

Um Modelo Estocástico baseado em Redes Neurais

Luciana C. Dias Campos¹, Marley Maria B. R. Velasco², Juan G. Lazo Lazo²

¹Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)
Rua José Kelmer - Campus Universitário, Bairro São Pedro, 36036-330
Juiz de Fora - MG – Brazil

²Departamento de Engenharia Elétrica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Caixa Postal 38097 – 22451-900 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

luciana.campos@ufjf.edu.br, {marley,juan}@ele.puc-rio.br

Abstract. *This paper presents the proposal of a generic model of stochastic process based on neural networks, called Neural Stochastic Process (NSP). The proposal model can be applied to problems involving phenomena of stochastic behavior and / or periodic features. The NSP's neural networks capture the behavior of the time series of these phenomena without requiring a priori information about the series, and generates synthetic time series with the same probabilities as the historical series. The NSP model was applied to the treatment of monthly inflows series and the results indicated that the synthetic series generated exhibit statistical characteristics similar to historical series.*

Resumo. *Esse artigo apresenta a proposta de um modelo genérico de processo estocástico baseado em redes neurais, denominado Processo Estocástico Neural (PEN). O modelo proposto pode ser aplicado em problemas envolvendo fenômenos de comportamento estocástico e/ou com características periódicas. Através das redes neurais do PEN captura-se o comportamento da série histórica desses fenômenos, sem necessitar de informações a priori sobre a série, e gera-se séries temporais sintéticas igualmente prováveis à série histórica. O modelo PEN foi aplicado no tratamento de séries de afluições mensais e os resultados indicaram que as séries sintéticas geradas apresentam características estatísticas similares às séries históricas.*

1. Introdução

Muitos problemas reais apresentam características complexas, tais como não-linearidade e comportamento caótico, que necessitam de modelos capazes de capturar as suas reais características para obter um tratamento apropriado [Müller 2007]. Porém, os modelos existentes apresentam limitação de aplicação a certos problemas ou por serem modelos lineares (cuja aplicação obtém resultados inconsistentes ou inadequados) ou porque necessitam de uma formulação complexa ou dependem de suposições a priori, exigindo um conhecimento do problema em um nível de detalhamento muitas vezes não disponível [Sanders 1995, Luna et al. 2006].

Isso motivou a elaboração de um modelo genérico de processo estocástico baseado em redes neurais para ser aplicado em problemas envolvendo fenômenos de comportamento estocástico e/ou que apresentam características periódicas das suas propriedades

probabilísticas, como média, variância, entre outras. Esse modelo intrinsecamente não-linear, denominado Processo Estocástico Neural (PEN), o qual captura o comportamento da série histórica para gerar séries temporais sintéticas, igualmente prováveis à série histórica, na solução de diversos tipos de problemas, tais como os que envolvem fenômenos climatológicos, econômicos, entre outros.

O modelo utiliza redes neurais *Multilayer Perceptron* (MLP) [Haykin 2001], com uma única camada escondida, treinadas com o algoritmo de aprendizado supervisionado *Levenberg-Marquardt* [Hagan and Menhaj 1994], uma variação do *back-propagation* [Rumelhart et al. 1986, Haykin 2001]. As redes MLP por serem aproximadores universais [Haykin 2001], têm sido muito aplicadas no estudo de séries temporais [Abelém 1994, Vemuri and Rodgers 1994, Prudêncio 2002, Gutiérrez 2003, Fayal 2008, Batista 2009, Zhao 2009].

O modelo proposto foi aplicado no tratamento de séries hidrológicas sazonais de intervalos de tempo mensais e os resultados mostraram que o PEN consegue gerar séries sintéticas com características similares às séries históricas.

O restante desse artigo é organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a descrição do modelo PEN, mostrando a sua formulação bem como o processo de geração de séries sintéticas. A Seção 3 descreve a aplicação do modelo PEN na geração de séries sintéticas de aflúências mensais, sendo que a Seção 4 apresenta os resultados obtidos neste estudo de caso. Finalmente, a Seção 5 apresenta a conclusão desse artigo.

