$$[x_1, x_2] \leq [y_1, y_2] \quad \leftrightarrow \quad x_1 \leq y_1 \ \text{ e } \ x_2 \leq y_2 \ . \tag{4}$$

Comparando as operações (1) e (3), ou as relações de ordem (2) e (4), resulta evidente que os reticulados produto e de intervalos são muito parecidos, sendo as únicas diferenças a notação "(, )" num deles e "[, ]" no outro, assim como a restrição $x \leq y$ para o reticulado dos intervalos. Temos de fato que a inclusão

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & IL & \to & L \times L \\ & [x, y] & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

é um mergulho, seja definindo morfismos algebricamente ou com uma relação de ordem. Isto é óbvio comparando as operações (1) e (3), e as relações de ordem (2) e (4).

Defina agora a projeção

$$\begin{array}{rcl} \rho : L \times L & \to & IL \\ (x,y) & \mapsto & [x \wedge y, x \vee y] \ . \end{array}$$

Segue–se imediatamente que $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_{IL}$, e portanto se $\rho$ fosse um morfismo, $\mathbb{I}\mathbf{L}$ seria uma seção de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$. Acontece que $\rho$ é um morfismo segundo a Definição 1.4, mas não segundo a Definição 1.3.

De fato, sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L \times L$ tais que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$. Como $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$, segue–se que $x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \wedge y_2$ e $x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$, e portanto

$$\begin{array}{rcl} \rho(x_1, x_2) & = & [x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2] \\ & \leq & [y_1 \wedge y_2, y_1 \vee y_2] \\ & = & \rho(y_1, y_2) \ , \end{array}$$

ou seja $\rho$ é um morfismo de acordo à Definição 1.4.

Por outro lado, dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L \times L$, temos

$$\begin{array}{rcl} \rho((x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2)) & = & \rho(x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) \\ & = & [(x_1 \wedge y_1) \wedge (x_2 \wedge y_2), \\ & & \quad (x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2)] \ . \end{array}$$

Usando comutatividade e associatividade obtemos

$$(x_1 \wedge y_1) \wedge (x_2 \wedge y_2) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (y_1 \wedge y_2) \ ,$$

no entanto

$$(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee y_2)$$

não vale, como pode ser verificado tomando $x_1 = 0$, $y_1 = 1$. Do mesmo modo, a operação $\vee$ também não é preservada pela projeção $\rho$.

# 3 Duas categorias de reticulados limitados

Como temos dois tipos diferentes de morfismos de reticulados, podemos definir dois tipos diferentes de categorias de reticulados, uma categoria *de ordem* e uma categoria *de álgebra*. Seja $\mathcal{L}_o$ a categoria de reticulados limitados com morfismos definidos por uma relação de ordem, e $\mathcal{L}_a$ a categoria de reticulados limitados com morfismos definidos algebricamente. Como um morfismo *algébrico* é um morfismo *de ordem*, segue–se que $\mathcal{L}_a$ é uma subcategoria de $\mathcal{L}_o$ com a mesma classe de objetos.

As duas categorias têm objetos iniciais e terminais. Os objetos terminais são definidos por conjuntos unitários com relação de ordem ou operações binárias definidas da maneira óbvia. Os objetos iniciais são definidos por conjuntos binários, com relação de ordem ou operações binárias também definidas da maneira óbvia. Como os objetos iniciais e terminais são diferentes, não existe objeto nulo nem morfismos nulos.

Dados dois reticulados $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{M} = \langle M, \wedge, \vee, 1, 0 \rangle$, defina o produto de reticulados pela estrutura algébrica

$$\mathbf{L} \times \mathbf{M} = \langle L \times M, \wedge, \vee, (1,1), (0,0) \rangle$$

com as operações definidas ponto a ponto, ou seja, para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$,

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) & = & (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \quad \text{e} \\ (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) & = & (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \ . \end{array} \tag{5}$$

Daqui obtemos a ordem parcial

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \quad \leftrightarrow \quad x_1 \leq x_2 \ \text{ e } \ y_1 \leq y_2 \ . \tag{6}$$

Mostra–se facilmente que as projeções canônicas $\pi_L : \mathbf{L} \times \mathbf{M} \to \mathbf{L}$ e $\pi_M : \mathbf{L} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ são morfismos em $\mathcal{L}_o$ assim como em $\mathcal{L}_a$. Mais ainda, nas duas categorias $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$ satisfaz a propriedade universal de um produto, e esta construção pode ser generalizada a produtos arbitrários.

