VIII ERMAC 8 º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20-22 de Novembro de 2008
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – Natal/RN

ESTUDO MATEMÁTICO DA DIFUSÃO DE MASSA NO INTERIOR DE SÓLIDOS ESFEROIDAIS PROLATOS

[1]Luis Antônio Dantas*; [2] Johnson Pontes de Moura**

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos - Univ. Federal de Campina Grande - UFCG, Rua: Aprígio Veloso – 882, CEP 58109-970, Campina Grande
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química - Univ. Federal de Campina Grande - UFCG, Rua: Aprígio Veloso – 882, CEP 58109-970, Campina Grande
EMAIL: johnsonmoura@gmail.com

RESUMO

A solução analítica da equação de difusão de massa em coordenadas esferoidais prolata considerando coeficiente de difusão constante e condição de contorno convectiva é apresentada. A solução é obtida usando o método da separação de variáveis. A metodologia é aplicada para predizer o teor de umidade médio e a distribuição do teor de umidade, de um sólido esferoidal prolato (elipsóide de revolução), durante o processo de secagem. Resultados analíticos são comparados com resultados numéricos reportados na literatura e uma boa concordância foi obtida.

Como aplicação, a metodologia utilizada para predizer a cinética de secagem e a distribuição do teor de água em um prolato esférico de raio L_2/L_1 = 2,0 e Bi = 1,0. A Tabela 1 apresenta os valores de c, as raízes da função radial esférica χ, para $\xi = L_2 / L$, os autovalores b dos coeficientes de expansão $d_{n,m}$ e coeficientes $A_{m.k}$ e, finalmente, os valores obtidos para o critério de ortogonalidade para funções radiais e angulares.

Três códigos computacionais foram implementados, utilizando-se o software Mathematica®. Para obter os valores dos coeficientes c, b, $d_{n,m}$, e $A_{m,k}$ e as condições de ortogonalidade da função da solução apresentada no final Equação (19). Pode-se observar que a implementação desta solução analítica exigiu um árduo trabalho e um excessivo número de horas de trabalho computacional, para além da sua comparação numérica com a solução que é dada por Lima (1999) e Lima & Nebra (2000).

Palavras-chave: secagem, solução exata, massa, difusão, geometria elíptica

INTRODUÇÃO

A solução formal da equação de difusão foi obtida a partir de várias condições de fronteira, em que o coeficiente de difusão é constante ou variável, em corpos homogêneo e heterogêneo ou isotrópica anysotropic, e em casos estáveis ou instáveis. As equações diferenciais parciais para

estados não estáveis de difusão de massa foram utilizadas para resolver a difusão transferência de massa em corpos com geometria simples, como Chapas, cilindros e esferas (Luikov, 1968; Skelland, 1974 e Crank, 1992). Norminton's e Blackwell's (1964), Haji-Sheikh's & Sparrow (1966), Alassar's (1999) e Limass et al. (1999) obras que podem ser citados, por exemplo, para geometrias complexas e condições de fronteira constantes.

Norminton & Blackwell (1964) apresentam uma solução analítica para prever o fluxo de calor no semi-espaço em torno de um disco circular isotérmico fino.

Haji-Sheikh & Sparrow (1966) apresenta uma solução analítica para a equação de transferência de calor em um corpo prolato esferóide com temperatura constante na superfície, utilizando um sistema de coordenadas elíptica bidimensional, mas os resultados dos temperatura no centro e no ponto focal são dadas separadamente.

Lima et al. (1999), apresentou uma solução analítica para prever a transferência de massa dentro de um prolato esferóide. Eles consideraram como sendo constantes as propriedades de equilíbrio e condições de fronteira na superfície do sólido. Como aplicação,os resultados da distribuição do teor de água no interior do sólido bem como o teor de água médio para um aspecto radial é apresentado.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma solução analítica para descrever o transporte contínuo médio em um esferóide prolato, utilizando um sistema de duas dimensões, considerando condições de fronteira convectiva na superfície do sólido.

MODELO MATEMÁTICO

A equação de difusão de massa em sua forma reduzida, é dado por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla.(D\nabla M) \tag{1}$$

Onde:
D - é o coeficiente de difusão;
M - é o teor de água;
t - é o tempo.

Dependendo da forma geométrica do corpo, um sistema de coordenadas, adequado para descrever o domínio em estudo, deve ser selecionada. No caso específico do elipsóide de revolução, o adequado é um sistema prolato esférico. As relações entre o par cartesiano (x, y, z) e do sistema de coordenadas do sistema prolato esférica (μ,Φ,ω) são apresentadas por Haji-Sheikh & Sparrow (1966):

$$\begin{aligned} x &= L \sinh\mu \sin\Phi \cos\omega \\ y &= L \sinh\mu \sin\Phi \sin\omega \\ z &= L \cosh\mu \cos\Phi \end{aligned} \tag{2a-c}$$

onde L é o comprimento focal equivalente a $(L_2^2 - L_1^2)^{1/2}$. Um elipsóide de revolução esquema é mostrado na figura 1.

