VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional
20 a 22-Novembro-2008
Universidade federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

O Corpo Local dos Números Fuzzy com Operações Baseadas em α-Cortes

Claudilene Gomes da Costa,
Depto. de Ciências Exatas, CCAE, UFPB,
58.297-000, Rio Tinto, PB
E-mail: claudilene@ccae.ufpb.br,

Benjamín Callejas Bedregal
Depto. de Informática e Matemática Aplicada, CCET, UFRN,
59.072-970, Natal, RN
E-mail: bedregal@dimap.ufrn.br.

Roberto Callejas-Bedregal
Depto. de Matemática, CCEN, UFPB,
58.051-900, João Pessoa, PB
E-mail: roberto@mat.ufpb.br.

Resumo

Neste trabalho analisamos as propriedade algébricas nos números fuzzy munidos das operações aritméticas. Verificamos que que os números fuzzy com a adição, assim como com a multiplicação, são um monoide comutativo. O problema que se verifica que essas operações não têm inversos o que acaba com qualquer possibilidade de constituir estruturas algébricas mais ricas. No intuito de superar (parcialmente) este problema, usamos a teoria da igualdade local de Santiago, e mostramos que os números fuzzy, munidos das operações aritméticas na abordagem de α-cortes, constituem um corpo local, ou seja uma estrutura algébrica onde os axiomas de um corpo são relaxados por considerar essa igualdade local ao invés da igualdade usual.

Palavras-chave

Números fuzzy, α-cortes, igualdade local, estruturas algébricas.

Introdução

A teoria dos conjuntos fuzzy foi introduzida por Lotfi Zadeh em 1965 [20] com a intenção de lidar com conjunto envolvendo conceitos vagos, tais como o conjunto das pessoas altas. Desde então esta teoria tem sido alvo de intensa pesquisa e novos subdomínios foram acrescentados tais como lógica difusa, reconhecimento de padrões fuzzy, topologia fuzzy, linguagens formais e computabilidade fuzzy, sistemas especialistas e de controle fuzzy, números e aritmética fuzzy, etc. Em particular, o conceito de números fuzzy surgiu em 1978 com os trabalhos de Nahmias [14] e Dubois e Prade [7], porém o primeiro texto que aborda de forma profunda e rigorosa a aritmética fuzzy foi o livro de Kaufmann e Gupta [10] e desde então tem sido alvo de intensas pesquisas e de aplicações. Por exemplo, encontramos aplicações de números fuzzy em Geologia [5], em eletricidade [19], em engenharia [8], administração financeira [16], etc.

Existem diversas noções sutilmente diferentes para o conceito de números fuzzy (veja por exemplo [4, 8, 11, 12, 15]). Nos adotaremos neste artigo a definição dada em [4].

Existem basicamente duas definições equivalentes, para as operações aritméticas entre números fuzzy: uma baseada nos α-cortes e a outra baseada no princípio da extensão de Zadeh [4]. Aqui adotaremos a primeira abordagem.

Neste trabalho analisamos as propriedade algébricas nos números fuzzy munidos das operações aritméticas. Verificamos que que os números fuzzy com a adição, assim como com a multiplicação, são um monoide comutativo. O problema que se verifica que essas operações não têm inversos o que acaba com qualquer possibilidade de constituir estruturas algébricas mais ricas. Um problema similar ocorre com a aritmética interval, uma generalização dos números reais proposta por Moore para se fundamentar computações intervalares onde há um controle rigoroso dos erros produzidos por arredondamentos e truncamentos [13]. Em [6], Callejas-Bedregal et al. mostraram que ao se relaxar a noção de igualdade para a igualdade local proposta por [17], as propriedades algébricas dos números reais são preservadas na aritmética intervalar.

Neste trabalho, mostramos que os números fuzzy, munidos das operações aritméticas na abordagem de

α-cortes, constituem um corpo local, ou seja uma estrutura algébrica onde os axiomas de um corpo são relaxados por considerar essa igualdade local ao invés da igualdade usual.