No entanto, parece que estas categorias se comportam de modo diferente com pullbacks e outros limites. Dados dois morfismos $f : \mathbf{L} \to \mathbf{K}$ e $g : \mathbf{M} \to \mathbf{K}$, o correspondente pullback, se existir, é o reticulado definido pelo conjunto

$$L \rtimes_K M = \{(x, y) \in L \times M \ / \ f(x) = g(y)\} \ ,$$

com estrutura definida por restrição do produto $L \times M$. É fácil mostrar que pullbacks existem em $\mathcal{L}_a$. De fato, para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \rtimes_K M$ temos

$$\begin{array}{rcl} f(x_1 \wedge x_2) & = & f(x_1) \wedge f(x_2) \\ & = & g(y_1) \wedge g(y_2) \\ & = & g(y_1 \wedge y_2) \ , \end{array}$$

e portanto $(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) \in L \rtimes_K M$. O mesmo vale para a operação $\vee$, de modo que o pullback $\mathbf{L} \rtimes_{\mathbf{K}} \mathbf{M}$ é um subreticulado de $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$. A situação em $\mathcal{L}_o$ não está definida ainda, não sabemos se existem pullbacks em $\mathcal{L}_o$.

Uma outra construção interessante em [1] é a soma colapsada $\mathbf{L} + \mathbf{M}$, que não é mais que o pushout de $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ por imersões de um objeto inicial, $i_L : \mathbf{I} \to \mathbf{L}$ e $i_M : \mathbf{I} \to \mathbf{M}$. Dados dois morfismos $f : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ e $g : \mathbf{K} \to \mathbf{M}$, o correspondente pushout, se existir, é o reticulado definido pelo conjunto

$$L \cup_K M = ((L \setminus f(K)) \uplus (M \setminus g(K))) \uplus K \ ,$$

onde $\uplus$ é a união disjunta, com estrutura definida minimalmente pelas inclusões. Sabemos que esta construção nem sempre funciona em $\mathcal{L}_o$, mas não determinamos ainda condições suficientes ou necessárias. Por outro lado, não sabemos se esta construção funciona sempre em $\mathcal{L}_a$.

## 4 $t$–normas em reticulados limitados

$t$–normas são outra instância onde as definições de morfismos de reticulados limitados se comportam de modo diferente. Uma $t$–norma num reticulado limitado $\mathbf{L}$ é uma operação binária comutativa, associativa e monótona $T : L \times L \to L$ que tem 1 como elemento neutro. Monotocicidade quer dizer que se $x \leq y$, então para todo $z \in L$, vale $T(x, z) \leq T(y, z)$. Acontece que monotonicidade equivale ao fato de $T$ ser um morfismo segundo a definição 1.4. No entanto, uma $t$–norma não é um morfismo segundo a Definição 1.3. De fato, para quaisquer $x, y \in L$ temos que $T((0, x) \vee (1, y)) = x \vee y$, entanto que $T(0, x) \vee T(1, y) = y$, pois $T(0, x) = 0$ se segue diretamente da definição de $t$–normas.

Vamos agora definir morfismos entre $t$–normas. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, seja $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ a categoria dos morfismos de $\mathcal{C}$. Observe que os objetos em $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ são os morfismos em $\mathcal{C}$, e um morfismo em $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ se define como segue. Para quaisquer dois morfismos em $\mathcal{C}$, $f : A \to B$ e $g : C \to D$, ou seja dois objetos em $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, em morfismo $\lambda : f \to g$ é um par $\lambda = (h, k)$ de morfismos em $\mathcal{C}$ tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

Como uma $t$–norma $T : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ é um morfismo na categoria $\mathcal{L}_o$, definimos a categoria de $t$–normas em $\mathcal{L}_o$ como a subcategoria $\mathcal{T}_o$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_o}$ cujos objetos são $t$–normas. Um morfismo entre $t$–normas é um morfismo nesta categoria. Esta definição, natural em $\mathcal{L}_o$, não pode ser copiada literalmente para $\mathcal{L}_a$. Mais ainda, esta definição de $t$–norma é muito mais geral que a dada em [1], pois naquela definição um morfismo é determinado por apenas um morfismo sobrejetivo de reticulados.