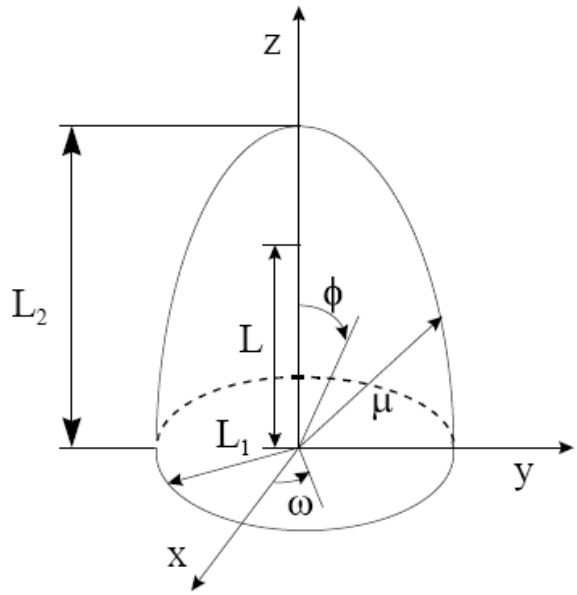

Figura 1 - Características de um prolato esférico sólido

Definindo $\xi = \cosh \mu$, $\eta = \cos\Phi$, $\zeta = \cos \omega$, os coeficientes métricos e o Laplaciano para o novo sistema de coordenadas podem ser obtidas utilizando a relações matemáticas que são dadas por Abramowitz e Stegun (1972). Utilizando os coeficientes métricos, as variáveis ξ, η, ζ, as regras de derivação, a equação de difusão de massa pode ser escrita como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((\xi^2-1)D\frac{\delta M}{\delta \xi}\right)\right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left((1-\eta^2)D\frac{\delta M}{\delta \eta}\right)\right] + \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{L^2(\xi^2-\eta^2)(1-\eta^2)}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)D\frac{\delta M}{\delta \zeta}\right)\right] \quad (3)$$

Para uma situação com a simetria em torno de z eixo, é:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((\xi^2-1)D\frac{\delta M}{\delta \xi}\right)\right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left((1-\eta^2)D\frac{\delta M}{\delta \eta}\right)\right] \quad (4)$$

De acordo com a Figura 2, a $\xi = \xi_o$ (constante), $\xi_o>1$ é uma elipsóide alongada de revolução, com maior eixo de comprimento $L\xi$ e de menor comprimento no eixo $L(\xi^2-1)^{1/2}$. As superfícies ξ são constantes em prolatos esféricos confocal e eles têm centro comum na origem. A degeneração da superfície $\xi = 1$ é a curva que liga o centro (z = 0) ao ponto focal (z = L). A superfície $\eta = \eta_o$ (constante), $\eta_o <1$, é um cone assintótico cujas faces hiperbólicas de revolução geram a linha passa na origem, e é a inclinação em ângulo $\Phi=\cos^{-1}\eta$ para o eixo-z. A degeneração da superfície $\eta = 1$ faz parte do eixo z> L.

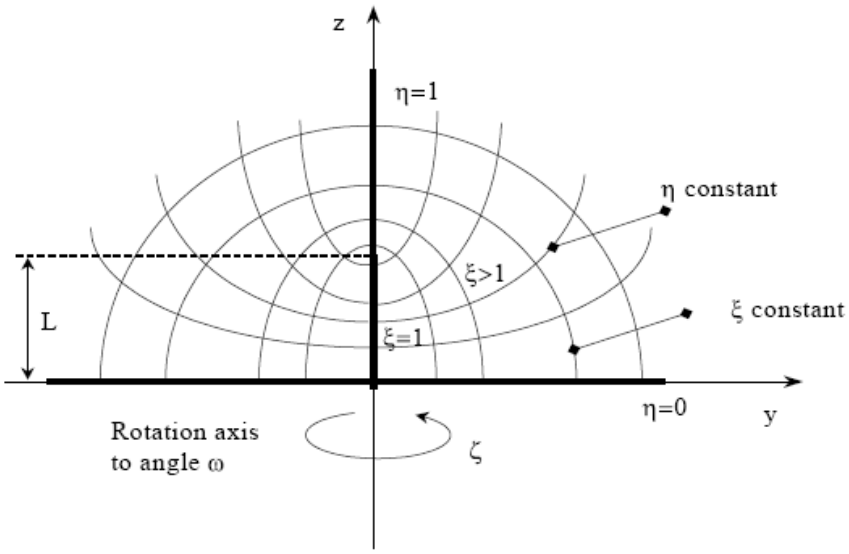

Figura 2 – Sistema de coordenadas de um sistema Prolato Esférico

As condições iniciais e de fronteira da equação (4) são os seguintes:

$$M(\xi,\eta,0) = M_o = constante \tag{5a}$$

$$-\frac{D}{L}\sqrt{\frac{\sqrt{(\xi^2-1)}}{\sqrt{(\xi^2-\eta^2)}}}\frac{\delta M}{\delta \xi}\Bigg|_{\xi=\xi_f} = h_m\left[M(\xi=\xi_f,\eta,t) - M_e\right] \tag{5b}$$

onde $\xi = L_2/L$ à superfície do sólido, h_m é o coeficiente de transferência de massa e M_e é o teor de água de equilíbrio.

Usando o método de separação das variáveis, podemos escrever $M(\xi,\eta,t)= \psi(\xi,\eta)\theta(t)$. A solução da equação (4) é, então, (Haji-Sheikh e Sparrow, 1966):

$$M = \psi(\xi,\eta)\ Exp\left(-c^2\frac{D_t}{L^2}\right) \tag{6}$$

onde c é constante.