2. Descrição do Modelo

Através da rede neural do PEN captura-se as características da série temporal sem necessitar de fazer suposições a priori sobre o comportamento da série ou realizar algum tipo de decomposição na mesma, como deixá-la estacionária ou retirar algumas características como ciclo ou tendência. Por isso, é preciso que as entradas dessa rede neural apresentem uma memória de curto prazo, que é feita através de técnicas de "janelamento" [Gutiérrez 2003]. Essas técnicas consistem em introduzir memória nos neurônios da primeira camada escondida, fornecendo aos mesmos valores passados da série temporal analisada.

No caso mais básico, onde a série temporal a ser analisada não é periódica, o PEN é formado por um única componente estocástica (CE). Uma CE é composta por uma rede neural (a qual é alimentada por uma janela temporal contendo os termos passados da série a ser modelada para gerar uma saída), e por uma distribuição de probabilidade que fornece valores aleatórios a serem somados na saída da rede neural na geração de séries sintéticas, como ilustra a Figura 1. Essa distribuição de probabilidade é obtida através dos resíduos da rede neural calculados durante o treinamento, correspondendo à diferença entre a saída desejada e a saída dada pela rede.

Para trabalhar com séries temporais periódicas, os parâmetros do modelo PEN devem se ajustar ao intervalo de tempo da série e também ao seu período. Por essa razão, o PEN é modelado com uma CE para cada período da série. Por exemplo, no caso de período mensal, o PEN é composto por 12 CEs - uma para cada mês.

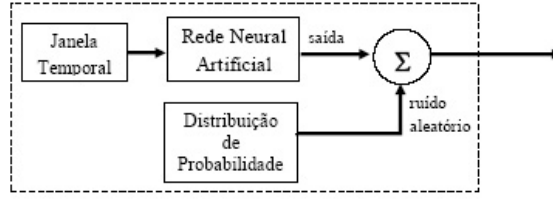


Figure 1. Componente Estocástica do Processo Estocástico Neural

2.1. Geração de séries sintéticas através do PEN

Seja $Z(t)$ uma série temporal com período sazonal s e n observações simultâneas em todos os períodos. O índice de tempo t é descrito pela equação 1:

$$t = (r - 1) \cdot s + m \quad (1)$$

onde

- $r = 1 \dots n$ é o número da observação de cada período da série;
- $m = 1 \dots s$ corresponde a um período da série;
- $s \in N$ é o total de períodos da série;
- $n \cdot s$ é o tamanho da série observada.

Por exemplo, no caso de uma série mensal, r corresponde ao ano, m corresponde ao mês, $s = 12$ e n corresponde ao total de anos que a série foi observada. Caso a série não seja periódica, tem-se que $s = 1$.

Ao modelar essa série, o PEN é composto por s CEs, uma para cada período m da série, como ilustra o diagrama de blocos do PEN na Figura 2.

No início do processo de geração de séries sintéticas é preciso fornecer os primeiros valores de termos passados que compõem as janelas temporais das redes neurais do PEN. Esses valores iniciais são tirados diretamente da série histórica.

Quando o PEN é formado por mais de uma CE, ocorre um encadeamento entre elas, onde o valor da série fornecido pela CE de um período faz parte da janela temporal da rede neural da CE do período seguinte, como ilustra a Figura 3.

2.2. Formulação do PEN

A janela temporal da rede neural da CE do período m contém um número de termos passados da série, chamado de ordem e representada por p_m . Assim, para obter um valor para a série no instante de tempo t , $Z(t)$, o PEN acessa a componente CE do período m correspondente e a sua rede neural recebe na camada de entrada os termos: $Z(t-1)$, $Z(t-2)$, \dots , $Z(t-p_m)$. Além disso, para reforçar o aprendizado do comportamento periódico da série acrescenta-se na entrada o valor da série do período anterior, correspondente a $Z(t-s)$.

