Aplicação do Método dos Momentos para avaliação do acoplamento eletromagnético entre eletrodos de aterramento: análise no domínio da freqüência

Rafael S. Alípio[1], Maisa L. F. Oliveira[2], Marco A. O. Schroeder[3], Márcio M. Afonso[3], Tarcísio A. S. Oliveira[3]

[1]Aluno do curso de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional (MMMC/CEFET-MG)

[2]Aluna do curso de Engenharia Elétrica (CEFET-MG)

[3]Professores do Depto de Engenharia Elétrica (CEFET-MG)

30510-000, Belo Horizonte, MG

rafael@dppg.cefetmg.br, maisa.laila@gmail.com, schroeder@des.cefetmg.br, marciomatias@des.cefetmg.br, tarcisio@des.cefetmg.br

Resumo: Os sistemas de aterramento apresentam importância fundamental no desempenho de sistemas elétricos bem como na proteção de seres vivos contra os efeitos perigosos indesejáveis na eletricidade. Dentre as investigações ligadas aos sistemas de aterramentos elétricos, sua modelagem para avaliação da resposta frente a fenômenos transitórios tem atraído a atenção de muitos grupos de pesquisa. A partir de um modelo de aterramento confiável, variáveis importantes podem ser previstas, como, por exemplo, a impedância de aterramento. Neste trabalho é apresentado um modelo para representação de sistemas de aterramento, baseado nas equações do eletromagnetismo (Equações de Maxwell). O modelo matemático é solucionado a partir do aplicação do Método dos Momentos e implementado computacionalmente. Como exemplo de aplicação é calculada a impedância de aterramento de um eletrodo horizontal.

Palavras-chave: Aterramentos Elétricos, Transitórios Eletromagnéticos, Modelagem matemática e computacional, Método dos Momentos.

Introdução

O tema aterramentos elétricos tem despertado ao longo do tempo o interesse de diversos pesquisadores. Muito provavelmente, tal interesse está relacionado à importância do aterramento para um bom desempenho do sistema aterrado e, principalmente, devido à questão de segurança de seres vivos [9], [10].

No caso do Brasil, devido às características peculiares do solo, que possui valor médio de resistividade elevado (superior a 1.000 Ω.m na maior parte do território), o projeto e construção de malhas de aterramento adequadas à segurança de seres vivos e que garantam um bom desempenho do sistema, constitui-se laboriosa tarefa. Nesse sentido, os sistemas de aterramento apresentam singular importância no que concerne a sua influência no desempenho do sistema aterrado e proteção humana.

Dentre as investigações ligadas aos sistemas de aterramento, sua modelagem para avaliação da resposta frente a fenômenos transitórios tem atraído a atenção de muitos grupos de pesquisa. Os modelos de aterramento desempenham como função essencial a predição de algumas variáveis importantes para dimensionamento da proteção contra surtos, como, por exemplo, impedância de aterramento e níveis máximos de sobretensão [3], [11].

A predição de tais variáveis pode ser realizada mediante o estabelecimento de um modelo matemático confiável. A modelagem de aterramentos elétricos deve contemplar dois aspectos principais: i) o entendimento dos conceitos físicos relacionados ao fenômeno solicitante e ii) a inclusão do acoplamento eletromagnético entre seus componentes.

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático, baseado nas equações de Maxwell, para avaliação da resposta transitória de sistemas de aterramentos elétricos. O modelo, baseado na solução direta das equações de campo, é aplicável a configurações genéricas de aterramento e diferentes tipos de solicitações (fenômenos de baixas e altas freqüências). Como exemplo de aplicação, é calculada a impedância de aterramento de um eletrodo horizontal na faixa de freqüência característica de uma onda de corrente representativa de uma descargas atmosférica.

