Conectivos Nebulosos como Conjuntos Parcialmente Ordenados Limitados

ALLAN ROCHA MENDES **BENJAMÍN CALLEJAS BEDREGAL**

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Informática e Matemática Aplicada

golconda_xxi@yahoo.com.br bedregal@dimap.ufrn.br

Resumo: *Neste artigo definimos de modo natural uma ordem parcial sobre as diversas classes de conectivos nebulosos e mostramos que essas classes têm tanto um menor quanto um maior elemento. Como é possível obter um conectivo nebuloso a partir de outros conectivos, por exemplo a partir de uma t-norma e de uma negação é possível obter uma t-conorma, mostramos como as ordens das classes envolvidas são preservadas por essas construções. Adicionalmente mostramos algumas relações entre as classes usuais de implicações nebulosas.*

Palavras-chave: Lógica nebulosa, Ínfimo, Supremo, Forma Canônica.

Introdução

A lógica nebulosa é uma generalização da lógica clássica e tenta atender um número mínimo de propriedades existente em cada operador. Os operadores nebulosos passam a obedecer um conjunto de propriedades e ao invés de existir um único operador nebuloso temos uma família de operadores para cada operador em questão. Tais operadores são funções que estão de acordo com tais propriedades. Este trabalho visa encontrar a maior e menor função que representa cada operador aqui citado entre as condições exigidas pelos operadores.

Na sessão FUNDAMENTOS introduzimos os fundamentos sobre ordem, na sessão NEGAÇÃO mostramos o primeiro operador, a negação nebulosa, onde apresentamos o teorema com suas funções limites. Nas sessões T-NORMA, T-CONORMA e ORDEM PARA N-DUAL E AUTOMORFISMO DOS LIMITES mencionamos a generalização da conjunção (t-norma), da disjunção (t-conorma) além de trabalho anterior sobre as funções limites de ambas e N-Dual de ambas Na sessão IMPLICAÇÃO NEBULOSA entramos em detalhes sobre a implicação nebulosa, suas formas canônicas e seus respectivos limites. Finalmente comentamos os resultados na última sessão deste trabalho.

FUNDAMENTOS

ORDEM

Definição 1. Seja R um conjunto. Uma ordem ou ordem parcial sobre R é uma relação binária $\leq$ sobre R tal que $\forall x,y \in R$. $\langle R, \leq \rangle$

$x \leq x$

$x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$

$x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$

Uma relação de ordem $\leq$ dá origem a uma relação de desigualdade estrita: $x < y$ em R se e só se $x \leq y$ e $x \neq y$. O símbolo $\|$ é usado para denotar não-comparabilidade; Se $x \not\leq y$ e $x \not\geq y$ então $x \| y$ (não-comparáveis).

Tal ordem será dita *conjunto totalmente ordenado* se além das propriedades anteriores ainda tiver a seguinte propriedade:

$x \leq y$ ou $y \leq x$

ou seja, todos os elementos são comparáveis.

ÍNFIMO E SUPREMO

Definição 2. Seja R um conjunto ordenado não-vazio, $X \subseteq R$ e $a \in R$. a é o *ínfimo* de X em R, denotado por inf$X$, se $a \leq x$, $\forall x \in X$ e se $c \in R$ é tal que $c \leq x$, $\forall x \in X$, então $c \leq a$.

Definição 3. Seja R um conjunto ordenado não-vazio, $X \subseteq R$ e $b \in R$. b é o *supremo* de X em R, denotado por sup$X$, se $x \leq b$, $\forall x \in X$ e se $c \in R$ é tal que $x \leq c$, $\forall x \in X$, então $b \leq c$.

Uma notação alternativa é $x \vee y$ em lugar de sup$\{x,y\}$ e $x \wedge y$ em lugar de inf$\{x,y\}$.

NEGAÇÃO

A negação nebulosa é uma função unária no intervalo fechado [0,1] que simula a negação da lógica clássica. Tem importância para este trabalho pois algumas formas canônicas dependem da negação.

Definição 4. Toda função decrescente que mapeia $N:[0,1] \rightarrow [0,1]$ será uma negação nebulosa se atende as seguintes propriedades:

N1: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

N2: Se $x \leq y$ então $N(x) \geq N(y)$

Será uma negação estrita se, além disso ela for:

N3: N é continua;

N4: N é estritamente decrescente;

E será uma negação forte se também for involutiva:

N5: $N(N(x)) = x$, $\forall x \in [0,1]$.