A Figura 4 apresenta, em detalhes, um neurônio pertencente à camada escondida dessa rede neural de ordem p_m , cuja saída é dada pela equação 2.

$$y_i = \varphi \left(\omega_{i,0} \cdot Z(t-s) + \left(\sum_{j=1}^{p_m} \omega_{i,j} \cdot Z(t-j) \right) + \theta_i \right) \quad (2)$$

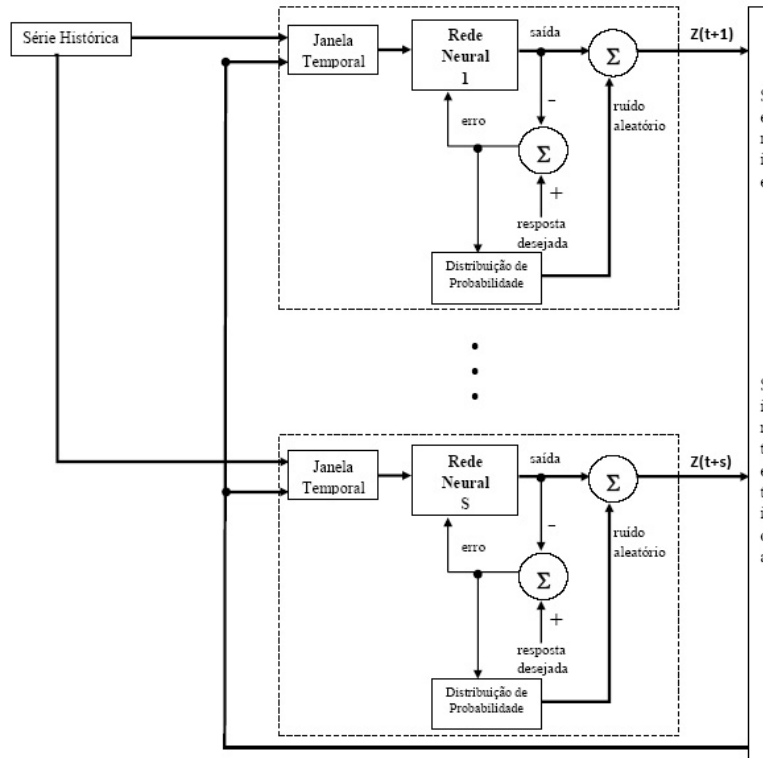


Figure 2. Geração de séries sintéticas no PEN

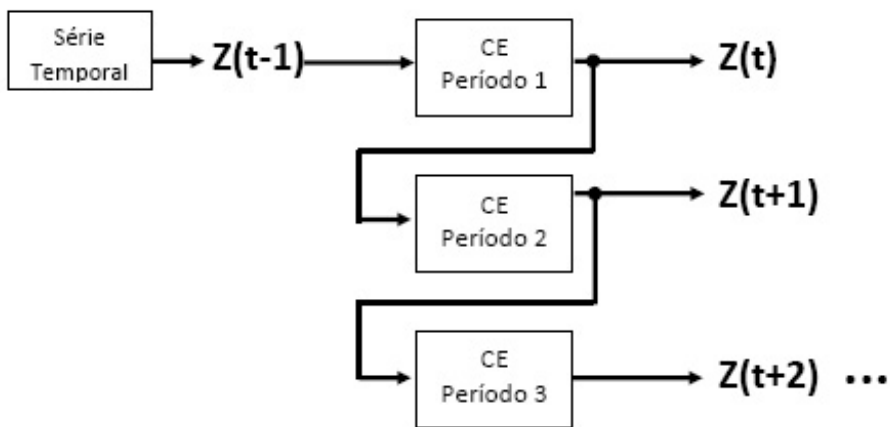


Figure 3. Encadeamento entre as CEs do Processo Estocástico Neural

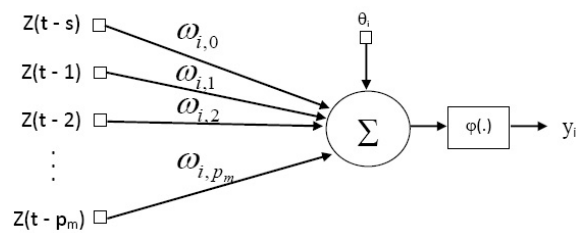


Figure 4. Neurônio da camada oculta de uma rede do PEN de ordem p_m

onde φ é a função de ativação do neurônio i , $\omega_{i,j}$ é o peso sináptico da conexão entre a entrada j e o neurônio i e θ_i é o *bias* desse neurônio.

Considerando que a rede neural de ordem p_m contém l_m neurônios na camada oculta, o neurônio da camada de saída é apresentado na Figura 5, sendo sua saída calculada pela equação 3.

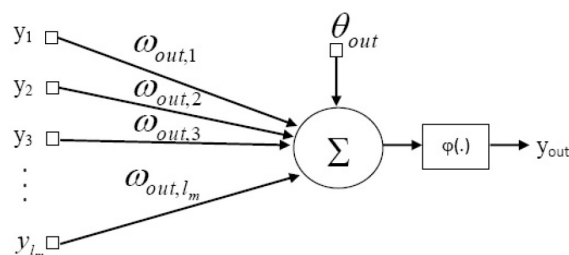


Figure 5. Neurônio de saída de uma rede do PEN com l_m neurônios na camada oculta

$$y_{out} = \varphi_{out} \left(\sum_{i=1}^{l_m} \omega_{out,i} \cdot y_i + \theta_{out} \right) \quad (3)$$

onde φ_{out} é a função de ativação do neurônio da camada de saída, representado por out , $\omega_{out,i}$ é o peso sináptico da conexão entre a entrada i (que corresponde à saída do neurônio i da camada oculta) e o neurônio out e θ_{out} é o *bias* desse neurônio.