1 Números Fuzzy

Um **subconjunto fuzzy** $\mathcal{A}$ de um universo U (conjunto clássico) é uma função $U \to [0,1]$. Como usual na literatura, usaremos $\mathcal{A}$ como um rótulo lingüístico e $\mu_{\mathcal{A}}$ para a função, também chamada de função de pertinência por indicar quanto um elemento pertence ao conjunto fuzzy. Quando o universo estiver implícito o for irrelevante, simplesmente chamaremos $\mathcal{A}$ de conjunto fuzzy. Um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ é **normal**, se existe ao menos um elemento $x \in U$ tal que $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$. Dado qualquer $\alpha \in (0,1]$, o **α-corte** de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$, é o conjunto clássico

$$\mathcal{A}_\alpha = \{x \in U / \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}. \tag{1}$$

Observe que qualquer conjunto fuzzy é completamente determinado pelos seus α-cortes. O **suporte** de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ é o conjunto

$$S(\mathcal{A}) = \{x \in U / \mu_{\mathcal{A}}(x) \neq 0\}. \tag{2}$$

O **núcleo** de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ é o conjunto

$$N(\mathcal{A}) = \{x \in U / \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}. \tag{3}$$

Um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ é **convexo** se todos seus α-cortes são conjuntos convexos (clássicos). Um número fuzzy [4] é um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ tal que

1. $\mathcal{A}$ é normal;
2. $\mathcal{A}$ é convexo;
3. $\mu_{\mathcal{A}}$ é semi-contínua superior[1]
4. $S(\mathcal{A})$ é limitado.

Observe que para qualquer conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$, $\mu_{\mathcal{A}}$ é semi-contínua superior se e somente se $\mathcal{A}_\alpha$ é fechado para todo $\alpha \in (0,1]$. Assim, para cada α-corte de um número fuzzy $\mathcal{A}$ temos que

$$\mathcal{A}_\alpha = [\mathcal{A}^L_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha] \tag{4}$$

para algum valor $\mathcal{A}^L_\alpha \in [0,1]$ e $\mathcal{A}^R_\alpha \in [0,1]$. Analogamente como todo conjunto clássico é um conjunto fuzzy, chamado de "crisp", temos que cada número real, pode ser visto como um número "crisp". Seja $r \in \mathbb{R}$, então o conjunto fuzzy (crisp) r tem a seguinte função de pertinência:

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}$$

[1] Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é semi-contínua superior, se para todo $\alpha \in (0,1]$, o conjunto $\{x / f(x) \geq \alpha\}$ é fechado [15].

2 Igualdade Local

Seja A um conjunto e $\{0,1\}$ o conjunto Booleano. A relação de igualdade "=" sobre A satisfaz os seguintes axiomas:

1. $x = x$ (reflexividade);
2. $x = y \Rightarrow y = x$ (simetria);
3. $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (transitividade).

Em [18], Dana Scott propus uma axiomatização alternativa para igualdade, que hoje em dia é conhecida como **igualdade simples de Scott**, que lide com objeto parcialmente definidos. Para tal, substituiu o axioma da reflexividade por

$$\textbf{(refl)}\ x = x \Leftrightarrow def(x) \tag{5}$$

onde $def(x)$ significa que x está definido.