São exemplos de negações nebulosas as seguintes funções [6]:

Tabela 1: Negações nebulosas.

Nome	Fórmula
Negação complemento (N_C)	$1 - x$
Negação Complemento Intuicionista (N_I)	$(1 - \sqrt{x})^2$
Negação de Sugeno (N_S)	$(1 - x)/(1 + x)$
Negação de Gödel (N_G)	$\begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$
Negação de Rocha (N_R)	$\begin{cases} 0 \text{ se } x = 1 \\ 1 \text{ caso contrário} \end{cases}$

Teorema 1. Seja N uma negação nebulosa então $N_G(x) \leq N(x) \leq N_R(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

Demonstração:

$N_G(x) \leq N(x)$:

Se $x = 0$ então $N_G(x) = N(x) = 1$;

Se $x > 0$ então $N_G(x) = 0$, portanto $N_G(x) \leq N(x)$.

$N(x) \leq N_R(x)$:

Se $x = 1$ então $N(x) = N_R(x) = 0$;

Se $x < 1$ então $N_R(x) = 1$, portanto $N(x) \leq N_R(x)$.

Logo $N_G(x) \leq N(x) \leq N_R(x)$, $\forall x \in [0,1]$ ■

T-NORMA

As t-normas foram introduzidas por Schweizer e Sklar em [4] para modelar distâncias em espaços métricos probabilísticos. É uma função binária que é associativa, comutativa, monotônica e com 1 como elemento neutro. A partir de uma t-norma é possível obter as outras funções como t-conormas e implicações nebulosas. Outras propriedades podem ser acrescentadas e caracterizar assim classes de t-normas. Ela é uma ferramenta indispensável para a lógica nebulosa pois ela é capaz de apresentar o mesmo comportamento da conjunção (conectivo "e") para os valores clássicos (0 e 1).

Definição 5. Toda função que mapeia $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ será uma T-norma se atende as seguintes propriedades:

T1: $T(x; y) = T(y; x)$, $\forall x, y \in [0,1]$;

T2: $T(x; T(y; z)) = T(T(x; y); z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$;

T3: Se $x \leq y$ então $T(x; z) \leq T(y; z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$;

T4: $T(x; 1) = x$, $\forall x \in [0,1]$.

São exemplos de t-normas as seguintes funções:

Tabela 2: T-normas

Nome	Fórmula
T-norma de Gödel (T_G)	$\min(x;y)$
T-norma de Lukasiewicz (T_L)	$\max(x + y - 1;0)$
T-norma produto (T_P)	xy
T-norma Fraca (T_W)	$\begin{cases} \min(x, y) \text{ se } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$

MAIOR E MENOR T-NORMAS

Conforme visto em [5] a maior t-norma é T_G, ou seja, para qualquer t-norma T e $x,y \in [0,1]$, $T(x;y) \leq T_G(x;y)$ e se $x \leq y$ então $T(x;y) \leq x$. Uma vez que $\min(0;y) = 0$ então para qualquer t-norma T teremos $T(x;0) = 0$. A menor t-norma é $T_W(x;y)$ [5],ou seja, $T_W(x;y) \leq T(x;y) \leq T_G(x;y)$.

ELEMENTO NILPOTENTE PARA T-NORMAS

Definição 6. Seja T uma t-norma, então para todo $n \in \mathbb{N}$ defina a função T^n: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ por $T^0(a) = a$ e $T^{n+1}(a) = T(a;T^n(a))$, $\forall a \in [0,1]$. Um elemento a será nilpotente se existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$T^k(a) = 0$.

Introduzimos aqui os conceitos de automorfismo e conjugado que são usados neste artigo.

Definição 7. Um automorfismo de um intervalo $[a,b] \subset R$ é uma função continua, estritamente crescente que mapeia φ: $[a,b] \rightarrow [a,b]$, com condição de borda $\varphi(a) = a$ e $\varphi(b) = b$.

Definição 8. Funções F,G: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ são conjugadas se existir um automorfismo φ: $[a,b] \rightarrow [a,b]$ em um intervalo tal que $G = F\varphi$, onde:

$F\varphi(x;y) = \varphi^{-1}(F(\varphi(x);\varphi(y)))$, $\forall x,y \in [0,1]$.