Conforme ilustra a Figura 2, a saída de uma CE corresponde ao somatório da saída da rede neural com um valor aleatório, proveniente da distribuição de probabilidade dos resíduos da rede neural, obtidos da diferença entre a saída desejada e a saída da rede (y_{out}). Assim, a série temporal $Z(t)$, cujo índice de tempo t é descrito pela equação 1, é simulada através da equação 4.

$$Z(t) = y_{out} + \alpha(t) \quad (4)$$

onde $\alpha(t)$ é o valor aleatório proveniente da distribuição de probabilidade dos resíduos da rede neural da CE do período m correspondente.

3. Tratamento de Séries de Afluências Mensais

O Sistema Interligado Nacional (SIN) é um sistema de coordenação e controle, formado pelas empresas das regiões Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Nordeste e parte da região Norte, o qual congrega o sistema de produção e transmissão de energia elétrica do Brasil, que é um sistema hidrotérmico de grande porte, com predominância de usinas hidrelétricas [ONS].

Atualmente, o SIN é segmentado em quatro subsistemas correspondentes aos sistemas interligados: Sul, Sudeste/Centro-Oeste, Nordeste e Norte. Por se tratar de um sistema de grande porte, nos planejamento de médio e longo prazo ocorre a agregação dos reservatórios das usinas em reservatórios equivalentes de energia, um para cada subsistema. Ocorre também a agregação das afluências às usinas em Energias Naturais Afluentes (ENA), que correspondem à estimativa da energia que pode ser gerada com todas

as vazões afluentes a cada um dos reservatórios que compõem aquele reservatório equivalente, segundo uma política de operação [Pereira and Pinto 1984].

