# VIII ERMAC-R3

**5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional**

20 a 22-Novembro-2008

Universidade federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN


---

# Distribuições Subexponenciais


**Fabiana Tristão de Santana**

Faculdade Câmara Cascudo,

59030-350, Natal, RN

E-mail: fabianatristao@fcamaracascudo.com.br



## Resumo

Neste trabalho destacamos dois grupos de distribuições importantes que são as com caudas pesadas e as com caudas leves. Essas distribuições são funções convenientes para modelar dados de problemas nas mais diversas áreas, como física, estatística, actuária, etc.

Definimos as principais subclasses de distribuições de cauda pesada que aparecem na literatura (vide por exemplo, Embrechts et al (1997), Asmussen (2001) e Embrechts e Goldie (1980)), além de apresentar exemplos das distribuições mais usadas nas aplicações de problemas teóricos e práticos.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar os resultados que envolvem a distribuição subexponencial, que além de ser uma importante classe de distribuição de cauda pesada se aplica em modelagem de risco.

Por fim estabelecemos a relação

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty,$$

onde $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d. F, representando as respectivas quantias das indenizações pagas em cada um de $n$ períodos de tempos, a soma parcial $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ representa a quantia total das indenizações pagas e $M_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ o maior valor pago nos $n$ períodos considerados. Intuitivamente esta relação sugere a forte influência da maior indenização paga sobre a quantia total de indenizações.



## Palavras-chave

Cauda pesada, subexponencial, propriedades assintóticas.


## Introdução

Variáveis aleatórias de cauda pesada têm um importante papel em vários problemas teóricos e aplicados. No campo da teoria de filas, por exemplo, somas ponderadas de variáveis aleatórias com cauda pesada podem ser usadas para representar a produção total de um usuário servido por um determinado número de máquinas. Em estatística, na análise de séries temporais, os processos lineares, incluindo os processos de média móvel, são somas ponderadas de variáveis aleatórias de cauda pesada. Em atuária, particularmente na teoria de risco, somas de variáveis aleatórias ponderadas de cauda pesada são utilizadas na modelagem do superávit de uma empresa de seguros.

Em trabalhos práticos nas mais diversas áreas, como atuária, finanças, física, entre outras, as distribuições com cauda pesada são as que melhor ajustam os dados observados. Em modelos de risco, por exemplo, na prática, os dados relativos às quantias de indenizações pagas são na sua grande maioria modeladas por distribuições de caudas pesada como Pareto, loggamma, lognormal ou Weibull (de cauda pesada).

Dentre as distribuições de cauda pesada, destaca-se a classe das distribuições subexponenciais, que engloba grande parte das distribuições utilizadas por modelos nas mais diferentes áreas de aplicação, em especial nos modelos de seguros e finanças.

Nosso interesse especial refere-se ao comportamento assintótico da cauda de distribuições subexponenciais.

Neste trabalho caracterizamos formalmente o conceito de distribuição de cauda pesada (à direita) e definimos as principais subclasses de distribuições deste tipo encontradas na literatura (por exemplo, Embrechts et al (1997), Asmussen (2001) e Embrechts e Goldie (1980)).

## Distribuições de Caudas Pesadas

Neste trabalho apresentamos o conceito de distribuição de cauda pesada e definimos as principais subclasses de distribuições deste tipo que aparecem na literatura (vide por exemplo, Embrechts et al (1997), Asmussen (2001) e Embrechts e Goldie (1980)).

Primeiramente, vamos apresentar alguns conceitos e notações que usaremos com freqüência:

**Definição 0.1** *(a) Dadas duas infinitesimais positivas $A(x)$ e $B(x)$ se*

$$\limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{A(x)}{B(x)} \leq 1, \textit{ então escrevemos } A(x) \tilde{<} B(x)$$

*e se*

$$\limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{B(x)}{A(x)} \leq 1, \textit{ então escrevemos } B(x) \tilde{<} A(x).$$

*(b) Dizemos que $A(x)$ e $B(x)$ são assintoticamente iguais se $A(x)\widetilde{<}B(x)$ e $B(x)\widetilde{<}A(x)$, então escrevemos $A(x) \sim B(x)$.*

*(c) $a(x) = O(b(x))$ com $x \to x_0$, quando $\limsup_{x\to x_0} |a(x)/b(x)| < \infty$ e $a(x) = o(b(x))$ com $x \to x_0$, quando $\lim_{x\to x_0} a(x)/b(x) = 0$.*

Podemos classificar a cauda de uma função de distribuição comparando a velocidade do seu decaimento a zero com o da cauda da distribuição exponencial, que tem um decaimento rápido.