Seja uma T-norma contínua T tal que $T(x;N(x)) = 0$, $\forall x \in [0,1]$ com uma negação nebulosa estrita, se e somente se for um conjugado com a t-norma de Lukasiewicz (T_L) [7].

$T(x;y) = \varphi^{-1}(\max(\varphi(x)+\varphi(y)-1;0))$

e

$N(x) \leq \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$.

T-CONORMAS

As t-conormas de igual modo às t-normas foram introduzidas para descrever espaços métricos probabilísticos e têm como propriedades serem uma função binária associativa, comutativa, monotônica e ter 0 como elemento neutro. Outras propriedades descrevem classes de t-conormas. Sendo uma função binária no intervalo fechado [0,1] que simula a disjunção (conectivo "ou") clássica.

Definição 9. Toda função que mapeia $S:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ será uma T-conorma se atende as seguintes propriedades:

S1: $S(x; y) = S(y; x)$, $\forall x, y \in [0,1]$;
S2: $S(x; S(y; z)) = S(S(x; y); z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$;
S3: Se $x \leq y$ então $S(x; z) \leq S(y; z)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$;
S4: $S(x; 0) = x$, $\forall x \in [0,1]$.

São exemplos de t-conormas as seguintes funções:

Tabela 3: T-conormas

Nome	Fórmula
T-conorma Soma Drástica (S_D)	$\begin{cases} \max(x,y) & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$
T-conorma de Lukasiewicz (S_L)	$\min(x + y, 1)$
T-conorma Probabilista (S_P)	$x + y - xy$
T-conorma de Zadeh (S_M)	$\max(x, y)$

MENOR E MAIOR T-CONORMA

Conforme visto em [5] a menor t-conorma é S_M, ou seja, para qualquer t-conorma S e $x,y \in [0,1]$, $S(x;y) \geq S_M(x;y)$ e se $x \leq y$ então $S(x;y) \geq y$. Uma vez que $\max(x;1) = 1$ então para qualquer t-conorma S teremos $S(x;1) = 1$. A maior t-conorma é $S_D(x;y)$ [5], ou seja, $S_M(x;y) \leq S(x;y) \leq S_D(x;y)$.

ELEMENTO NILPOTENTE PARA T-CONORMAS

Definição 10. Seja S uma t-conorma, então para todo $n \in \mathbb{N}$ defina a função S^n: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ por $S^0(a) = a$ e $S^{n+1}(a) = S(a;S^n(a))$, $\forall a \in [0,1]$. Um elemento a será nilpotente se existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que:
$S^k(a) = 1$.
Seja uma T-conorma contínua S tal que $S(x;N(x)) = 1$, $\forall x \in [0,1]$ com uma negação nebulosa estrita se e somente se for um conjugado com a t-conorma de Lukasiewicz (S_L) [7].

$S(x;y) = \varphi^{-1}(\min(\varphi(x)+\varphi(y);1))$
e
$N(x) \geq \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$.

ORDEM PARA N-DUAL E AUTOMORFISMO DOS LIMITES

O automorfismo aplicado aos limites das t-normas e t-conormas preserva a ordem em relação às outras famílias de operadores t-norma e t-conorma.

Demonstração:

$\mathbf{T_G(x;y) = \varphi^{-1}(T_G(\varphi(x)+\varphi(y)))}$
Se $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ então $\varphi^{-1}(\min(\varphi(x);\varphi(y))) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.
Se $\varphi(x) > \varphi(y)$ então $\varphi^{-1}(\min(\varphi(x);\varphi(y))) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$.
Logo, $T_G(x;y) = \varphi^{-1}(T_G(\varphi(x)+\varphi(y)))$ ■

$\mathbf{T_W(x;y) = \varphi^{-1}(T_W(\varphi(x)+\varphi(y)))}$
Se $x = 1$ ou $y = 1$ então $T_W(x;y) = \varphi^{-1}(\min(\varphi(x);\varphi(y)))$
0 caso contrário
Logo $T_W(x;y) = \varphi^{-1}(T_W(\varphi(x)+\varphi(y)))$ ■