As ENAs são séries não estacionária, devido aos períodos de cheia e seca do ano, e sazonais com períodos de 12 meses, as quais, geralmente, apresentam correlações periódicas [Luna et al. 2006]. No contexto do planejamento da operação energética do sistema hidrotérmico brasileiro a geração de cenários é muito importante pois o único cenário disponível na prática, que é o registro de afluições observadas (chamado de série histórica), é insuficiente para compor uma amostra de tamanho necessário para estimar índices de risco aceitáveis [Pereira and Pinto 1984]. Através dos cenários é possível reproduzir as características básicas da série histórica, extraíndo melhor as informações dessa série temporal, permitindo a avaliação de riscos e incertezas pertinentes a um sistema hidroelétrico. Desse modo, aplicou-se o PEN para tratar as incertezas dessas séries de ENA gerando um conjunto de séries sintéticas.

A modelagem do processo estocástico neural para o tratamento de séries de ENA é composta de 4 sistemas $PEN(p, l)$, um para cada subsistema do SIN. Como as séries de ENA são séries sazonais com períodos de 12 meses, os sistemas $PEN(p, l)$ são compostos por 12 CEs, uma para cada mês. Tem-se que:

$p = p_1 \dots p_{12}$: vetor com a ordem da rede neural de cada CE;

$l = l_1 \dots l_{12}$: vetor com o número de neurônios na camada escondida da rede neural de cada CE.

A ordem p_m da rede neural da CE do período m pode variar de 1 até 11, que corresponde ao número de termos passados máximo permitido para manter a sazonalidade anual. Através de experimentos preliminares teve-se informações de que alguns meses normalmente precisam de ordens menores que outros. Logo, decidiu-se testar 4 tipos de ordem para cada rede: defasagem de 3, 6, 9 e 11 meses. Decidiu-se testar, para cada ordem definida, configurações desde 1 até 20 neurônios na camada oculta, dando um total de 80 configurações a serem avaliadas para cada mês m . Além disso, cada uma dessas 80 configurações de redes neurais são treinadas 10 vezes, com diferentes inicializações dos pesos sinápticos, a fim de evitar que a escolha de uma configuração de rede seja influenciada pelo mal desempenho devido a uma inicialização ruim dos pesos sinápticos.

Para ajustar o modelo $PEN(p, l)$ utilizou-se, para cada subsistema do SIN, um histórico consolidado de ENA que apresenta valores desde 1931 até 2005. Esse histórico de ENA foi dividido em 2 conjuntos: treinamento e validação. Durante o treinamento das redes neurais, faz-se etapas de validação do treinamento para evitar que ocorra um super ajustamento dos pesos sinápticos das redes neurais. A etapa de validação das redes neurais do PEN consiste na geração uma série de n anos composta com as saídas das redes. Por esse motivo, usa-se os n últimos anos do histórico para compor o conjunto de padrões entrada-saída de validação e, todos os anos anteriores compõem o conjunto de padrões entrada-saída de treinamento. Nesse trabalho, como decidiu-se gerar séries sintéticas na mesma quantidade de anos que é utilizado no planejamento atual do SIN, tem-se que o conjunto de validação é composto pelos últimos 5 anos do histórico.

Uma vez treinadas todas as configurações de redes neurais, escolhe-se a rede do mês m que obteve o melhor desempenho para compor a m -ésima CE do PEN. Como o conjunto de validação contém apenas 5 anos, decidiu-se verificar o desempenho das redes neurais treinadas em relação a um número maior de padrões de dados. Por essa razão,

unificou-se então os conjuntos de padrões de treinamento e validação. Criou-se, com esse padrão de dados unificado, uma série com as saídas das redes neurais e comparou-se essa série com as saídas desejadas do padrão de dados unificado. Utilizou-se como medida de desempenho o erro médio percentual absoluto (MAPE) [Tang et al. 1991], que é muito utilizado para validar modelos de séries temporais, calculado pela equação 5.

$$MAPE = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=1}^x \left| \frac{Z(k) - C((k-1) \cdot s + m)}{Z(k)} \right| \quad (5)$$

onde m é o mês, x corresponde ao total de elementos do mês m na série, k é o índice do elemento, $s = 12$ é o total de meses, $Z(k)$ é a k -ésima saída desejada do padrão unificado do mês m , C é a série criada com as saídas das redes neurais.