Modelo Matemático

A. Análise no domínio da freqüência

No modelo desenvolvido o problema transitório é solucionado no domínio da freqüência [7]. Assim, define-se o sinal de corrente i(t), primeiramente no domínio do tempo, a ser injetado no sistema. Este sinal pode ser, por exemplo, uma onda de corrente representativa de uma descarga atmosférica. A partir da aplicação de uma transformada direta de Fourier

pode-se levantar o espectro de freqüência do sinal em questão e determinar o conjunto de freqüências de interesse [5]. O modelo é solucionado para cada freqüência do espectro representativo do fenômeno em consideração. Obtêm-se assim uma função de transferência do tipo H(ω) = R(ω) / I(ω). Na equação anterior I(ω) é a entrada (onda injetada) no domínio da freqüência, obtida a partir de uma transformada de Fourier direta I(ω) = F (i(t)); R(ω) é a saída e representa a grandeza calculada para cada freqüência a partir da solução do modelo; H(ω) é a relação entre a saída e a entrada e representa o sistema sob investigação. Deve-se salientar que a função de transferência H(ω) é dependente apenas da geometria e características eletromagnéticas do aterramento e do meio em que está inserido. A partir da multiplicação, no domínio da freqüência, da função de transferência pela onda injetada, obtêm-se a resposta do sistema à onda injetada no domínio da freqüência R(ω) [5].

B. Procedimento para cada freqüência

Cada eletrodo é considerado fonte de uma densidade de corrente transversal I_T / L que dispersa do condutor em direção ao solo e de uma corrente longitudinal I_L que circula ao longo do eletrodo, conforme ilustra a Figura 1 [6]. Assume-se que ambas as fontes possuem variações harmônicas no tempo. Essa duas fontes de corrente são necessárias e suficientes para que o sistema sob estudo atenda as condições físicas impostas por todas as equações de Maxwell [7]. A fonte de corrente transversal, devido ao fato de possuir natureza divergente, apresenta efeito elétrico, mas não magnético. A cada fonte de corrente transversal está associado um campo elétrico de natureza conservativa. Este campo gera elevação de potencial em relação ao infinito em pontos genéricos no meio em que o eletrodo se encontra inserido, inclusive nos demais eletrodos. Por outro lado, a fonte de corrente longitudinal, devido ao fato de possuir natureza solenoidal, apresenta efeito eletromagnético. A cada fonte de corrente longitudinal está associado um campo magnético, que por sua vez, gera um campo elétrico de natureza não-conservativa. O efeito deste campo elétrico de natureza solenoidal se traduz na força eletromotriz induzida em outros eletrodos. Pode-se afirmar, portanto, que as duas fontes de corrente descritas são particularmente adequadas para a formulação e solução dos campos eletromagnéticos oriundos de sistemas de eletrodos energizados.

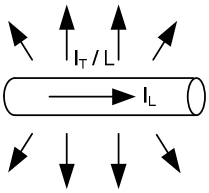

Figura 1: Fontes de corrente em cada eletrodo.

Seja um meio linear, homogêneo e isotrópico, caracterizado por uma constante de propagação γ, para grandezas com variação harmônica no tempo de freqüência angular ω, sendo [7]

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)} = \alpha + j\beta \qquad (1)$$

onde μ, σ e ε são a permeabilidade magnética, a condutividade elétrica e a permissividade elétrica do meio, respectivamente, e α e β correspondem a constante de atenuação e a constante de defasamento, respectivamente [7].

Sejam dois eletrodos inseridos neste meio, um eletrodo emissor de campo (j) e outro eletrodo receptor de campo (i), conforme ilustra a Figura 2. Levando-se em conta os efeitos de ambas as fontes de corrente descritas, a elevação de potencial e queda de tensão no eletrodo receptor (i) devido ao eletrodo emissor (j), são, respectivamente [6]:

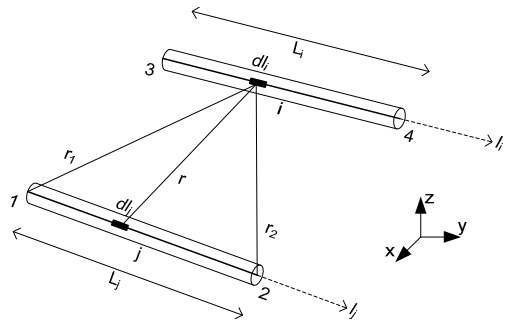

Figura 2: Eletrodo emissor (j) e eletrodo receptor (i).