$\mathbf{S_M(x;y) = \varphi^{-1}(S_M(\varphi(x)+\varphi(y)))}$
Se $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ então $\varphi^{-1}(\max(\varphi(x);\varphi(y))) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$.
Se $\varphi(x) > \varphi(y)$ então $\varphi^{-1}(\min(\varphi(x);\varphi(y))) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.
Logo, $S_M(x;y) = \varphi^{-1}(S_M(\varphi(x)+\varphi(y)))$ ■

$\mathbf{S_D(x;y) = \varphi^{-1}(S_D(\varphi(x)+\varphi(y)))}$
Se $x = 0$ ou $y = 0$ então $S_D(x;y) = \varphi^{-1}(S_M(\varphi(x)+\varphi(y)))$
1 caso contrário
Logo, $S_D(x;y) = \varphi^{-1}(S_D(\varphi(x)+\varphi(y)))$ ■

Definição 16. Seja T uma t-norma e seja S uma t-conorma, T será N-Dual de S se $S(x;y) = N(T(N(x);N(y)))$ e S será N-Dual de T se $T(x;y) = N(S(N(x);N(y)))$. As t-normas exemplificadas neste trabalho são N-duais com as seguintes t-conormas e vice-versa.

Uma vez que os limites das t-normas $T_W(x;y)$ e $T_G(x;y)$ geram de forma N-Dual os limites das t-conormas, respectivamente $S_D(x;y)$ e $S_M(x;y)$, e vice-versa podemos dizer que existe ordem entre N-duais. Em [3] é provado que N-Dual de uma t-norma e vice-versa tem as quatro propriedades mínimas de cada operador nebuloso.

IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Elas surgiram parar generalizar a implicação da lógica proposicional clássica e são tratadas como operadores derivados dos outros operadores nebulosos. Sua importância para a lógica nebulosa está no fato das regras nebulosas serem baseadas neste operador. Essas regras são usadas nas inferências nebulosas (modus ponens nebuloso, modus tollens nebuloso), deste modo

ela representa uma relação entre duas variáveis. Não existe consenso sobre as propriedades mínimas de uma implicação entre os estudiosos da área. O único consenso é o comportamento para os valores "0" e "1" que correspondem aos mesmos da implicação na lógica proposicional clássica.

Definição 11. Toda função que mapeia $I:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ será uma implicação nebulosa se atende a seguinte propriedade:

I1: $I(0;0) = I(0;1) = I(1;1) = 1$, $I(1;0) = 0$.

PROPRIEDADES ADICIONAIS

Ainda que as propriedades adicionais categorizem as implicações nebulosas são as formas canônicas que as classificam, afinal as formas canônicas nem sempre geram implicações nebulosas com as mesmas propriedades. As quatro primeiras propriedades são as mais citadas na literatura sobre o assunto, mas nem essas tem sido aceitas como as minimamente necessárias para definir uma implicação.

São propriedades adicionais:

I2: Se $x_1 \leq x_2$ então $I(x_1; y) \geq I(x_2; y)$, $\forall x_1,x_2,y \in [0,1]$;
I3: Se $y_1 \leq y_2$ então $I(x; y_1) \leq I(x; y_2)$, $\forall x,y_1,y_2 \in [0,1]$;
I4: $I(1; x) = x$, $\forall x \in [0,1]$;
I5: $I(x; I(y; z)) = I(y; I(x; z))$, $\forall x,y, z \in [0,1]$;
I6: $I(x; y) = 1$ Se e somente se $x \leq y$, $\forall x,y \in [0,1]$;
I7: $I(x; y) = I(N(y); N(x))$, $\forall x,y \in [0,1]$;
I8: I é continua.
I9: $I(0; y) = I(x; 1) = 1$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Estas propriedades não são independentes, em [7], implicações nebulosas que satisfaçam I5, I6 e I8 satisfazem outras propriedades I1, I2, I3, I4 e I7.