Assumindo que o coeficiente de difusão é constante e aplicando a Equação (6) na Equação (4), obtêm-se:

$$-\left(\frac{c^2}{L^2}\right)\psi = \frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)}\left[\frac{\delta}{\delta\xi}\left((\xi^2-1)\frac{\delta\psi}{\delta\xi}\right)\right] + \frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)}\left[\frac{\delta}{\delta\eta}\left((1-\eta^2)\frac{\delta\psi}{\delta\eta}\right)\right] \tag{7}$$

que pode ser escrito em uma forma resumida da seguinte forma:

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{c^2}{L^2}\right)\psi = 0 \tag{8}$$

Assumindo que $\psi(\xi,\eta) = \chi(\xi).\ \lambda(\eta)$, e substituindo na Equação (8), e separando as variáveis, obtêm-se duas equações diferenciais ordinárias:

$$\left[\frac{d}{d\xi}\left((1 - \xi^2)\frac{d\chi}{d\xi}\right)\right] + (b - c^2\xi^2)\chi = 0 \tag{9}$$

$$\left[\frac{d}{d\eta}\left((1 - \eta^2)\frac{d\lambda}{d\eta}\right)\right] + (b - c^2\eta^2)\lambda = 0 \tag{10}$$

Nas Equações (9) e (10), *b* é a constante de separação ou autovalor. Estas duas equações são exatamente da mesma forma, λ como uma função de η, varia entre 0 e o ponto singular +1, ao mesmo tempo que χ como uma função de ξ, varia entre o ponto singular +1 e L_2/L. A solução do angular da função $\lambda(\eta)$ é expresso em termos de uma Função de Legendre, série de polinômios do primeiro tipo (P_n), enquanto que a função radial $\chi(\xi)$ é obtido a partir de Funções de Bessel esférico, série do primeiro tipo de ordem n (J_n). A solução das equações (9) e (10) são dada por:

$$\chi_m(c,\xi) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_{n,m}\right]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} . d_{n,m} . j_n(c,\xi) \tag{11-a}$$

$$\lambda_m(c,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,m}(c).P_n(\eta) \tag{11-b}$$

$$\alpha_r d_{r+2,m} + (\beta_r - b_n)d_{r,m} + \gamma_r d_{r-2,m} = 0 \tag{12}$$

onde:

$$\alpha_r = \frac{(r+2)(r+1)c^2}{(2r+5)(2r+3)} \tag{13-a}$$

$$\beta_r = \frac{[(2r)(r+1) - 1]c^2}{(2r-1)(2r+3)} + r(r+1) \tag{13-b}$$

$$\lambda_r = \frac{r(r-1)c^2}{(2r-3)(2r-3)} \tag{13-c}$$

com r = 0,2,4,...

Os valores de b_n são obtidos pelas seguintes equações transcendentais:

$$U(b_n) = U_1(b_n) + U_2(b_n) = 0 \tag{14}$$

com

$$U_1(b_n) = \varphi_n - b_n \frac{\partial_n}{(\varphi_{n-2} - b_n) - \frac{\partial_{n-2}}{(\varphi_{n-4} - b_n)} - \dots} \quad \text{(15-a)}$$

$$U_2(b_n) - - \frac{\partial_{n+2}}{(\varphi_{n+2} - b_n) - \frac{\partial_{n+4}}{(\varphi_{n+4} - b_n)} - \dots} \quad \text{(15-b)}$$

e

$$\partial_n = \frac{n^2(n-1)^2c^4}{(2n-1)^2(2n+1)(2n-3)}; \quad n \geq 2$$

$$\varphi_n = n(n+1) + \frac{c^2}{2}\left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]; \quad n \geq 0$$

A técnica utilizada na equação (14) para determinar os coeficientes b_n é chamado técnica de frações continuadas (Stratton et al., 1941; Stratton et al., 1956). Esta técnica tem sido utilizada para determinar os autovalores de c ≤ 8.0. Quando c ≥10.0, os autovalores são obtidos através de uma expansão assintótica. O desenvolvimento assintótico de b_n é dada pelo método de aproximações sucessivas, como mostrado abaixo

$$b_n = (2n+1)c\,\frac{(2n^2+2n+3)}{2^3} - \frac{(2n+1)(n^2+n-3)}{2^4c} - \frac{5(n^4+2n^3+7n-3)}{2^6c^2} - \frac{(66n^5+165n^4+962n^3+1278n^2+1321n+453)}{2^{10}c^3} - \frac{(252n^6+75n^5+5885n^4+10510n^3+18478n^2+13349n+4425)}{2^{12}c^4} - \frac{[527(2n+1)^7+61529(2n+1)^5+1043961(2n+1)^3+2241599(2n+1)]}{2^{30}c^5} + O(c^{-6}) \quad (16)$$

Onde O (c^{-6}) representa a ordem do erro.

As séries convergentes para $d_{n,m}$ podem ser obtidas a partir de um conjunto de valores discretos dos autovalores b_n. Há dois conjuntos de finitos de soluções, para um mesmo valore de n, e um outro para outros valores. O menor valor de b_n corresponde ao n = 0, o próximo para n = 2, (Morse & Feshbach, 1953), assim, o conjunto que corresponde ao mesmo valor de n foi utilizado na presente trabalho. Os valores dos coeficientes $d_{n,m}$ são diferentes, dependendo da normalização adotada no sistema. O critério utilizado pelos autores é apresentado a seguir:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r/2}(r)!}{2^r\left(\frac{r}{2}\right)!\left(\frac{r}{2}\right)!} d_{r,m} = \frac{(-1)^{n/2}(n)!}{2^r\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (17)$$

para r = 0,2,... e n = 0,2

A Equação (17), juntamente com as Equações (16) ou (12), permite a completa determinação dos coeficientes $d_{n,m}$. O índice n está em todos os casos ≥0. Temos $P_n(\eta) = 0$ Para n <0 indicando que a série realmente começa em n = 0.