$$\mathrm{V_{ij}} = \frac{1}{4\pi\left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)\mathrm{L_j L_i}} \int_{\mathrm{L_i}}\int_{\mathrm{L_j}} \mathrm{I_{Tj}} \frac{e^{-\gamma r}}{r} dl_j dl_i , \qquad (2)$$

$$\Delta\mathrm{V_{ij}} = -j\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathrm{L_i}}\int_{\mathrm{L_j}} \mathrm{I_{Lj}} \frac{e^{-\gamma r}}{r} d\vec{l}_j \cdot d\vec{l}_i . \qquad (3)$$

As equações integrais (2) e (3) definem o modelo matemático. A partir da determinação das distribuições de corrente $\mathrm{I_{Tj}}$ e $\mathrm{I_{Lj}}$ as demais grandezas de interesse podem ser calculadas. Definido o modelo matemático deve-se proceder a solução do mesmo por meio da aplicação de uma técnica adequada. A escolha desta técnica é crítica para o desenvolvimento do modelo, posto que ela deve manter um compromisso entre precisão, complexidade do código computacional resultante e tempo de processamento.

C. Solução do modelo

Conforme destacado na subseção anterior a partir da determinação das distribuições de corrente $\mathrm{I_{Tj}}$ e

I_{Lj} outras grandezas de interesse podem ser calculadas. Portanto, o problema consiste em solucionar as equações integrais (2) e (3). Um método adequado para obtenção da solução de tais equações é o método dos momentos. A aplicação do método dos momentos permite a redução de uma equação integral a um sistema de equações lineares cuja solução pode ser obtida por meio de algoritmos numéricos de inversão de matrizes [4].

O procedimento inicial consiste em discretizar o sistema sob estudo, constituído de eletrodos cilíndricos, em N elementos uniformes cada um de comprimento $\ell = \frac{L}{N}$. A razão entre o comprimento e o raio de cada elemento é muito maior que a unidade, o que permite a aproximação por correntes filamentares. Além disso, o comprimento é suficientemente pequeno de forma que a corrente total que dispersa, assim como a corrente longitudinal, são consideradas constantes ao longo de um elemento. No entanto, evidentemente, podem variar de um elemento para outro. Assim, as distribuições de corrente transversal e longitudinal desconhecidas ao longo do eletrodo são representadas como uma combinação linear de funções base, no caso funções do tipo pulso [4]. A Figura 3 ilustra a distribuição de corrente ao longo do eletrodo de aterramento, levando-se em consideração as distribuições de corrente propostas.

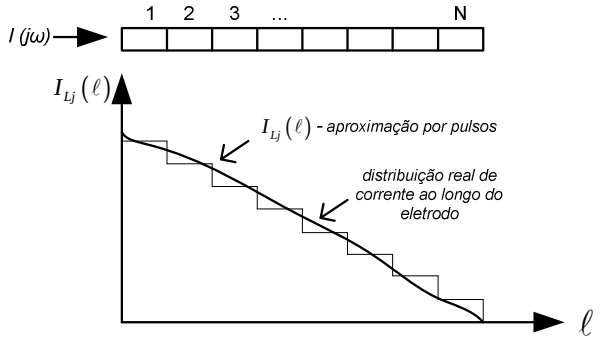

Figura 3: Distribuição de corrente ao longo do eletrodo.

A partir das considerações acima e da aplicação das equações (2) e (3) aos N elementos que compõe o eletrodo de aterramento, obtêm-se dois sistemas matriciais:

$$V = Z_T I_T, \tag{4}$$

onde V corresponde ao vetor elevação de potencial médio em relação ao infinito em cada elemento, I_T ao vetor de corrente transversal em cada elemento e Z_T é definida como matriz de impedância transversal.

$$\Delta V = Z_L I_L, \tag{5}$$

onde ΔV corresponde ao vetor de quedas de tensão em cada elemento, I_L ao vetor de corrente longitudinal em cada elemento e Z_L é definida como matriz de impedância longitudinal.