CLASSES DE IMPLICAÇÃO NEBULOSA

Classes de funções nebulosas são estudadas segundo a forma canônica em que foram obtidas. As formas canônicas de se obter uma implicação são 3 até o momento, Resíduo, S-implicação e QL-implicação. As três formas de se obterem as implicações nebulosas são as seguintes:

Forma canônica R-implicação

Definição 12. Seja T uma t-norma. Uma R-implicação é definida como:
$I_T(x; y) = \sup\{z \in [0,1]/ T(x;z) \leq y\}$;
Se a t-norma tiver a propriedade T6 então ela se torna:
$I_T(x; y) = \max\{z \in [0,1]/ T(x;z) \leq y\}$;
Caso a R-implicação seja gerada pela forma canônica acima então a t-norma pode ser recuperada por:
$T_I(x; y) = \inf\{t \in [0,1]/ I(x;t) \geq y\}$;
A definição de R-implicação vem da lógica Intuicionista. Segundo [7], até o momento, as R-implicações baseadas em t-normas contínuas a esquerda apresentam as propriedades I1, I2, I3, I4, I5 e I6.
São exemplos de R-implicações as seguintes funções:

Tabela 5: R-implicações

Nome	Fórmula
Implicação Fraca (I_W)	$\begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ y & \text{caso contrário} \end{cases}$
Implicação de Lukasiewicz (I_L)	$\min(1 - x + y; 1)$
Implicação Produto (I_P)	$\begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{caso contrário} \end{cases}$
Implicação de Gödel (I_G)	$\begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ y & \text{caso contrário} \end{cases}$

Teorema 2. Seja I uma R-implicação e T uma T-norma então $I_G(x;y) \leq I_T(x;y) \leq I_W(x;y)$.

Demonstração:

Sejam T_1 e T_2 t-normas tais que $T_1 \leq T_2$. Se $T_2 \leq y$ então $T_1 \leq y$ portanto $\{z \in [0,1]/ T_2(x;z) \leq y\} \subseteq \{z \in [0,1]/ T_1(x;z) \leq y\}$. Logo, $\sup\{z \in [0,1]/ T_2(x;z) \leq y\} \subseteq \sup\{z \in [0,1]/ T_1(x;z) \leq y\}$, ou seja, $I_{T2}(x;y) \leq I_{T1}(x;y)$. Assim, pela menor e maior t-normas, $T_W(x;y) \leq T(x;y) \leq T_G(x;y)$, temos que $I_G(x;y) \leq I_T(x;y) \leq I_W(x;y)$ ■

7.2.2 Forma Canônica S-implicação

Definição 13. Seja S uma t-conorma e N uma negação nebulosa. Uma S-implicação é definida como:
$I_{SN}(x;y) = S(N(x);y)$, $\forall x,y \in [0,1]$;
Alguns autores trabalham N como a negação forte, recebendo o nome de (S,N)-implicação [5], enquanto outros não usam a negação forte. As S-implicações apresentam as propriedades I1, I2, I3, I4 e I5 [7].

São exemplos de S-implicação as seguintes funções:

Tabela 6: S-implicações

Nome	Fórmula
Implicação Fraca (I_W)	$\begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ y & \text{caso contrário} \end{cases}$
Implicação de Lukasiewicz (I_L)	$\min(1 - x + y; 1)$

Implicação de Reichenbach (I_r)	$1 - x + xy$
Implicação Mais Estrita (I_M)	$\begin{cases} 1 & se\ x = 0 \\ y & caso\ contrário \end{cases}$
Implicação de Lukasiewicz (I_L)	$\max(1 - x;\min(x;y))$
Implicação de Zadeh (I_m)	$\begin{cases} 1 & se\ x = 0 \\ \min(x;y) & se\ x = 1\ ou\ y = 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$
Implicação de Rocha (I_R)	

Teorema 3. Seja S uma t-conorma e N uma negação nebulosa então $I_M(x;y) \le I_{SN}(x;y) \le I_W(x;y)$, $\forall x,y \in [0,1]$. Sendo, $I_M(x;y) = I_{S_M N_G}(x;y)$ e $I_W(x;y) = I_{S_D N_R}(x;y)$.

Demonstração:

$I_M(x;y) \le I_{SN}(x;y)$

Uma vez que $S_M(x;y)$ é a Menor T-conorma e pelo teorema 1 sabemos que $N_G(x)$ é a Menor Negação Nebulosa então pela propriedade S3 temos que $S_M(N_G(x);y) \le S(N(x);y)$;

$I_{SN}(x;y) \le I_W(x;y)$

Uma vez que $S_D(x;y)$ é a Maior T-conorma e pelo teorema 1 sabemos que $N_R(x)$ é a Maior Negação Nebulosa então pela propriedade S3 temos que $S(N(x);y) \le S_D(N_R(x);y)$.