A condição que restringe os valores de b_n em equações diferenciais é refletido na Equação (12) como uma exigência de que a razão dos coeficientes $d_{n,m}/d_{n-2,m} \rightarrow 0$, quando n → 0 (Stratton et

al., 1956). Observando que os coeficientes c, b, d, eles devem ser obtidos e satisfazem a Equação (5b) na superfície do prolato esférico ($\xi=L_2/L$). Esta condição é dada por:

$$\chi_m = -\frac{1}{Bi}\sqrt{\frac{\xi_f^2-1}{1-\eta^2}}\,\frac{\delta\chi_m}{\delta\xi}\Bigg|_{\xi_f = L_2/L} \tag{18}$$

Com a determinação dos coeficientes $d_{n,m}$, a solução formal do problema é dada por:

$$M(\xi,\eta,t) - M_e = \sum_{m=0,2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}\, e^{-c_{mk}^2\frac{Dt}{L^2}}\chi_m(C_{mk},\xi)\lambda_m(C_{mk},\eta) \tag{19}$$

Os coeficientes A_{mk} são obtidos a partir das condições de ortogonais. Substituindo a condição inicial da equação (5a) na eq. (19), obtêm-se:

$$M_o - M_e = \sum_{m=0,2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}\,\chi_m(C_{mk},\xi)\lambda_m(C_{mk},\eta) \tag{20}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (20) por $\chi_p(C_{pk},\xi)\lambda_p(C_{pk},\eta)(\xi^2-\eta^2)$ e integrando em um quarto do volume elipsóide, obtêm-se:

$$\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}} \chi_p(C_{pk},\xi)\lambda_p(C_{pk},\eta)(\xi^2-\eta^2)\,(M_o - M_e)\,d\xi\,d\eta$$
$$= \sum_{m=0,2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}} \chi_p(C_{pk},\xi)\lambda_p(C_{pk},\eta)(\xi^2-\eta^2)A_{mk}\,\chi_m(C_{mk},\xi)\lambda_m(C_{mk},\eta) \tag{21}$$

onde a integração e a soma das operações foram trocadas.

Considerando que a integração na Equação (20) pode ser feita termo a termo, e a ortogonalidade das funções, o único termo no lado direito é uma integral que é diferente de zero, é o termo com m=p. Para m = p, a resultado é:

$$A_{mk} - \frac{\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}} \chi_m(C_{mk},\xi)\lambda_m(C_{mk},\eta)(\xi^2-\eta^2)\,(M_o - M_e)\,d\xi\,d\eta}{\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}}\left[\chi_m(C_{mk},\xi)\lambda_m(C_{mk},\eta)\right]^2(\xi^2-\eta^2)\,d\xi\,d\eta} \tag{22}$$

onde o denominador é a norma de $(\chi_m\,\lambda_m)\,(\xi^2-\eta^2)$.

Definindo os parâmetros não dimensionais:

$$M^* = \frac{M - M_e}{M_o - M_e}; \qquad t^* = \frac{Dt}{L^2}; \qquad Bi = \frac{h_m L}{D} \tag{23}$$

Pode ser escrita a Equação (18) do seguinte modo

$$M^* = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{mk}}{(M_o - M_e)} e^{-c_{mk}^2 t^2} \chi_m(C_{mk}, \xi) \lambda_m(C_{mk}, \eta) \tag{24}$$

O teor de água médio de sólidos pode ser calculada do seguinte modo:

$$\overline{M^*} = \frac{\int_0^1 \int_1^{\frac{L_2}{L}} \left\{ \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{mk}}{(M_o - M_e)} \right] e^{-c_{mk}^2 t^2} \chi_m(C_{mk}, \xi) \lambda_m(C_{mk}, \eta) \right\} (\xi^2 - \eta^2)\, d\xi d\eta}{\int_0^1 \int_1^{\frac{L_2}{L}} (\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta} \tag{24}$$

onde o denominador é o volume total de sólidos prolato em um sistema de coordenadas esférico.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como aplicação, a metodologia utilizada para predizer a cinética de secagem e a distribuição do teor de água em um prolato esférico de raio L_2/L_1 = 2,0 e Bi = 1,0. A Tabela 1 apresenta os valores de *c*, as raízes da função radial esférica χ, para $\xi = L_2 / L$, os autovalores *b* dos coeficientes de expansão $d_{n,m}$ e coeficientes $A_{m.k}$ e, finalmente, os valores obtidos para o critério de ortogonalidade para funções radiais e angulares.

Três códigos computacionais foram implementados, utilizando-se o software Mathematica®. Para obter os valores dos coeficientes *c*, *b*, $d_{n,m}$, e $A_{m,k}$ e as condições de ortogonalidade da função da solução apresentada no final Equação (19). Pode-se observar que a implementação desta solução analítica exigiu um árduo trabalho e um excessivo número de horas de trabalho computacional, para além da sua comparação numérica com a solução que é dada por Lima (1999) e Lima & Nebra (2000).

Alguns resultados obtidos com o código computacional foram exaustivamente comparados com os resultados apresentados em trabalhos de Flammer (1957), Haji-Sheikh & Sparrow (1966), Stratton et al. (1941), e Abramowitz & Stegun (1972). Os valores contidos na Tabela 1 podem ser usados para reproduzir os resultados que são mostrados neste trabalho e para ajudar os investigadores a validar o código computacional em futuras obras.

Os resultados deste trabalho foram comparados com resultados numéricos para um elipsóide ($L_2/L_1 = 1.1$), com *Bi* infinita dada por Haji-Sheikh & Sparrow (1966) para validar o modelo matemático da Figura 3 mostra a comparação entre a taxa de concentração em o centro e o ponto focal de uma prolato esférico como uma função de *Fo* definida como $Fo = Dt/L_1^2$. Existe concordância quase total entre os resultados, como pode ser observado.