Os termos z_{Tij} correspondem à impedância transversal entre dois elementos, sendo um deles determinado elemento emissor de corrente (j) e outro receptor (i). Este conceito está associado a uma impedância de circuito aberto, também conhecido como impedância generalizada [4]. A impedância z_{Tij} é igual ao potencial médio no elemento receptor devido à fonte de corrente transversal no elemento emissor divido pela corrente transversal deste último. Ela representa a interação eletromagnética entre os diversos elementos e traduz fisicamente o acoplamento elétrico (capacitivo e condutivo) próprio e mútuo entre os segmentos. O valor de z_{Tij} depende apenas da geometria do aterramento e das características eletromagnéticas do meio.

Os termos z_{Lij} correspondem à impedância longitudinal entre dois elementos, sendo um deles determinado elemento emissor de corrente (j) e outro receptor (i). A impedância z_{Lij} é igual à queda de tensão induzida no elemento receptor devido à fonte de corrente longitudinal no elemento emissor divido pela corrente longitudinal deste último. Ela representa a interação eletromagnética entre os diversos elementos e traduz fisicamente o acoplamento magnético (indutivo) próprio e mútuo entre os segmentos. O valor de z_{Lij} depende apenas da geometria do aterramento e das características eletromagnéticas do meio.

O estabelecimento das relações entre as tensões e correntes nodais do sistema sob estudo permite reduzir as equações (4) e (5) a uma única equação matricial que assume a forma [6]

$$Ax=b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{N1} \\ V_{N2} \\ \vdots \\ V_{Np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

onde:

- A é a matriz resultante das relações entre correntes e tensões nos nós, de dimensão p X p, em que p é o número de nós do sistema. Em termos mais gerais, essa matriz representa uma composição das

matrizes originais Z_T e Z_L, o que significa que seus termos dependem apenas da geometria do aterramento e das características eletromagnéticas do meio.

- x é o vetor dos potenciais nodais V_N, de dimensão p X 1.
- b é o vetor correspondente à injeção de correntes externas, de dimensão p X 1. Este vetor é resultado da aplicação da lei de Kirchhoff das correntes para cada nó do sistema. Ele possui o valor 1 nos nós em que há injeção de corrente externa e 0 nos demais nós. No caso da equação (6) considera-se injeção de corrente apenas em um nó.

A partir da solução da equação matricial (6) e obtenção do vetor x, as distribuições de corrente transversal e longitudinal podem ser obtidas e, de posse destas últimas, grandezas de interesse, como a impedância de aterramento, podem ser calculadas.

D. Aspectos adicionais

Os procedimentos de cálculo descritos nas seções anteriores são válidos para um meio infinito. Contudo, no caso de sistema de aterramentos, os eletrodos estão inseridos em um meio que pode ser considerado como semi-infinito e não infinito. A inclusão do efeito da interface solo-ar é realizada mediante a inclusão de "imagens" correspondentes a cada fonte de corrente. Assim são somadas as parcelas associadas à imagem de cada elemento emissor, multiplicada por um fator que depende das características eletromagnéticas do meio. Este método é conhecido na literatura como método das imagens modificado e pode ser aplicado para avaliação do efeito da interface solo-ar na propagação dos campos eletromagnéticos associados [8].

O cálculo das impedâncias transversal e longitudinal implica na solução das integrais duplas oriundas das equações (2) e (3). Tais integrais não possuem solução analítica e são avaliadas numericamente. Uma extensa pesquisa para determinação da técnica numérica mais adequada foi realizada, sendo o método de Gauss-Legendre escolhido [2]. Esse método além de possuir uma boa precisão para um número reduzido de iterações, em relação a outras técnicas tradicionais, é de fácil implementação computacional [2].