Este axioma se baseia no fato que quando lidamos com objetos que estão parcialmente definidos, a lei da reflexividade pode não fazer sentido numa teoria formalizada. Por exemplo, $\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ não faz sentido em todos os anéis. O axioma **refl** pode ser lido como: "*Se podemos disser que x é igual si mesmo, então podemos afirmar que x existe e se x existe, então é igual a si mesmo*". Regivan Santiago em [17], estendeu a igualdade simples de Scott por considerar uma noção de consistência tornando essa igualdade uma relação de equivalência enfraquecida. Seja $\mathbf{D} = \langle D, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que dois elementos a e b de D são **consistentes**, denotado por $a \frown b$, se existe um elemento $c \in D$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$. Consistência satisfaz os axiomas da *reflexividade* e *refl*, uma vez que $x \frown x$, assim como também satisfaz o axioma da simetria uma vez que $x \frown y \Rightarrow y \frown x$. Porém, consistência não satisfaz o axioma da transitividade. Para superar este problema, Santiago incluiu uma precondição para este axioma dando assim origem à teoria da igualdade local de Santiago. Os axiomas para a **igualdade local** sobre um conjunto A relativo a uma operação parcial binária $\vee$ sobre A, a qual é comutativa e associativa, são:

1. $x \overset{Loc}{=} x \Leftrightarrow def(x)$ (refl);
2. $x \overset{Loc}{=} y \Rightarrow y \overset{Loc}{=} x$ (simetria);
3. $def(x \vee z) \Rightarrow (x \overset{Loc}{=} y \wedge y \overset{Loc}{=} z \to x \overset{Loc}{=} z)$ (transitividade local).

Assim, esta igualdade enfraquece a transitividade da igualdade simples de Scott, de uma forma análoga ao enfraquecimento feito por Scott da reflexividade na igualdade usual. Observe que se $\overset{Loc}{=}$ é uma igualdade local sobre um conjunto A e $x = y$ para algum $x, y \in A$, então, pela propriedade $(refl)$ (x e y são os mesmos elementos!!), $x \overset{Loc}{=} y$.

3 Álgebras Locais

É possible generalizar a noção clássica de estruturas algébricas, tais como grupo, anel e corpo considerando a igualdade local no lugar da igualdade usual [6]. Seja $\overset{Loc}{=}$ uma igualdade local sobre um conjunto D relativo a uma operação binária parcial $\vee$ e duas operações binárias, $+$ e $*$ sobre D. Considere as seguinte propriedades:

1. $a+(b+c) \overset{Loc}{=} (a+b)+c$ para cada $a,b,c \in D$;
2. Existe um único elemento $0 \in D$ tal que para cada $a \in D$, $a+0 \overset{Loc}{=} a \overset{Loc}{=} 0+a$;
3. Para cada $a \in D$, existe um elemento $(-a) \in D$ tal que $a+(-a) \overset{Loc}{=} 0 \overset{Loc}{=} (-a)+a$ e para qualquer $b \in D$ satisfazendo $a+b \overset{Loc}{=} 0 \overset{Loc}{=} b+a$, temos que $b \overset{Loc}{=} -a$;
4. $a+b \overset{Loc}{=} b+a$ para cada $a,b \in D$;
5. $a*(b+c) \overset{Loc}{=} (a*b)+(a*c)$ para cada $a,b,c \in D$;
6. $a*(b*c) \overset{Loc}{=} (a*b)*c$ para cada $a,b,c \in D$;
7. Existe um único elemento $1 \in D$ tal que para cada $a \in D$, $a*1 \overset{Loc}{=} a \overset{Loc}{=} 1*a$;
8. $a*b \overset{Loc}{=} b*a$ para cada $a,b \in D$;
9. Para cada $a \in D$, se $a \overset{Loc}{\neq} 0$, então existe um elemento $a^{-1} \in D$ tal que $a*a^{-1} \overset{Loc}{=} 1 \overset{Loc}{=} a^{-1}*a$ e para qualquer $b \in D$ satisfazendo $a*b \overset{Loc}{=} 1 \overset{Loc}{=} b*a$, temos que $b \overset{Loc}{=} a^{-1}$.