A Figura 4 mostra a comparação entre o teor de água médio como uma função de Fourier, durante o processo de secagem de um prolato esférico com raio $L_2/L_1 = 2,0$ e $Bi = 1,0$; que foi obtido neste trabalho e os resultados numéricos relatados por Lima (1999) e Lima & Nebra (2000).

A Figura 5 ilustra a distribuição do teor de água no interior do prolato esférico através da utilização de diferentes tons de três séries de Fourier. O teor de água muda com a mudança das

coordenadas angulares e radiais. A comparação dos gráficos indicam que o aumento dos valores de η causa diminuição do teor de água para qualquer ξ em um *Fo*. A diminuição do perfil do teor de água em um ponto se dá com o aumento dos valores $Fo(\xi,\eta)$, o que indica que o fluxo do teor de água ocorre do centro para a superfície. Um grande teor de água depende das coordenadas angulares e do radial coordenadas angulares. A dependência da concentração tem com as coordenadas angulares é ligeiramente maior do que a sua dependência com as coordenadas radial. Neste caso, o adimensional está diminuindo com teor de umidade e o aumento de ξ, para todos os valores do *Fo*. É verificado que o teor de água tem elevados gradientes, exceto para as regiões perto do centro do corpo. Isto é verificado que as superfícies de ξ e η são constante, não são esféricas, mas eles apresentam aproximadamente um comportamento elíptico..

Verifica-se que a taxa de concentração diminui mais rapidamente na extremidade do eixo z ($z = L_2$). Este efeito decai para o final do eixo y ($z = L_1$). Este comportamento ocorre em todos os tipos de elipsóides, e que aumenta proporcionalmente ao raio. No fim, o comportamento do teor de água com as coordenadas angulares é diferente de uma esfera ($L_2/L_1 = 1,0$), onde existe relativa simetria em relação a estas coordenadas. Esta diferença irá aumentar com o aumento L_2/L_1.

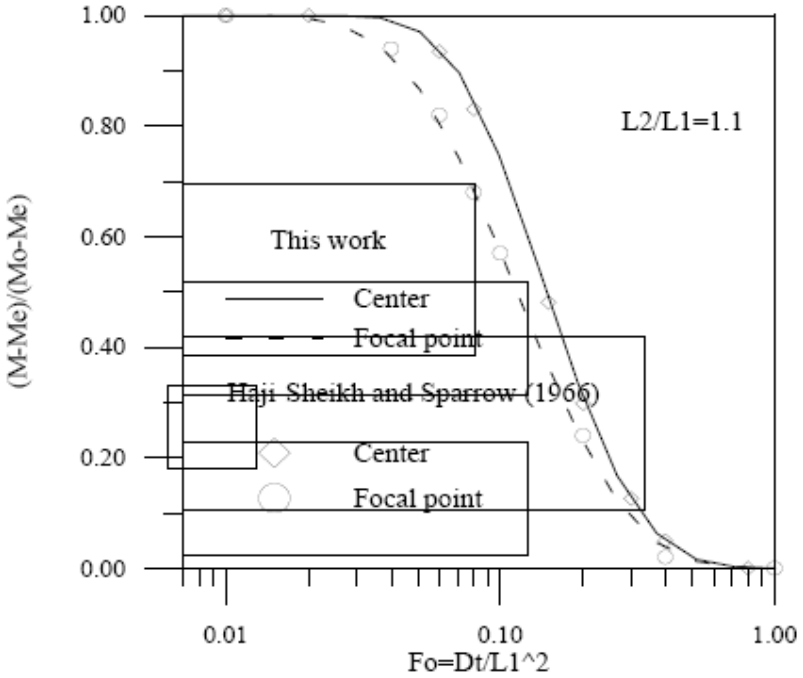

Figura 3 - Comparação entre o teor de água, em relação ao centro e ponto focal de uma esférica com
$L_2/L_1 = 1,1$, que é dada pelos autores e Haji-Sheikh & Sparrow (1966)

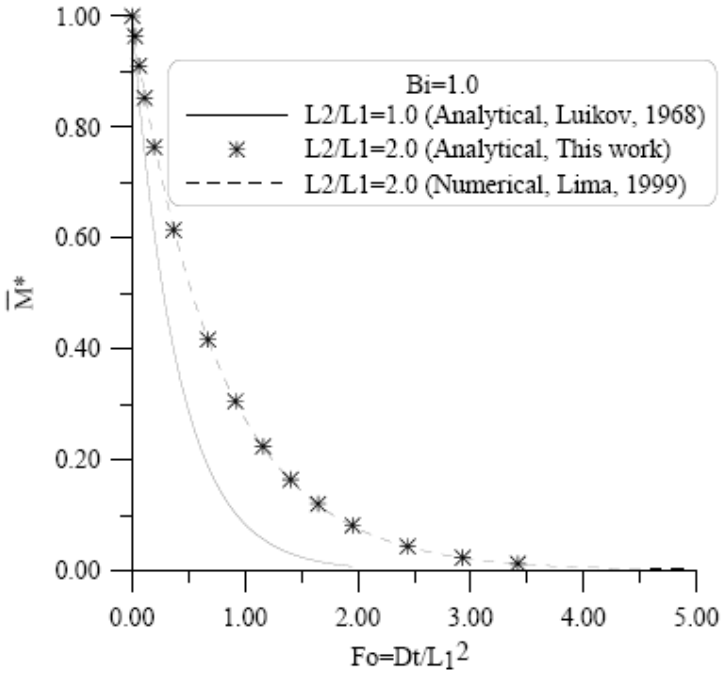

Figura 4 - adimensional do teor de água médio como uma função de uma série de Fourier com esférica
L_2/L_1 = 2,0 e Bi = 1,0, dado pelos autores e Lima (1999), e Luikov (1968) a esfera