Exemplo de aplicação: cálculo de impedância de aterramento

O sistema de aterramento pode ser caracterizado eletromagneticamente por meio de uma impedância de aterramento. O conceito de impedância é amplamente utilizado; entretanto, sua definição original e limitações merecem destaque. Ela é originalmente definida no domínio da freqüência para excitações com variação sinusoidal no tempo e se aplica, geralmente, entre pontos próximos no espaço [3]. Na análise de fenômenos de baixa freqüência (50/60 Hz), os efeitos reativos podem ser desprezados. Neste caso, a aproximação do potencial constante é válida para os eletrodos de aterramento e o circuito equivalente para o aterramento fica reduzido a uma série de condutâncias acopladas [1], [10]. Assim, em baixas freqüências, o sistema de aterramento pode ser caracterizado eletromagneticamente por meio de uma resistência de aterramento [1]. Em tais situações, a resistência de aterramento pode ser definida como uma condição limite da impedância de aterramento, sendo o valor desta para freqüência igual a zero. Neste caso a razão entre a elevação de potencial em relação ao infinito V_T desenvolvida no ponto de injeção de corrente e a corrente injetada I_J resulta em um número real, que é a resistência de aterramento R_T:

$$R_T = \frac{V_T}{I_J}. \tag{7}$$

Todavia, em geral, e principalmente na investigação de fenômenos de alta freqüência, o aterramento deve ser representado por uma impedância. No domínio da freqüência, para cada freqüência específica, uma impedância complexa deve ser precisamente determinada, como a solução do circuito equivalente do aterramento, ou seja:

$$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)}. \tag{8}$$

O valor de $Z(\omega)$ depende da geometria do aterramento e das características eletromagnéticas do solo, mas não onda de corrente injetada se o sistema é linear.

A. Resistência X impedância de aterramento

A Figura 4 apresenta um gráfico de impedância em função da freqüência para um eletrodo horizontal de 30 m de comprimento (raio 0,7 cm e profundidade 0,5 m) inserido em um solo de resistividade 2.400 Ω.m e permissividade relativa 15. Nela fica nítido que em baixas freqüências a impedância pode ser aproximada por um número real puro e o aterramento representado por uma resistência de aterramento. Contudo, na faixa superior do espectro, os valores de módulo e fase da impedância diferem sensivelmente daqueles característicos de baixas freqüências. Nesta faixa, a modelagem do eletrodo por uma resistência não é consistente e o sistema de aterramento deve ser representado por meio de uma impedância.

A importância do efeito capacitivo também está expressa no gráfico de $Z(\omega)$ ilustrado na Figura 4. Na faixa inferior do espectro de freqüência a impedância de aterramento é próxima do valor da resistência de aterramento. Nesta faixa, os efeitos da corrente capacitiva são desprezíveis em relação àqueles da corrente condutiva. À medida que a freqüência aumenta, o módulo da impedância difere do valor da resistência de aterramento, tornando-se menor devido ao efeito capacito. Efeito similar pode ser observado no ângulo da impedância de aterramento. O valor da impedância decai até que os efeitos indutivos passam a influenciar significativamente a impedância de aterramento. A impedância atinge um valor mínimo em uma determinada freqüência em que os efeitos capacitivo e indutivo se compensam (neste ponto o ângulo da impedância é zero, conforme ilustra a Figura 4). A partir desta freqüência o efeito indutivo começa a predominar.

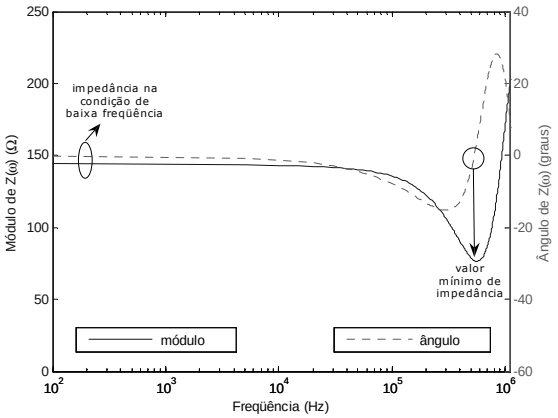

Figura 4: Impedância de aterramento ao longo do espectro de freqüência característico de uma descarga atmosférica

B. Influência da resistividade do solo e do ponto de injeção na impedância de aterramento

A influência da resistividade do solo e do ponto de injeção de corrente no comportamento da impedância de aterramento é ilustrada na Figura 5. As simulações foram realizadas para um eletrodo horizontal de 15 m de comprimento (raio 0,5 cm e profundidade de 0,5 m) inserido em um solo de permissividade relativa 10 e resistividades iguais a 100 Ω.m e 1.000 Ω.m. Considera-se dois pontos de injeção distintos: i) na extremidade do eletrodo (0 m) e ii) no centro do eletrodo (7, 5 m).