**Definição 0.2** *Dizemos que uma função de distribuição (f.d.) $F$ tem cauda leve à direita se para algum $\varepsilon > 0$ temos $\overline{F}(x) = O(e^{-\varepsilon x})$, ou seja,*

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}} < \infty. \tag{1}$$

*Caso contrário, dizemos que $F$ tem cauda pesada à direita.*

Note que uma condição necessária para que $F$ tenha cauda pesada é que $\overline{F}(x) > 0\ \forall x \in R$.

O comportamento da cauda de uma função de distribuição está relacionado com a existência da função geradora de momentos

$$\widehat{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = Ee^{sx}, \tag{2}$$

ou equivalentemente, com a transformada de Laplace $\widehat{F}(-s)$. É o que mostramos na proposição a seguir.

**Proposição 0.1** *Seja $F$ uma função de distribuição com função geradora de momentos associada $\widehat{F}(s)$. Então $\overline{F}(x) = O(e^{-\varepsilon x})$ para algum $\varepsilon > 0$, se e somente se, $\widehat{F}(s)$ é finita para algum $s > 0$.*

***Demonstração:*** Primeiramente suponha que $\overline{F}(x) = O(e^{-\varepsilon x})$ para algum $\varepsilon > 0$, então existe $M > 0$ e $x_0 > 0$ tal que $\forall\ x \geq x_0$, $\left|\overline{F}(x)\right| \leq Me^{-\varepsilon x}$.

Assim, para $0 < s < \varepsilon$ temos

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(s) &= \int_0^{\infty} P(e^{sx} > y)dy \\
&= \int_0^{e^{sx_0}} \overline{F}(\frac{lny}{s})dy + \int_{e^{sx_0}}^{\infty} \overline{F}(\frac{lny}{s})dy \\
&\leq e^{sx_0} + \int_{e^{sx_0}}^{\infty} Me^{-\frac{\varepsilon}{s}lny}dy \\
&\leq e^{\varepsilon x_0} + \int_{e^{sx_0}}^{\infty} My^{\frac{-\varepsilon}{s}}dy \\
&= e^{\varepsilon x_0} + M\frac{s}{\varepsilon - s}e^{-\varepsilon x_0}.
\end{aligned}$$

Logo, $\widehat{F}(s) < +\infty$ para $0 < s < \varepsilon$.

Por outro lado, suponha que $\widehat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{sx}dF(x)$ é finita para algum $s > 0$.

Então da desigualdade de Chebyschev podemos obter

$$\begin{aligned}
\overline{F}(x) &= P(X > x) \\
&= P(e^{sX} > e^{sx}) \\
&\leq \frac{E(e^{sX})}{e^{sx}} \\
&= \frac{\widehat{F}(s)}{e^{sx}}.
\end{aligned}$$

Assim, $\limsup\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\overline{F}(x)}{e^{-sx}} \leq \widehat{F}(s) < \infty$.

Logo $\overline{F}(x) = O(e^{-sx})$.

■

Como conseqüência da proposição anterior, temos a seguinte definição alternativa:

**Definição 0.3** *Uma f.d. $F$ tem cauda leve à direita se $\widehat{F}(s) < +\infty$ para algum $s > 0$. Caso contrário, se $\widehat{F}(s) = +\infty$, $\forall\ s > 0$ dizemos que $F$ tem cauda pesada à direita.*

Exemplos de distribuições de cauda leve são:

*(a)* Distribuição Exponencial cuja densidade é definida por $f(x) = \delta e^{-\delta x}$ para $x > 0$ e $f(x) = 0$, caso contrário.

*(b)* Distribuição Gamma de parâmetros $p$, $\delta > 0$ com densidade $f(x) = \dfrac{\delta^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\delta x}$ e função geradora de momentos $\widehat{B}(\varepsilon) = \left[\dfrac{\delta}{\delta - \varepsilon}\right]^p$, $\varepsilon < \delta$.