Tabela 1 – Valores dos coeficientes e critério de ortogonalidade de funções esféricas para
L_2/L_1=2.0 e Bi=1.0

m	k	c	b	$A_{mk}/(Mo - Me)$	$\int_0^1 \int_1^{L_2/L} \chi_m \lambda_m \chi_p \lambda_p \left(\xi^2 - \eta^2\right) d\xi d\eta$, m≠p
	1	1,953419	1,08354	1,48481	-0,0004899991
	2	7,47987	6,69892	-0,866435	0,00330227
	3	10,2890584	9,55454	0,342731	0,00290506
0	4	12,9668292	12,2296	15,468	-0,00156183
	5	15,6714269	14,9323	-26,6011	0,000930949
	6	18,3848365	17,6443	29,1506	-0,000531135
	7	21,10095	20,3593	-24,519	0,00026297
	8	23,8186	23,7939	-9,15009	-0,0000915305
	1	5,81391	39,3376	0,0109559	-0,000164286
	2	13,0637331	61,462	0,127735	0,00769859
	3	15,7245503	74,7909	17,2802	0,000591925
2	4	18,396268	88,165	-23,7898	-0,000347971
	5	21,1103237	101,711	21,4571	0,000202749
	6	23,816222	115,283	-14,8797	-0,00010286
	7	26,532186	128,869	8,43806	0,0000385393
	1	10,26605	80,089	1,57958	0,000406412
	2	15,69248	129,670	0,383505	0,000147741
	3	18,4858417	154,969	11,5816	0,00021217
4	4	21,10981	178,686	-16,8422	-0,000118301
	5	23,808902	203,053	12,9801	0,0000591328
	6	26,5200414	227,511	-7,21616	-0,0000195042
	7	29,2384852	252,022	11,842	0,0000337982
	1	12,58607	137,593	1,50672	0,000247829
	2	18,11000	211,265	-0,082394	-0,0000192767
	3	21,24923	252,551	3,86001	0,0000823914
6	4	23,83100	286,383	-9,7495	-0,0000432522
	5	26,517288	321,515	7,42446	0,0000230514
	6	29,20961	356,679	17,3211	0,000148078
	7	34,90268	430,936	-7,62993	-0,000224578
	1	15,01682	210,010	1,91373	0,000187496
	2	20,22141	301,763	-0,772457	-0,0000422199
	3	23,9797148	366,791	0,387092	0,0000154751
8	4	26,54714	410,966	-1,67017	4,47683,10E-7
	5	29,26756	457,641	20,0474	0,000105134
	6	35,66107	567,020	3,96735	0,0000539277
	7	39,52014	632,911	-12,1622	-0,0000827413
	1	17,49912	297,357	2,41766	0,00020642
	2	22,22500	401,371	-1,13313	-0,0000385566
	3	26,6785033	497,183	-0,290447	-0,0000462464
10	4	29,18105	550,598	-5,85693	-0,000307788
	5	35,27147	679,930	-4,87921	-0,0000827867
	6	39,39431	767,163	10,6966	0,0000700765
	7	43,07483	844,907	-11,6956	-0,0000372207
	1	20,01203	399,693	4,28054	0,000190972
	2	24,44630	516,960	-1,10305	-0,0000271166
	3	29,32767	642,774	6,30253	0,000150271
12	4	35,32351	795,359	2,89170	0,000066225
	5	39,53762	901,959	-4,53534	-0,0000553565
	6	43,28633	996,524	3,32747	0,0000215678
	1	22,54517	517,067	5,47110	0,000251751
	2	26,79318	648,431	-1,03888	-0,0000197972
14	3	30,71061	766,522	-5,93359	-0,000116087
	4	35,40961	906,288	-1,72847	-0,0000250977
	5	39,29675	1021,03	1,22652	$-5,16498.10^{-6}$
	6	42,81976	1124,60	3,41665	0,0000216238

Figura 6 ilustra a distribuição do teor de água no interior do sólido com raio L_2/L_1 = 1,5 e L_2/L_1 = 2,0 em *Fo* = 0,122 e *Bi* infinito. Os maiores gradientes de teores de água são encontrados como esperado, em comparação com o caso ao *Bi* = 1,0.
As Figuras 7 e 8 mostram o teor de água como função das coordenadas radiais e angulares para várias séries de Fourier durante o processo de secagem.