De acordo com a Figura 5, para o valor mais elevado de resistividade do solo, o módulo da impedância de aterramento é maior. Tal comportamento está de acordo com o esperado, tendo em vista que a dispersão da corrente injetada nos eletrodos é dificultada em solos pouco condutivos. Essa dificuldade implica no aumento da impedância de aterramento, que, em termos de circuitos elétricos, representa a oposição à passagem de corrente.

Ainda de acordo com a Figura 5, pode-se observar que o ponto de injeção apresenta influência reduzida em baixas freqüências. Todavia, na faixa superior do espectro a impedância apresenta valor reduzido para ponto de injeção central em relação ao valor obtido para ponto de injeção na extremidade do eletrodo. Tal comportamento está intimamente relacionado à definição da impedância de aterramento, que é a relação entre o potencial em relação ao infinito no ponto de injeção e a corrente de injetada. No caso de fenômenos de baixa freqüência, o potencial ao longo do eletrodo de aterramento pode ser considerado aproximadamente constante [1]. Logo nesta faixa, o potencial em relação ao infinito nos diversos pontos da malha de aterramento são aproximadamente iguais e a impedância de aterramento independe do ponto de injeção. No caso de fenômenos de altas freqüências, as solicitações advindas da incidência de uma descarga atmosférica, por exemplo, o potencial ao longo da malha de aterramento não é constante. Neste caso, o ponto de injeção influência no valor da impedância de aterramento. No caso analisado, a impedância é menor para injeção no ponto central. Em termos de circuitos elétricos, a corrente injetada no ponto central "enxerga" duas impedância em paralelo, o que justifica o menor valor obtido.

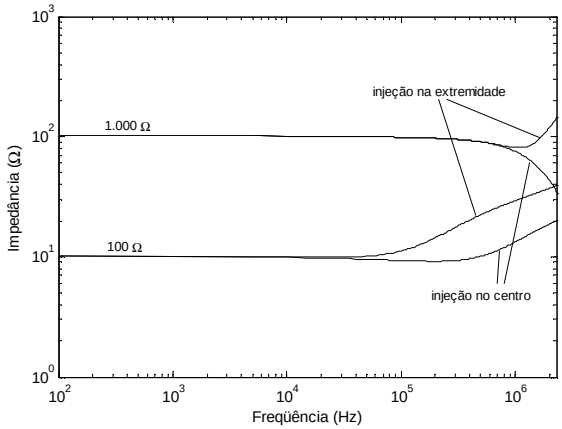

Figura 5: Influência da resistividade do solo e do ponto de injeção na impedância de aterramento ao longo do espectro de freqüência característico de uma descarga atmosférica.

C. Influência do comprimento do eletrodo

A influência do comprimento do eletrodo no comportamento da impedância de aterramento é ilustrada na Figura 6. As simulações foram realizadas para eletrodos horizontais de quatro comprimentos distintos (10 m, 20 m, 30 m e 40 m) com raio de 0,5 cm, profundidade de 0,5 m, inseridos em um solo de permissividade relativa 10 e resistividade igual a 100

Ω.m. Nas simulações o ponto de injeção foi considerado na extremidade do eletrodo.