*(c)* Distribuição Hyperexponencial definida como composição finita de distribuições exponenciais, isto é, $b(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i\delta_i e^{-\delta_i x}$, onde $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ i = 1, \cdots, p$.

Exemplos de distribuições de cauda pesada:

*(a)* Distribuição Weibull que originou-se na teoria da confiabilidade, onde $\overline{B}(x) = e^{-cx^r}$ e $b(x) = crx^{r-1}e^{-cx^r}$, com $0 < r < 1$ e $c > 0$.

*(b)* Distribuição Lognormal, cuja densidade é $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\delta x}e^{-\dfrac{(lnx-\mu)^2}{2\delta^2}}$, com $\mu \in R,\ \delta > 0$

*(c)* Distribuição Benktander - tipo I, cuja cauda é $\overline{F}(x) = e^{-\beta(\ln x)^2} - (\alpha + 1)\ln x$, onde $\alpha,\ \beta > 0$.

*(d)* Distribuição Benktander - tipo II, cuja cauda é $\overline{F}(x) = e^{\frac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{\frac{-\alpha x^{\beta}}{\beta}}$, onde $\alpha > 0,\ 0 < \beta < 1$.

*(e)* Distribuição Loggamma, cuja densidade é $f(x) = \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)} (lnx)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$, com $\alpha,\ \beta > 0$.

*(f)* Distribuição Burr, cuja cauda é $\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^r}\right)$, onde $\alpha,\ k,\ r > 0$.

*(g)* Distribuição Pareto, cuja cauda é $\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}$, com $\alpha,\ k > 0$.

Podemos encontrar mais exemplos destas classes de distribuições em Asmussen (2001) e Embrechts et al (1997).

Denote por $\mathcal{K}$ o conjunto das distribuições de cauda pesada.

Questões envolvendo o comportamento da cauda de funções de distribuição aparecem, por exemplo, na análise da ocorrência de eventos extremos. É o caso, por exemplo, dos modelos de reserva de capital de risco de uma empresa seguradora.

Neste contexto, podemos interpretar $X_1, X_2, \cdots, X_n$ como variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d. F, representando as respectivas quantias das indenizações pagas em cada um de $n$ períodos de tempos (por exemplo, anos); a soma parcial $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ representa a quantia total das indenizações pagas e $M_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ o maior valor pago nos $n$ períodos considerados.

Assim, procuramos funções de distribuição $F$ para as quais as caudas das distribuições da soma $S_n$ e do máximo $M_n$ sejam assintóticamente da mesma ordem, ou seja,

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty, \tag{3}$$

o que indicaria a forte influência da maior indenização paga sobre a quantia total de indenizações. Agora, observe que

$$\begin{aligned} P(M_n > x) &= 1 - F^n(x) \\ &= [1 - F(x)][F^{n-1}(x) + \cdots + 1] \\ &= \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Então, se $0 < F(x) < 1$ segue, para qualquer $n \geq 2$,

$$P(M_n > x) \sim n\overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{5}$$

Mas, por outro lado, $P(S_n > x) = \overline{F^{*n}}(x)$, onde $F^{*n}$ é a n-ésima convolução de $F$, ou seja, $F^*(x) = F$ e

$$F^{*n}(x) = F^{*(n-1)} * F = \int_{-\infty}^{\infty} F^{*(n-1)}(x-t)dF(t).$$

Logo (**??**) é equivalente a

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{6}$$

A discussão acima motiva a seguinte subclasse de distribuições de cauda pesada.

**Definição 0.4** *Uma função de distribuição $F$ concentrada em $[0, \infty)$ pertence à classe subexponencial, denotada por $\mathcal{S}$, se*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n,\ \forall\ n \geq 2, \tag{7}$$

*onde $F^{*n} = F * \cdots * F$ denota a n-ésima convolução de $F$. Se $F$ estiver concentrada em $(-\infty, \infty)$ diremos que $F$ pertence a $\mathcal{S}$ se sua parte positiva $F^+(x) = F(x)I_{(0 \leq x < \infty)}$ é subexponencial. É possível mostrar que se $F^+$ é subexponencial então temos (7).*

As distribuições subexponenciais são de fato de cauda pesada, ou seja, suas caudas decaem a zero mais lentamente do que qualquer exponencial $e^{-\varepsilon x}$, para $\varepsilon > 0$, o que justifica o nome subexponencial. Além disso, a condição (6) é na verdade equivalente a,

$$\overline{F * F}(x) \sim 2\overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

Exemplos de distribuições subexponenciais são: Pareto, Burr, Loggamma, Weibull, Benktander tipos I e II e Lognormal, entre outros.