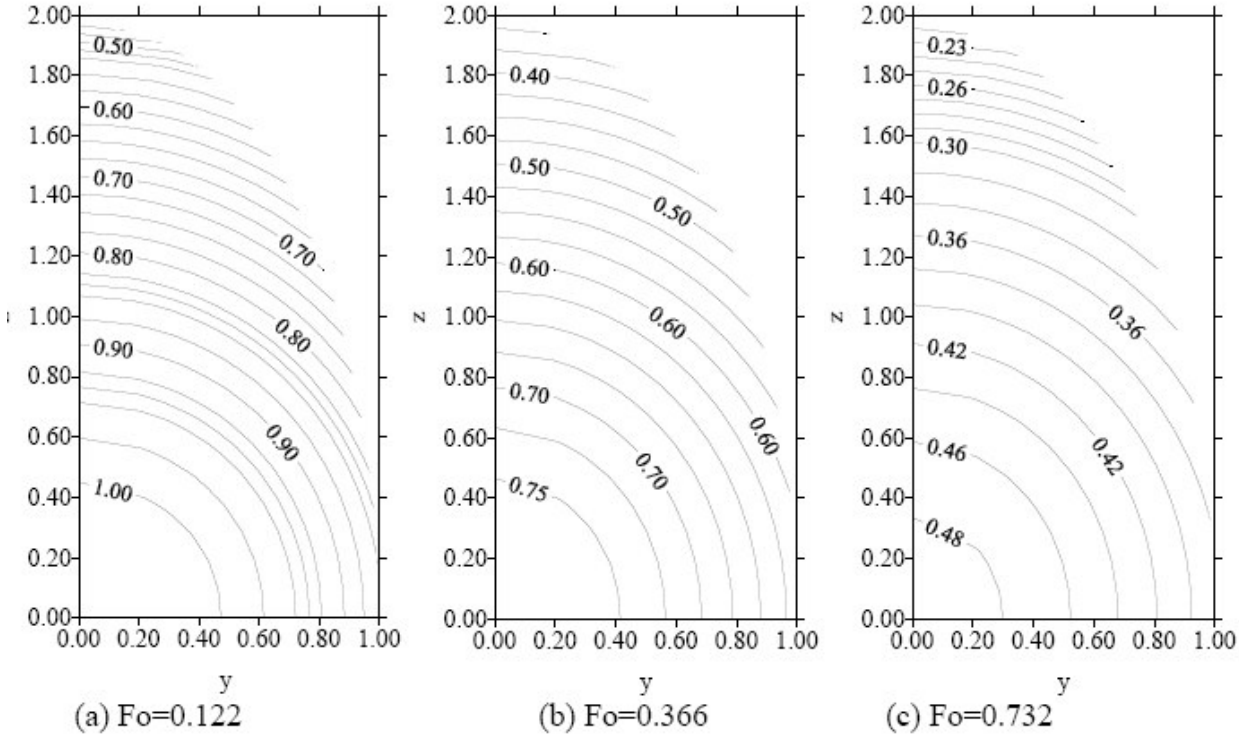

Figura 5 – Distribuição do teor de água dentro de um prolato espefóide de raio L_2/L_1=2.0 e Bi=1.0 Durante o processo de secagem. $Fo=Dt/L_1^2$

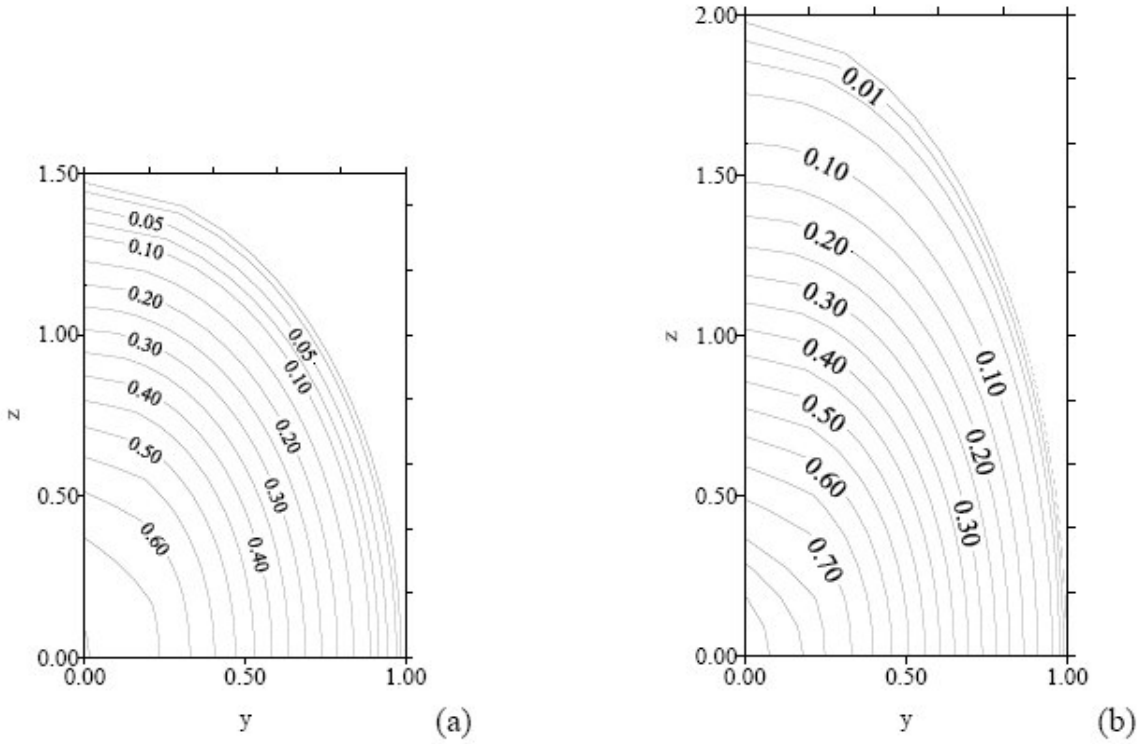

Figura 6 – Distribuição do teor de água dentro de um prolato espefóide de raios (a) L_2/L_1=1.5 e (b) L_2/L_1=2.0 para Fo=0.122 e Bi infinito.