Conforme pode-se observar, o aumento do comprimento do eletrodo apresenta sensível influência na redução da impedância de aterramento na faixa de baixas freqüências, todavia na faixa superior do espectro, após determinada freqüência, o comportamento da impedância de aterramento dos diferentes eletrodos é bastante similar. Ainda de acordo com o gráfico da Figura 6, o aumento do comprimento do eletrodo a partir de 30 m implica em pouca diminuição da impedância de aterramento. Tal fato está relacionado com o conceito de comprimento efetivo, que é aquele comprimento a partir do qual aumentos adicionais não ocasionam em uma diminuição significativa da impedância de aterramento.

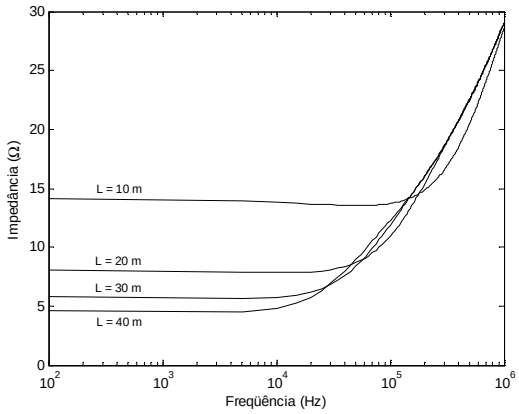

Figura 6: Influência do comprimento do eletrodo na impedância de aterramento ao longo do espectro de freqüência característico de uma descarga atmosférica.

Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um modelo matemático para representação de sistemas de aterramentos elétricos de configurações genéricas. O modelo matemático é solucionado a partir da aplicação do Método dos Momentos e inclui os acoplamentos eletromagnéticos entre os diversos elementos do aterramento. A partir da implementação computacional do modelo foi apresentado um exemplo de aplicação no cálculo da impedância de aterramento. Esse parâmetro foi calculado para diferentes valores de resistividade e permissividade elétrica do solo e diferentes comprimentos de eletrodo, dentro de uma ampla faixa de freqüências, que abrange desde transitórios característicos da indústria (freqüência de 60 Hz) até transitórios oriundos da incidência de descargas atmosféricas (1 MHz). Devido a generalidade de aplicação do modelo apresentado, a ferramenta computacional desenvolvida apresenta considerável potencialidade para aplicação em análise e projeto de sistemas de aterramentos.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao CEFET-MG por toda a estrutura oferecida e à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] R. S. Alípio, F. Bernardes Neto, M. A. O. Schroeder, T. A. S. Oliveira, “Modelagem computacional para cálculo da resistência de aterramento de sistemas elétricos de potência submetidos a fenômenos de baixa freqüência”, *Anais Simpósio de Mecânica Computacional (SIMMEC 2006)*, Araxá, Brasil, 2006.

[2] F. F. Campos Filho, Algoritmos Numéricos, 2 ed., LTC, 2007.

[3] L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva, “Grounding systems modeling for high frequencies and transients: some fundamental considerations”, *Proceedings of the IEEE Bologna PowerTech Conference*, Bologna, Itália, junho de 2003.

[4] R. F. Harrington, Field computation by moment methods, IEEE Press, New York, 1993.

[5] A. V. Oppenheim, Signals and systems, 5 ed., Prentice Hall, 1996.

[6] A. Soares Junior, S. Visacro Filho, “HEM: A model for simulation of lightning-related engineering problems”, *IEEE Transactions on power delivery*, vol. 20, nº 2, pp. 1206-1208, abril de 2005.

[7] J. A. Stratton, Electromagnetic theory, McGraw-Hill, New York, 1941.

[8] T. Takashima, T. Nakae, R. Ishibashi, “Calculation of complex fields in conducting media”, *IEEE Transactions on electrical insulation*, vol. EI-15, nº 1, pp. 1-7, fevereiro de 1980.

[9] M. Telló et all, *Aterramento elétrico impulsivo em baixa e alta freqüências*, ediPUCRS, Porto Alegre, 2007.

[10] S. Visacro Filho, *Aterramentos elétricos*, Artliber, São Paulo, 2002.

[11] S. Visacro, “A comprehensive approach to the grounding response to lightning currents”, *IEEE Transactions on power delivery*, vol. 22, nº 1, pp. 381-386, janeiro de 2007.