Uma subfamília importante de distribuições subexponenciais é a das distribuições cujas caudas são de variação regular, ou seja, assintoticamente comportam-se como funções potências $x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

**Definição 0.5** *Uma função de distribuição $F$ sobre $[0, \infty)$ tem cauda de variação regular, se $\exists\ 0 \leq \alpha < \infty$ tal que*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha} \text{ para todo } y > 0 \tag{9}$$

Denote por $\mathcal{R}$ o conjunto das distribuições com caudas de variação regular.

São exemplos de distribuições deste tipo: lognormal, Benktander - tipo I, Benktander - tipo II, Weibull.

Note que, se $\overline{F}$ satisfaz (9) denotamos $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ e dizemos que $\overline{F}$ é de variação regular com expoente $\alpha$, ou $\alpha$-variante no infinito. Em particular, se $\alpha = 0$ dizemos que $\overline{F}$ é lentamente variante.

O caso especial $\alpha = +\infty$ no limite (9) é tratado em separado e dá origem às distribuições com caudas rapidamente variante, conforme definimos abaixo.

**Definição 0.6** *Uma função de distribuição tem cauda de variação rápida, se*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=0,\ \textit{para todo } y>1.$$

Denote por $\mathcal{R}_{-\infty}$ o conjunto das distribuições com cauda de variação rápida.

Mais detalhes sobre as propriedades e aplicações das funções de variação regular e variação rápida podem ser encontradas em Bingham et al (1987).

Duas outras subfamílias de distribuições de caudas pesadas, relacionadas com as distribuições subexponenciais, merecem destaque e são definidas a seguir.

**Definição 0.7** *Dizemos que uma função de distribuição $F$ concentrada em $[0,\infty)$ é de cauda longa, se*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}=1,\ \textit{para todo } y>0. \tag{10}$$

Denote por $\mathcal{L}$ o conjunto das distribuições com cauda longa.

É possível mostrar que basta verificar a relação (10) para algum $y>0$ (vide Chistyakov (1964)).

**Definição 0.8** *Uma função $F$ é de variação dominada, se*

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty,\ \textit{para todo } 0<y<1,$$

*ou equivalentemente para algum* $0<y<1$.

Denote por $\mathcal{D}$ o conjunto das distribuições de variação dominada.

# Relações entre Distribuições de Cauda Pesada

Nesta seção, apresentamos as relações de inclusão entre as classes de distribuições definidas na seção anterior, que são

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{\text{F: F é f.d. e } \widehat{F}(\varepsilon)=\infty, \text{para algum } \varepsilon>0\}\\ &= \{\text{F: F é f.d. e } \limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}}=\infty\\ &\quad \text{para algum } \varepsilon>0\}\end{aligned}$$

a classe das distribuições de cauda pesada,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{\text{F f.d. sobre } (0,\infty)\text{: } \overline{F^{*n}}(x)\sim\overline{F}(x)\\ &\quad \{\text{quando } x\longrightarrow\infty\}\end{aligned}$$

a classe das distribuições subexponenciais,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{F \text{ f.d. sobre } [0,\infty) \text{ e } \overline{F}\in R_{-\alpha} \text{ para }\}\\ &\quad \text{algum } 0\le\alpha<\infty\ \}\\ &\quad \text{onde } \overline{F}\in R_{-\alpha} \text{ se } \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=y^{-\alpha},\\ &\quad \forall\ y>0\end{aligned}$$

a classe das distribuições com cauda de variação regular,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{F\text{: f.d. sobre } [0,\infty)\text{: } \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1,\\ &\quad \forall\ y>0\}\end{aligned}$$

a classe de distribuições de cauda longa e

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{F\text{: f.d. sobre } [0,+\infty)\text{: } \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty,\\ &\quad \forall\ 0<y<1\}\end{aligned}$$

a classe de distribuições de variação dominada.