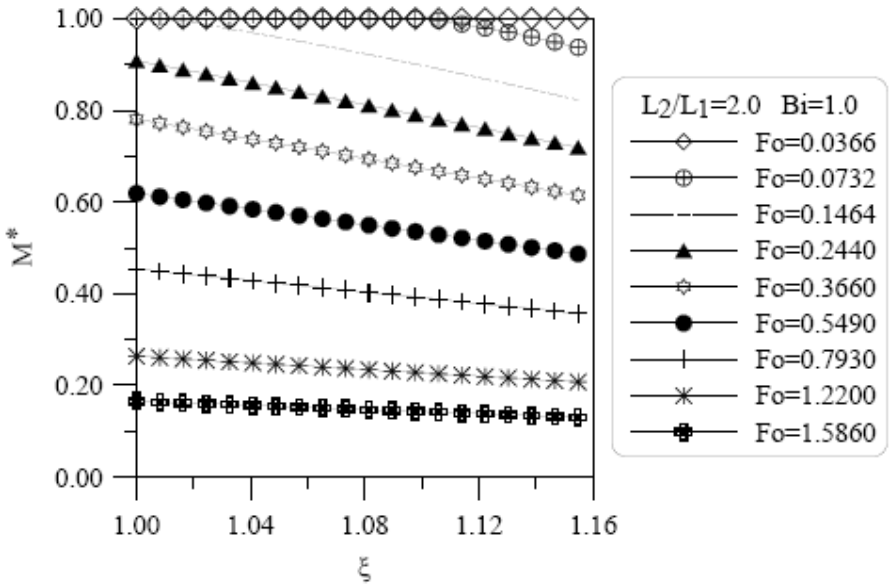

Figura 7 - Adimensionais do teor de água como função de ξ em η = 0,0 (0≤ y≤ L1) e várias séries de Fourier para L_2/L_1 = 2,0 e Bi = 1,0.

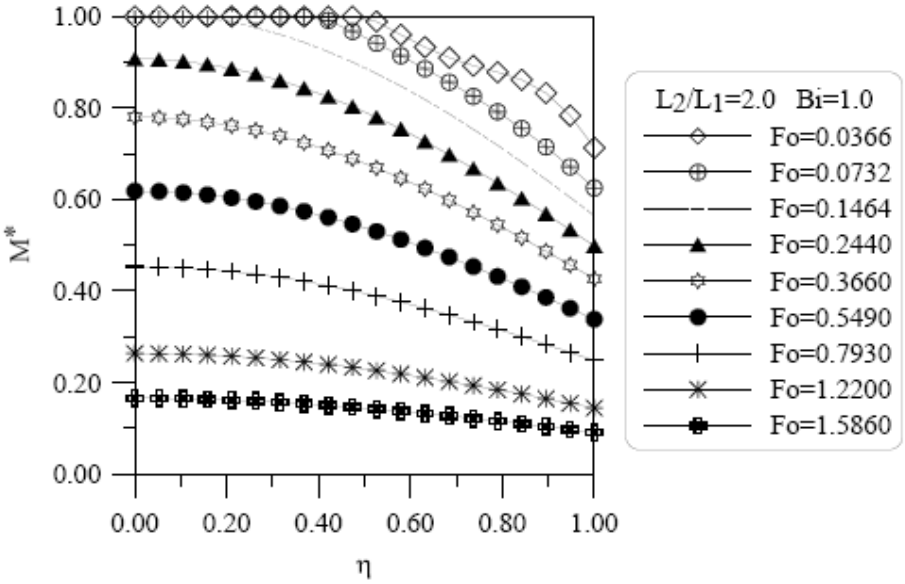

Figura 8 - Adimensionais do teor de água como função de η em ξ = 1,0 (0≤ z≤ L1) e várias séries de Fourier para L_2/L_1 = 2,0 e Bi = 1,0.

Os resultados para a elipsóide, calculada com os coeficientes apresentados na Tabela 1, apresentam um pequeno erro para qualquer série de Fourier. Esta diferença pode ser atribuída à instabilidade da função de Bessel para pequenas séries de Fourier, e para as sucessivas aproximações utilizadas no método apresentado. Este último problema pode ser resolvido através de um maior número de termos na determinação dos coeficientes. Alguns outros resultados são observados: o teor de água depende fortemente de *Fo* e o teor de equilíbrio é atingido em *Fo* ≥ 5,0.

CONCLUSÕES

A presente teoria foi aplicada a um elipsóide com L_2/L_1 = 2,0 tratados aqui como uma aplicação do método geral. Ela indica que o método pode ser resolvido diretamente pelo uso da Equação (24) e (25), com a determinação de autovalores e coeficientes esféricos. O método não requer uma geometria particular em análise mudando de esfera para cilindro além de elipsóides de revolução. A solução analítica aqui apresentada pode ser usada para obter resultados que descrevem os fenômenos transitórios, em particular, à distribuição do teor de água e a cinética de secagem, em corpos esférico, cilíndrico e de geometria elíptica, considerando o coeficiente de difusão constante e da massa difusão como único mecanismo de migração do teor de água. A obtenção da solução se refere ao caso onde a condição da superfície da fronteira é convectiva, que pode ser utilizado para validar numérica soluções, o que pode ser alargado aos casos em condições menos restritivas.

O valor médio do teor de água é particularmente útil quando o modelo é usado para determinar o coeficiente de difusão de secagem cinético de dados experimentais. A utilização de coordenadas adimensionais, razão do teor de água e de séries Fourier, foram suficientes para obter resultados gerais, que devem ser aplicados a qualquer caso de transferência de calor ou de massa. O teor de água é fortemente influenciado pela série de Fourier, em qualquer posição no interior da esfera. O teor de água de equilíbrio é aproximado, em qualquer ponto do corpo, a para $Fo = Dt/L_1^2 \geq 5.0$ ($L_2/L_1=2,0$ e $Bi = 1,0$) segundo para os resultados relatados na literatura. O teor de água adimensional diminui mais rapidamente na extremidade do eixo z ($z = L_2$) e decai até o final do eixo y ($z = L_1$) indica que as regiões próximas de $z = L_2$ secam em primeiro lugar.