Logo, $I_M(x;y) \le I_{SN}(x;y) \le I_W(x;y)$, $\forall x,y \in [0,1]$ ■

Proposição 1. Seja uma I uma S-implicação então $I_{SN}(x;y) \ge y$, $\forall x,y \in [0,1]$.

Demonstração:

$I_M(x;y) = S_M(N_G(x);y)$

Se x = 0 então $S_M(N_G(x);y) = 1$;

Se x > 0 então $S_M(N_G(x);y) = y$.

Pelo teorema 3 temos $I_M(x;y) \le I_{SN}(x;y)$ então $I_{SN}(x;y) \ge y$, $\forall x,y \in [0,1]$ ■

Forma Canônica QL-implicação

Definição 14. Seja S uma t-conorma, T uma t-norma e N uma negação. Uma QL-implicação é definida como: $I_{SNT}(x;y) = S(N(x);T(x;y))$, $\forall x,y \in [0,1]$.

Em relação a negação nebulosa ela não precisa ser necessariamente uma negação forte. As QL-implicações apresentam as propriedades I1, I3 e I4 [7].

São exemplos de QL-implicação as seguintes função:

Tabela 7: QL-implicações

Nome	Fórmula
Implicação Fraca (I_W)	$\begin{cases} 1 & se\ x < 1 \\ y & caso\ contrário \end{cases}$
Implicação de Rocha (I_R)	$\min(1 - x + y; 1)$

Teorema 4. Seja S uma T-conorma, N uma Negação Nebulosa e T uma T-norma então $I_R(x;y) \le I_{SNT}(x;y) \le I_W(x;y)$, $\forall x,y \in [0,1]$. Sendo, $I_R(x;y) = I_{S_M N_G T_W}(x;y)$ e $I_W(x;y) = I_{S_D N_R T_G}(x;y)$.

Demonstração:

$I_{R_o}(x;y) \le I_{SNT}(x;y)$

Uma vez que $S_M(x;y)$ é a Menor T-conorma, pelo teorema 1 sabemos que $N_G(x)$ é a Menor Negação Nebulosa e que $T_W(x;y)$ é a Menor T-norma então pela propriedade S3 temos que $S_M(N_G(x);T_W(x;y)) \le S(N(x);T(x;y))$;

$I_{SNT}(x;y) \le I_W(x;y)$

Uma vez que $S_D(x;y)$ é a Maior T-conorma, pelo teorema 1 sabemos que $N_R(x)$ é a Maior Negação Nebulosa e que $T_G(x;y)$ é a Maior T-norma então pela propriedade S3 temos que $S(N(x);T(x;y)) \le S_D(N_R(x); T_G(x;y))$.

Logo, $I_R(x;y) \le I_{SNT}(x;y) \le I_W(x;y)$, $\forall x,y \in [0,1]$ ■

Proposição 2. Seja I uma QL-implicação então $I_{SNT}(0;y) = 1$, $\forall y \in [0,1]$.

Demonstração:

$I_R(x;y) = S_M(N_G(x);T_W(x;y))$

Se x = 0 então $S_M(N_G(x);T_W(x;y)) = 1$;

Pelo teorema 4 temos $I_R(x;y) \le I_{SNT}(x;y)$ então $I_{SNT}(0;y) = 1$, $\forall y \in [0,1]$ ■

7.2.4 Implicação de Fodor e Roubens

De forma diferente das outras implicações esta familia é construida a partir de suas propiedades básicas, de forma semelhante aos outros operadores nebulosos [2]. Como podemos perceber a R-implicação e a S-implicação são implicações de Fodor e Roubens.

Definição 15. Toda função que mapeia $I:[0,1]^2 \to [0,1]$ será uma Implicação $I_{FR}(x;y)$ se atende as seguintes propriedades:

I1': $I(1; 0) = 0$;

I2: Se $x_1 \le x_2$ então $I(x_1; y) \ge I(x_2; y)$, $\forall x_1,x_2,y \in [0,1]$;

I3: Se $y_1 \le y_2$ então $I(x; y_1) \le I(x; y_2)$, $\forall x,y_1,y_2 \in [0,1]$;

I9: $I(0; y) = I(x; 1) = 1$, $\forall x, y \in [0,1]$.