Para mais detalhes sobre as classes de distribuições de cauda pesada e como elas se relacionam, o leitor poderá consultar Embrechts et al (1997) que foi nossa principal fonte de pesquisa para esta seção. Apresentamos a seguir as relações estabelecidas entre as classe listadas acima.

**Teorema 0.1** *As seguintes relações são válidas:*
*(a)* $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{L}\subset\mathcal{K}$ *e* $\mathcal{R}\subset\mathcal{D}$
*(b)* $\mathcal{L}\cap\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$
*(c)* $\mathcal{D}\not\subset\mathcal{S}$ *e* $\mathcal{S}\not\subset\mathcal{D}$
*(d)* $\mathcal{S}\neq\mathcal{L}$.

# Relações Assintóticas com Distribuições Subexponenciais

Nesta seção, estabelecemos algumas propriedades assintóticas envolvendo caudas de distribuições subexponenciais. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, vide Embrechts e Goldie (1980).

Por toda esta seção vamos considerar funções de distribuição sobre $[0,+\infty)$.

Usando o resultado anterior, podemos mostrar que basta verificar a relação (7) da definição de subexponencialidade para $n=2$, ou seja, temos a seguinte caracterização de distribuições subexponenciais.

**Proposição 0.2** $F\in\mathcal{S}$ *se, e somente se*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F*F}(x)}{\overline{F}(x)}=2. \tag{11}$$

***Demonstração:*** Se $F \in \mathcal{S}$ temos a relação de definição (7) , em particular, para $n = 2$.

Por outro lado, se $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$, mostraremos por indução que $F$ satisfaz (11) para todo $n > 2$.

Suponha $\frac{\overline{F^{*m}}(x)}{\overline{F}(x)} \to m$ com $x \to \infty$, para algum inteiro $m \geq 2$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $y$ de tal forma que $\left| \frac{\overline{F^{*m}(x)}}{\overline{F}(x)} - m \right| \leq \varepsilon$, para $x \geq y$.

De

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}(x)}}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F^{*n}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z),$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{*(m+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= 1 + \int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) + \\
&+ \int_{x-y}^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&\int_{x-y}^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \leq \\
&= \int_{x-y}^x \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \frac{1}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \int_{(x-y)}^x \frac{dF(z)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \frac{F(x) - F(x-y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \left[ -1 + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right] \to 0
\end{aligned}$$

quando $x \longrightarrow \infty$.

Também, pela hipótese de indução e

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}(x)}}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F^{*n}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z),$$

temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= (m + o(\varepsilon)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= (m + o(\varepsilon)) \left[ \frac{\overline{F^{*2}}(x) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \right] \\
&- (m + o(\varepsilon)) \left[ \int_{x-y}^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \right] \\
&= (m + o(\varepsilon)) \left[ \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 \right] \\
&- (m + o(\varepsilon)) \left[ \int_{x-y}^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \right] \\
&\geq (m + o(\varepsilon)) \left[ \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \int_{x-y}^x \frac{dF(z)}{\overline{F}(x)} \right].
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&\to (m + o(\varepsilon))[2 - 1 - 0] = (m + o(\varepsilon)),
\end{aligned}$$

quando $x \longrightarrow \infty$.

Substituindo os resultados acima em (12), imediatamente obtemos

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*(m+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + m + o(\varepsilon).$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon$ a demonstração está concluída .

■

Primeiramente, da Definição 1.4 e Proposição 1.3 temos que uma f.d. é subexponencial, se e só se,

$$\overline{F} * \overline{F}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \quad (12)$$

Isto equivale a dizer que se $X_1$ e $X_2$ são variáveis aleatórias i.i.d. com f.d. $F$ então

$$\begin{aligned}
&P(X_1 + X_2 > x) \sim P(max\{X_1, X_2\} > x) \\
&\text{quando } x \longrightarrow \infty. \quad (13)
\end{aligned}$$

No caso mais geral, quando $X_1$ e $X_2$ são independentes com f.d. $F_1$ e $F_2$ respectivamente, então, usando um raciocínio análogo ao utilizado para obter (3) e (5), podemos mostrar que, quando $x \longrightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
&\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) - \overline{F_1}(x)\overline{F_2}(x) \\
&= P(max\{X_1, X_2\} > x).
\end{aligned}$$

Assim, a relação (13) é equivalente a

$$\overline{F_1} * \overline{F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \quad (14)$$

Funções de distribuição $F_1$ e $F_2$ que satisfazem a relação (14) também são chamadas distribuições

*max-soma-equivalentes* e denota-se $F_1 \sim_M F_2$. Em particular, vemos que $F \in \mathcal{S}$ se, e só se, $F \sim_M F$.