A estrutura $\mathcal{D} = \langle D, \overset{Loc}{=}, + \rangle$ é um **grupo local** se satisfaz as propriedades 1,2 e 3. $\mathcal{D}$ é um **grupo local abeliano** se é um grupo local e satisfaz a propriedade 4. A estrutura $\mathcal{D} = \langle D, \overset{Loc}{=}, +, * \rangle$ é um **anel local** se $\langle D, \overset{Loc}{=}, + \rangle$ é um grupo abeliano local e satisfaz as propriedades 5 e 6. $\mathcal{D}$ é um **anel local comutativo** se $\mathcal{D}$ é um anel local e satisfaz a propriedade 8. $\mathcal{D}$ é um **anel local comutativo com unidade** se $\mathcal{D}$ é um anel local comutativo e satisfaz a propriedade 7. $\mathcal{D}$ é um **corpo local** se satisfaz todas as propriedades. Observe que nesta definição a condição de unicidade é relativa à igualdade local.

4 O Corpo Local dos Números Fuzzy

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois números fuzzy. Para cada $\alpha \in (0,1]$ defina

$$\mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha = [\mathcal{A}^L_\alpha + \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha + \mathcal{B}^R_\alpha] \tag{6}$$

$$\mathcal{A}_\alpha \cdot \mathcal{B}_\alpha = [\min A, \max A] \tag{7}$$

onde $A = \{\mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^R_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha \cdot \mathcal{B}^R_\alpha\}$. Definimos a **soma** e a **multiplicação** entre números fuzzy como sendo os conjuntos fuzzy tais que seus α-cortes são determinados por

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha \text{ and } (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \cdot \mathcal{B}_\alpha \tag{8}$$

Assim, $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^L_\alpha = \mathcal{A}^L_\alpha + \mathcal{B}^L_\alpha$, $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^R_\alpha = \mathcal{A}^R_\alpha + \mathcal{B}^R_\alpha$, $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^L_\alpha = \min\{\mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^R_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha \cdot \mathcal{B}^R_\alpha\}$ e $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^R_\alpha = \max\{\mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^R_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha, \mathcal{A}^R_\alpha \cdot \mathcal{B}^R_\alpha\}$.

Proposição 4.1 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois números fuzzy e $\alpha \in (0,1]$. Então*

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})_\alpha = \{x+y \in U / x \in \mathcal{A}_\alpha \text{ e } y \in \mathcal{B}_\alpha\} \text{ e}$$

$$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})_\alpha = \{xy \in U / x \in \mathcal{A}_\alpha \text{ e } y \in \mathcal{B}_\alpha\}.$$

Demonstração: Trivialmente $(\mathcal{A}+\mathcal{B})_\alpha \subseteq \{x+y \in U / x \in \mathcal{A}_\alpha \text{ e } y \in \mathcal{B}_\alpha\}$ e $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})_\alpha \subseteq \{xy \in U / x \in \mathcal{A}_\alpha \text{ e } y \in \mathcal{B}_\alpha\}$. O outro lado, sai direto da continuidade (teorema do valor médio) das operações soma e multiplicação em $\mathbb{R}$. ■

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os números fuzzy. A seguir mostraremos as propriedades algébricas deste conjunto munido das operações de soma e multiplicação definidas nesta seção.

Proposição 4.2 *$\langle \mathcal{F}, + \rangle$ e $\langle \mathcal{F}, \cdot \rangle$ são monóides comutativos.*

Demonstração: A associatividade e comutatividade de ambos sai direto da comutatividade e associatividade da soma e multiplicação em $\mathbb{R}$ junto com a proposição 4.1. Por outro lado, sejam os números crisp $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$. Claramente, $(\mathcal{A}+\mathbf{0})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha + \mathbf{0}_\alpha = [\mathcal{A}^L_\alpha + 0, \mathcal{A}^R_\alpha + 0] = \mathcal{A}_\alpha$. Analogamente, é possível provar que $(\mathcal{A}\cdot\mathbf{1})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha$. Logo, os números crisp $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ são elementos neutros da soma e multiplicação em $\mathcal{F}$. ■