Para definir morfismos de $t$–normas em $\mathcal{L}_a$ devemos explicitar a definição dada acima para $\mathcal{L}_o$. Sejam $T : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ e $S : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ $t$–normas em $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$, um morfismo de $\lambda : T \to S$ é um par de morfismos $\psi : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ e $\varphi : \mathbf{L} \to \mathbf{M}$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L} \times \mathbf{L} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{M} \times \mathbf{M} \arrow[d, "S"] \\ \mathbf{L} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbf{M} \end{tikzcd}$$

Vamos mostrar agora como esta nova definição de morfismos entre $t$–normas gera naturalmente a noção de simetrias em $t$–normas. Seja $T : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ uma $t$–norma em $\mathbf{L}$, um automorfismo de $T$ é um par $\lambda = (\psi, \varphi)$ de automorfismos de reticulados, $\psi : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L} \times \mathbf{L}$ e $\varphi : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L} \times \mathbf{L} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{L} \times \mathbf{L} \arrow[d, "T"] \\ \mathbf{L} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

Podemos distinguir dois tipos especiais de automorfismos. Um automorfismo de $t$–normas é **simples** se é da forma $(\psi, \mathrm{id})$, e é um **produto** se é da forma $(\varphi \times \varphi, \varphi)$. Automorfismos de $t$–normas, automorfismos simples e automorfismos produto de $T$ formam groups, denotados respectivamente por $Aut(T)$, $S(T)$ e $P(T)$. A propriedade comutativa de $T$ implica que a função de troca $\xi : (x, y) \mapsto (y, x)$ gera um automorfismo simples involutivo, e portanto $\mathbb{Z}_2$ é um subgrupo de $S(T)$.

Vamos enunciar agora duas conjecturas sobre a estrutura de $Aut(T)$. Sejam

$$N_T = \{\zeta \in Aut(L \times L) \ / \ (\zeta, \mathrm{id}) \in S(T)\}$$

e

$$H_T = \{\varphi \in Aut(L) \ / \ (\varphi \times \varphi, \varphi) \in P(T)\} \ .$$

**Conjectura 4.1** Every $t$-norm automorphism can be written as a composition of a product automorphism and a simple automorphism.

**Parte da prova.** Seja $\lambda = (\psi, \varphi) \in Aut(T)$. Escreva $\zeta = \psi \circ (\varphi \times \varphi)^{-1}$, então

$$\lambda = (\zeta, \mathrm{id}) \circ (\varphi \times \varphi, \varphi) \ .$$

Falta provar que se $\lambda = (\psi, \varphi) \in Aut(T)$ então $(\varphi \times \varphi, \varphi) \in Aut(T)$.

A seguinte conjectura afirma que $Aut(T)$ é um produto semidireto.

**Conjectura 4.2** Seja

$$\begin{array}{rcl} \theta : H_T & \to & Aut(N_T) \\ \varphi & \mapsto & \theta_\varphi \ , \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \theta_\varphi : N_T & \to & N_T \\ \zeta & \mapsto & (\varphi \times \varphi) \circ \zeta \circ (\varphi \times \varphi)^{-1} \ . \end{array}$$

Então $Aut(T) = N_T \rtimes_\theta H_T$.

**Parte da prova.** Se $\lambda = (\psi, \varphi) \in Aut(T)$, escreva $\lambda = [\zeta, \varphi]$ na representação dada pela Conjectura 4.1. Se $\lambda_1 = (\psi_1, \varphi_1), \lambda_2 = (\psi_2, \varphi_2), \lambda_3 = (\psi_3, \varphi_3) \in Aut(T)$ são tais que $\lambda_3 = \lambda_2 \circ \lambda_1$, usando a comutatividade dos diagramas vemos que $\psi_3 = \psi_2 \circ \psi_1$ e $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Calculemos $\zeta_3$.