São exemplos de implicações de Fodor e Roubens as seguintes funções:

Tabela 8: FR-implicações

Nome	Fórmula
Implicação Extrema (I_E)	$\begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \text{ e } y = 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$
Implicação de Fodor e Roubens (I_{fr})	$\begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
Implicação de Lukasiewicz (I_L)	$\min(1 - x + y; 1)$
Implicação Pequena (I_P)	$\begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \; y = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Teorema 5. Seja I(x;y) uma implicação de Fodor e Roubens então $I_P(x;y) \leq I_{FR}(x;y) \leq I_E(x;y)$, $\forall x,y \in [0,1]$.

Demonstração:

$I_p(x;y) \leq I_{FR}(x;y)$

Se x = 0 ou y = 1 então $I_p(x;y) = I(x;y) = 1$;

Se $x \neq 0$ e $y \neq 1$ então $I_p(x;y) = 0$, como $I(x;y) \geq I_p(x;y)$ portanto $I_p(x;y) \leq I(x;y)$.

$I_{FR}(x;y) \leq I_E(x;y)$

Se x = 1 e y = 0 então $I_E(x;y) = I(x;y) = 0$;

Se $x \neq 1$ ou $y \neq 0$ então $I_E(x;y) = 1$, como $I(x;y) \leq 1$ portanto $I(x;y) \leq I_E(x;y)$.

Logo, $I_P(x;y) \leq I_{FR}(x;y) \leq I_E(x;y)$, $\forall x,y \in [0,1]$. ■

Como podemos observar as propriedades a seguir são comuns a todas as propostas de implicações nebulosas consideradas neste trabalho:

I1': I(1; 0) = 0;

I1'': I(1; 1) = 1;

I3: Se $y_1 \leq y_2$ então $I(x; y_1) \leq I(x; y_2)$, $\forall x,y_1,y_2 \in [0,1]$;

I9': I(0; y) = 1, $\forall y \in [0,1]$.

CONCLUSÃO

Para os operadores nebulosos facilmente se percebe terem operadores com valores menores e maiores entre si para as mesmas entradas. Muitos destes operadores são funções conhecidas na área de lógica nebulosa como a negação de Gödel (N_G) e a t-norma de Gödel (T_G) mas o fato de serem funções limites capazes de representar operadores nebulosos é pouco estudado. Tal fato entretanto é importante, outras propriedades são encontradas estudando-se essas funções mínimas/máximas dos operadores. A forma canônica R-implicação, por exemplo, passa a ter também maior e menor função por ser baseada na t-norma. As diferenças entre as formas canônicas R-implicação, S-implicação e QL-implicação ficam visíveis nos teoremas apresentados decorrentes destes operadores específicos.

Deixamos para trabalhos futuros estudos dos limites dos operadores nebuloso como por exemplo a possibilidade deles serem um reticulado limitado já que eles tem funções limites além do aprofundamento detalhado das diferenças entre as formas canônicas das implicações.

Referências

[1] BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. *On the characterizations of (S,N)-implications generate from continuous negations*, In: PROC. 11th CONF. INFORMATION PROCESSING AND MANAGEMENT OF UNCERTAINTY IN KNOWLEDGE-BASED SYSTEM, Paris, France, pp. 436-443, 2006.

[2] BEDREGAL, Benjamín Callejas; CRUZ, Anderson Paiva. *A characterization of classic-like fuzzy semantics*. Departament of Informatics and Applied Mathematics. Federal University of Rio Grande do Norte. Jornal of 16PL, 2008.

[3] KLEMENT, Erich Peter; MESIAR, Radko; PAP, Endre. *Triangular Norms.* Trends in logic – Studia Logica Library. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, 2000.

[4] KLEMENT, Erich Peter; NAVARA, Mirko. *Survey on different triangular norm based fuzzy logics*. **Fuzzy Sets and Systems** 101:241_251. 1999.

[5] MESIAR, Radko; NOVÁK, V. *Operating fitting triangular-norm-based biresiduation*. **Fuzzy Sets and Systems**, 104:77–84, 1999.

[6] ROYCHOWDHURY, S.; PEDRYCK, W. *.An alternative characterization of fuzzy complement functional.* Soft Computing 7 (2003) 563-565. Springer-Verlag 2003.

[7] SHI, Y.; RUAN, D.; KERRE, E.E. *On the characterizations of fuzzy implications satisfying I(x,y) = I(x,I(x,y))*. **Information Sciences**, 2007.