Observe que as operações são fortemente determinadas pelas operações entre os α-cortes, que no caso de números fuzzy são intervalos fechados. Portanto, a aritmética fuzzy herda, de alguma forma, as mesmas propriedades algébricas da aritmética intervalar [13, 9]. Isto faz com que números fuzzy não possuam inverso aditivo nem multiplicativo, assim como, também não satisfazem a propriedade de distributividade. Portanto não constituem nem sequer um grupo. Porém, como visto na seção 3, é possível estender a noção de estruturas algébricas usuais, tais

como grupos, anéis e corpos, relaxando a noção de igualdade, para a noção de igualdade local introduzida em [17]. Defina a operação parcial binária sobre conjuntos fuzzy por

$$\mu_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)) \tag{9}$$

Observe que esta operação é comutativa e associativa, mas não é fechada em $\mathcal{F}$. De fato, se $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) = \emptyset$ então $N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \emptyset$ e portanto $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ não seria normal o que implica que não seria um número fuzzy.

Proposição 4.3 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois números fuzzy. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ é um número fuzzy se, e somente se, $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ é um número fuzzy então $N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \neq \emptyset$. Se $x \in N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ então $\mu_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)) = 1$ e portanto, $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$ e $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 1$ o que implica que $x \in N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B})$. Portanto, $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Se $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, então $N(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ e $N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ o que implica que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$ e $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 1$ e portanto, pela equação (9), $\mu_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}(x) = 1$. Logo, $N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \neq \emptyset$ que implica que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ é normal.

Por outro lado, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{B}_\alpha$. Como $1 \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B}_\alpha$ então

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})_\alpha = [\max\{\mathcal{A}^L_\alpha, \mathcal{B}^L_\alpha\}, \max\{\mathcal{A}^R_\alpha, \mathcal{B}^R_\alpha\}]. \tag{10}$$

A equação (10), fornece uma caracterização dos α-cortes de $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Por tanto, temos que os α-cortes de $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ são intervalos fechados, e portanto convexos.

Direto da definição de semi-continuidade e da equação (10), temos que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ é semi-contínua.

Finalmente,

$$\begin{aligned} x \in S(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}(x) \neq 0 \text{ Eq. (2)} \\ &\Leftrightarrow \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)) \neq 0 \text{ Eq. (9)} \\ &\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(x) \neq 0 \wedge \mu_{\mathcal{B}}(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in S(\mathcal{A}) \wedge x \in S(\mathcal{B}) \text{ Eq. (2)} \\ &\Leftrightarrow x \in S(\mathcal{A}) \cup S(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Portanto, como $S(\mathcal{A})$ e $S(\mathcal{B})$ são limitados, então $S(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ também é limitado. ■

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois números fuzzy. Dizemos que $\mathcal{A}$ é localmente igual a $\mathcal{B}$ relativo a $\vee$, denotado por $\mathcal{A} \overset{Loc}{=} \mathcal{B}$, se para todo α-corte temos que $\mathcal{A}^L_\alpha \leq \mathcal{B}^L_\alpha \leq \mathcal{A}^R_\alpha$ ou $\mathcal{B}^L_\alpha \leq \mathcal{A}^L_\alpha \leq \mathcal{B}^R_\alpha$.

Teorema 4.1 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois números fuzzy. $\mathcal{A} \overset{Loc}{=} \mathcal{B}$ se, e somente se, $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{A} \overset{Loc}{=} \mathcal{B}$, então por definição $\mathcal{A}^L_1 \leq \mathcal{B}^L_1 \leq \mathcal{A}^R_1$ ou $\mathcal{B}^L_1 \leq \mathcal{A}^L_1 \leq \mathcal{B}^R_1$, e portanto $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. ($\Leftarrow$) Se $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ então como todo α-corte contém o núcleo, ou seja $N(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ e $N(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, temos que $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B}_\alpha \neq \emptyset$. Assim, uma vez que α-cortes de números fuzzy são intervalos fechados, $\mathcal{A}^L_\alpha \leq \mathcal{B}^L_\alpha \leq \mathcal{A}^R_\alpha$ ou $\mathcal{B}^L_\alpha \leq \mathcal{A}^L_\alpha \leq \mathcal{B}^R_\alpha$. ■