Uma questão importante sobre o espaço $\mathcal{S}$ das funções de distribuição subexponenciais é se ele é fechado sob convoluções, ou seja, se $F_1$, $F_2 \in \mathcal{S}$ temos $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$. Mais ainda, sob quais condições sobre as f.d.'s $F_1$ e $F_2$ temos a relação (14).

Questões envolvendo o comportamento da cauda de funções de distribuição aparecem, por exemplo, na análise da ocorrência de eventos extremos. Para entender eventos desta natureza, surge a necessidade de se construir modelos matemáticos apropriados para explicar eventos que, embora tenham uma probabilidade de ocorrência relativamente pequena influenciam significativamente o comportamento do modelo todo. Uma discussão mais detalhada sobre o assunto pode ser encontrada em Embrechts et al (1997).

É o caso, por exemplo, dos modelos de reserva de capital de risco de uma empresa seguradora. Uma questão relevante é estabelecer a inter-relação entre os valores individuais das indenizações pagas e a quantia total paga ao final do período de tempo considerado. Em particular, surge o interesse em estabelecer hipóteses sob as quais o valor da maior indenização determina o valor total das indenizações pagas.

Neste contexto, podemos interpretar $X_1, X_2, \cdots, X_n$ como variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d. F, representando as respectivas quantias das indenizações pagas em cada um de $n$ períodos de tempos (por exemplo, anos); a soma parcial $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ representa a quantia total das indenizações pagas e $M_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ o maior valor pago nos $n$ períodos considerados.

Assim, procuramos funções de distribuição $F$ para as quais as caudas das distribuições da soma $S_n$ e do máximo $M_n$ sejam assintóticamente da mesma ordem, ou seja,

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty,$$

o que indicaria a forte influência da maior indenização paga sobre a quantia total de indenizações.

# Referências


[1] Asmussen, S.Ruin Prbabilities, World Sicientific, Singapura, 2000.

[2] Cline, D. B. H., Convolution tails, product tails and domains of attraction, Probab, Theory Relat Fields 72(4), 529-557, (1986).

[3] Cline, D.B.H., Convolutions of Distributions With Exponential and Subexponential Tails, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 43 (1987), 347-365.

[4] Cline, D.B.H. and Samorodnitsky, G., Subexponentiality of the product of independent random variables, Stochastic Process. Appl.49(1), 75-98,(1994).

[5] Campus, M. A., Loureiro, J. A. e Pedrosa, D. C., Distribuições de Caudas Pesadas e Aplicação em Redes de Computadores, Centro de informática - UFPE (2001).

[6] Embrechts, P. and Goldie, C. M., On closure and factorization properties of subexponential and related distributions, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 2d9(2), 243-256, (1980).

[7] Embrechts, P., Kliippelberg C., Mikosch T., Modeling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlang, Berlim, 1997.

[8] Goldie, C. M., Subexponential distributions and dominated-variation tails, J. Appl. Probability 15(2), 440-442, (1978).

[9] Hu, T., Ordóñez Cabrera, M., and Volodin, A. I., Convergence of randomly Weighted sums of Banach space valued random elements and uniform integrability concerning the random weights, Statist. Probab. Lett. 51(2), 155-167]4, (2001).

[10] Ng, K. W., Tang, Q., and Yang, H., Maxima of sums of heavy-tailed random variables, Astin Bull. 32(1), 43-55; (2002).

[11] Rosalsky, A. and Sreehari, M., On the limiting behavior of randomly weighted partial sums, Statist. Probab. Lett. 40(4), 403-410, (1998).

[12] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks, Stochastic Process. Appl. 108(2), 299-325, (2003).

[13] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Randomly weighted Sums of Subexponential Random Variables With Application to Ruin Theory, Extremes 6, 171-188, 2003.

[14] Teugels, J. L., The class of subexponential distributions, Ann. Prob. 3, 1000-1011, (1975).