$$\begin{aligned}
\zeta_3 &= \psi_3 \circ (\varphi_3 \times \varphi_3)^{-1} \\
&= \psi_3 \circ (\varphi_3^{-1} \times \varphi_3^{-1}) \\
&= \psi_3 \circ [(\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} \times (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1}] \\
&= \psi_3 \circ [(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}) \times (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})] \\
&= \psi_3 \circ [(\varphi_1^{-1} \times \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_2^{-1} \times \varphi_2^{-1})] \\
&= \psi_2 \circ [\psi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_1)^{-1}] \circ (\varphi_2 \times \varphi_2)^{-1} \\
&= \psi_2 \circ \zeta_1 \circ (\varphi_2 \times \varphi_2)^{-1} \\
&= [\psi_2 \circ (\varphi_2 \times \varphi_2)^{-1}] \circ \\
&\qquad [(\varphi_2 \times \varphi_2) \circ \zeta_1 \circ (\varphi_2 \times \varphi_2)^{-1}] \\
&= \zeta_2 \circ \theta_{\varphi_2}(\zeta_1) \, .
\end{aligned}$$

Falta provar que $\theta_\varphi \in Aut(N_T)$.

## 5 Categorias de $t$–normas em reticulados limitados

Sejam $\mathcal{T}_o$ e $\mathcal{T}_a$ as categorias de $t$–normas cujos morfismos são pares de morfismos $\lambda = (\psi, \varphi)$ em $\mathcal{L}_o$ e $\mathcal{L}_a$ respectivamente. Temos que $\mathcal{T}_o$ é uma subcategoria de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_o}$, mas o mesmo não acontece com $\mathcal{T}_a$ pois uma $t$–norma não é um morfismo em $\mathcal{L}_a$.

Vamos mostrar que o produto direto existe nestas duas categorias. Sejam $T_L$ e $T_M$ $t$–normas em $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ respectivamente. Defina a operação

$$T_{L\times M} : (L \times M) \times (L \times M) \to L \times M$$

por

$$T_{L\times M}((x, u), (y, v)) = (T_L(x, y), T_M(u, v))$$

para todo $(x, u), (y, v) \in L \times M$. Uma conta tediosa mostra que $T_{L\times M}$ é uma $t$–norma em $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$.

Pode se provar que $\lambda_L : T_{L\times M} \to T_L$ e $\lambda_M : T_{L\times M} \to T_M$, dados por $\lambda_L = (\pi_L \times \pi_L, \pi_L)$ e $\lambda_M = (\pi_M \times \pi_M, \pi_M)$ são morfismos de $t$–normas que agem como projeções canônicas e que a terna $(T_{L\times M}, \lambda_L, \lambda_M)$ possui a propriedade universal do produto direto. No presente estamos estudando como estender esta construção para pullbacks e pushouts.

## 6 Conclusões

Este é um trabalho em andamento cujo objetivo é explorar as diferenças entre as contruções categóricas possíveis que surgem do fato de podermos definir de duas maneiras não equivalentes morfismos entre reticulados limitados. Ao que parece cada uma das possibilidades tem suas vantagens e desvantagens.

Definindo morfismos algebricamente reduzimos o conjunto de morfismos possíveis, o que parece vantajoso para construir limites na correspondente categoria de reticulados. No entanto, com esta definição as $t$–normas não são morfismos, o que coloca a correspondente categoria de $t$–normas isolada da categoria de morfismos. Com isto não é mais possível transladar por restrição construções da categoria de morfismos à categoria de $t$–normas, nem realizar extensões na direção inversa.

Por outro lado, ao definir morfismos com uma relação de ordem se dificulta a construção de limites na correspondente categoria de reticulados. Em compensação, com esta definição as $t$–normas são morfismos, o que faz da correspondente categoria de $t$–normas uma subcategoria da categoria de morfismos. Este fato apenas já serve para inspirar uma definição geral de morfismo de $t$–normas, extendendo as definições usadas na literatura, em particular aquela apresentada em [1].

A nova definição de morfismo de $t$–normas gera o conceito de simetrias de $t$–normas. Qual é a estrutura do grupo de simetrias de uma $t$–norma? Além disso, o conjunto de $t$–normas num reticulado $\mathbf{L}$ é um conjunto ordenado e limitado. Existe alguma relação de ordem entre os correspondentes grupos de simetria? Que informação sobre a estrutura do reticulado $\mathbf{L}$ fornecem os grupos de simetria das $t$–normas sobre $\mathbf{L}$? No mínimo, estas questões merecem ser examinadas.

## Referências


[1] B.C. Bedregal, H.S. Santos & R.C. Bedregal, *T–norms on bounded lattices: t–norm morphisms and operators*, 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 22–28 (2006).