Corollary 4.1 $\overset{Loc}{=}$ *é uma igualdade local sobre $\mathcal{F}$ relativa a $\vee$.*

Demonstração: Direto do teorema 4.1, $\overset{Loc}{=}$ satisfaz as propriedades de reflexividade e simetria local. Já a transitividade local, sai direta também desse teorema junto com o fato que $def(A \vee B)$ é o mesmo que dizer $A \vee B \in \mathcal{F}$, o qual, pela proposição 4.3, so vai ocorrer, se $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. ■

Teorema 4.2 $\langle \mathcal{F}, \overset{Loc}{=}, +, \cdot \rangle$ *é um corpo local.*

Demonstração: A comutatividade local, associatividade local e elementos neutros locais da soma e multiplicação saem de forma análoga à proposição 4.2. Portanto so faltaria provar que a soma e produto têm inversos locais e que são distributivas.

1. Inverso Local da Soma: Seja $\mathcal{A}$ um número fuzzy. Defina $-\mathcal{A}$ como sendo o número fuzzy tal que $\mu_{-\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(-x)$. Note que para todo α-corte temos que $(-\mathcal{A})_\alpha = [-(\mathcal{A}^R_\alpha), -(\mathcal{A}^L_\alpha)]$. Portanto,
$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + (-\mathcal{A}))_\alpha &= \mathcal{A}_\alpha + (-\mathcal{A})_\alpha \\ &= [\mathcal{A}^L_\alpha - (\mathcal{A}^R_\alpha), \mathcal{A}^R_\alpha - (\mathcal{A}^L_\alpha)] \end{aligned}$$
Como $\mathcal{A}^L_\alpha \leq \mathcal{A}^R_\alpha$ então $\mathcal{A}^L_\alpha - (\mathcal{A}^R_\alpha) \leq 0 \leq \mathcal{A}^R_\alpha - (\mathcal{A}^L_\alpha)$ e portanto, $N(\mathcal{A}) \cap N(\mathbf{0}) = N(\mathcal{A}) \cap [0, 0] \neq \emptyset$. Logo, $\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) \overset{Loc}{=} \mathbf{0}$.

2. Inverso Local da Multiplicação: Análogo ao anterior.

3. Distributividade Local da Multiplicação sobre a Soma:
$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}))_\alpha &= \mathcal{A}_\alpha \cdot (\mathcal{B}_\alpha + \mathcal{C}_\alpha) \\ &= \mathcal{A}_\alpha \cdot [\mathcal{B}^L_\alpha + \mathcal{C}^L_\alpha, \mathcal{B}^R_\alpha + \mathcal{C}^R_\alpha] \\ &= [\min A, \max A] \end{aligned}$$
onde
$A = \{\mathcal{A}^L_\alpha \cdot (\mathcal{B}^L_\alpha + \mathcal{C}^L_\alpha), \mathcal{A}^L_\alpha \cdot (\mathcal{B}^R_\alpha + \mathcal{C}^R_\alpha), \mathcal{A}^R_\alpha \cdot (\mathcal{B}^L_\alpha + \mathcal{C}^L_\alpha), \mathcal{A}^R_\alpha \cdot (\mathcal{B}^R_\alpha + \mathcal{C}^R_\alpha)\}$.
Como $\mathcal{A}^L_\alpha \cdot (\mathcal{B}^L_\alpha + \mathcal{C}^L_\alpha) = \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha + \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{C}^L_\alpha)$ então $\min A \leq \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{B}^L_\alpha + \mathcal{A}^L_\alpha \cdot \mathcal{C}^L_\alpha) \leq \max A$ e portanto, $(\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}))^L_\alpha \leq (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C})^L_\alpha \leq (\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}))^R_\alpha$.
Logo, $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \overset{Loc}{=} \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$.

4. Distributividade Local da Soma sobre a Multiplicação: Análogo ao anterior. ■

5 Conclusões

Neste trabalho mostramos que números fuzzy munidos das operações de adição e multiplicação, na abordagem de α-cortes, constituem apenas um

monóide comutativo e portanto são algebricamente pobres. De fato, como foi observado, por α-cortes serem intervalos fechados, números fuzzy herdam as propriedades algébricas da matemática intervalar.

Por outro lado, uma vez que números fuzzy são números reais que incorporam incertezas, então um mesmo número pode ter mais de um número fuzzy associado. Assim, resulta razoável que dois números fuzzy sejam "iguais" se ambos representam o mesmo número. Este tipo de igualdade é capturada com a teoria da igualdade local introduzida por Santiago em [17]. Em [6] as noções usuais de estruturas algébricas foram enfraquecidas substituindo a igualdade usual pela local nos axiomas da estrutura. Neste trabalho, mostramos que os números fuzzy constituem de fato um corpo local com o qual recuperamos, de forma enfraquecida, a estrutura algébrica dos números reais.

Referências

[1] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943) 1-23.

[2] W. Gautschi, A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae, em "E.B. Christoffel - The influence of his work in mathematics and physical sciences" (P.L. Butzer e F. Fehér, eds.) pp. 72-147, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981.

[3] N.J. Higham, "Handbook of Writing for the Mathematical Sciences", SIAM, Philadelphia, 1993.

[4] C.R. Bector and Suresh Chandra, "Fuzzy Mathematical programming and Fuzzy Matrix Games", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 2005.

[5] Barnabás Bede and János Fodor, Product Type Operations between Fuzzy Numbers and their Applications in Geology, *Acta Polytechnica Hungarica* 3 (2006) 123–139.

[6] Roberto Callejas-Bedregal, Benjamín C. Bedregal and Regivan H.N. Santiago, Generalizing the Real Interval Arithmetic, *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3 (2002) 61–70.

[7] Didier Dubois and Henri Prade. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Sciences*, 9 (1978) 613–626.

[8] Michael Hanss, "Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 2005.

[9] Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit and Éric Walter, "Applied Interval Analysis: With examples in parameter and state estimation, robust control and robotic". Springer-Verlag, London, 2001.

[10] Arnold Kaufmann and Madan M. Gupta, "Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications", Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

[11] George J. Klir and Bo Yuan, "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic", Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[12] Kwang H. Lee, "First Course on Fuzzy Theory and Applications", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 2005.

[13] Ramon E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM, Philadelphia, 1979.

[14] Steven Nahmias. Fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 1 (1978) 97–110.

[15] Hung T. Nguyen and Elbert A. Walker, "A first Course in Fuzzy Logic", 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[16] Alexandre F. de Pinho, José A. B. Montevechi e Edson de O. Pamplona. Aplicação de números fuzzy triangulares em análise de investimentos em situações de incerteza: Método baseado na teoria dos jogos. *Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico*, 21 (1997) 102–107.

[17] Regivan H.N. Santiago. A Teoria das Equações Intervalares Locais. Tese de Doutorado,CIN-UFPE, Recife, 1999.

[18] Dana S. Scott. Identity and existency in intuitionistic logic. In Fourman, M. et al., editors, *Lecture Notes in Mathematics* 753, pages 660–696. Springer-Verlag, Durham, 1977.

[19] Rogério R. de Vargas, "Técnicas Matemático-Computacionais para o Tratamento de Incertezas Aplicadas ao Problema do Fluxo de Potência em Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica". Dissertação de Mestrado, PPgInf-UCPel, DM-2008-1-002, Pelotas-RS, 2008.

[20] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8 (1965) 338–353.