Uma vez escolhida a rede neural que irá compor a m -ésima CE do PEN, ajusta-se a série de resíduos, obtidos da diferença entre a saída da rede e os padrões de saída do conjunto de treinamento, à uma distribuição teórica de probabilidade para compor essa CE.

4. Resultados da Simulação

A Tabela 1 apresenta, para cada subsistema do SIN, as configurações de redes neurais das CEs do PEN. A tabela contém a ordem e o número de neurônios da camada escondida da rede neural de cada mês no PEN de cada subsistema.

Table 1. Configurações das Redes Neurais selecionadas

Subsistema Sudeste-Centro-Oeste												
Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ordem	3	9	6	11	3	3	9	6	11	3	3	6
# Neurônios	19	20	15	7	10	10	3	16	16	19	12	9
Subsistema Sul												
Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ordem	6	9	9	11	3	6	3	6	11	3	11	6
# Neurônios	3	17	1	3	19	10	14	1	2	3	3	1
Subsistema Nordeste												
Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ordem	11	3	11	3	3	11	6	11	9	6	9	9
# Neurônios	9	6	6	13	2	19	1	1	3	1	5	7
Subsistema Norte												
Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ordem	11	9	6	11	9	11	6	11	9	3	11	11
# Neurônios	11	14	4	15	16	3	1	8	17	19	18	15

Com cada um dos modelos $PEN(p, l)$ da Tabela 1, gerou-se 200 séries sintéticas de 5 anos (60 meses). Com o intuito de analisar a qualidade dessas séries sintéticas geradas, utilizou-se testes estatísticos de aderência [Montgomery and Runger 1971] para verificar se as séries sintéticas são igualmente prováveis à série histórica de ENA.

Aplicou-se o teste t para avaliar se a média das séries sintéticas é estatisticamente igual à média histórica. A hipótese é que a média dos 200 valores de cada mês em cada ano é estatisticamente igual à média histórica do mês correspondente. Em cada teste realizado obtém-se um p -valor e caso esse p -valor esteja acima do nível de significância de 5%, aceita-se essa hipótese. A porcentagem dos 60 p -valores (um para cada mês da série) acima do nível de significância indica o desempenho do modelo PEN para gerar séries sintéticas, indicando o quanto o modelo conseguiu reproduzir o primeiro momento da série histórica.

De maneira análoga foi aplicado o teste de Levene para avaliar se a variância de cada período dos cenários é estatisticamente igual à variância histórica do mês correspondente, e o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) para verificar se os cenários provêm da mesma distribuição de probabilidade do histórico, indicando que o modelo reproduziu corretamente o comportamento da série histórica.

Como o histórico de ENA foi dividido em 2 conjuntos, um para o treinamento e o outro para a validação das redes neurais do PEN, fez-se uma avaliação das séries sintéticas com esses dois conjuntos. A Tabela 2 apresenta os resultados dos testes de aderência obtidos. Observe que todos modelos PEN ajustados com as séries dos subsistemas tiveram em todos os testes aderências acima de 50%. Os melhores ajustes ocorreram com os modelos dos subsistemas Sudeste/Centro-Oeste e Sul. O modelo do Nordeste teve aderências mais altas nos testes com o histórico de Treinamento do que com o histórico de Validação. Já o modelo do Norte conseguiu melhor aderência com o teste de Levene e aderências mais baixas com o testes K-S.

Table 2. Configurações das Redes Neurais selecionadas

Subsistema	Histórico					
	Treinamento			Validação		
Teste	t	Levene	K-S	t	Levene	K-S
Sudeste/Centro-Oeste	94%	95%	94%	97%	100%	97%
Sul	75%	90%	90%	95%	99%	99%
Nordeste	97%	99%	94%	69%	64%	54%
Norte	85%	90%	64%	74%	99%	67%

A Figura 6 apresenta a envoltória dos 200 cenários (séries sintéticas) de 5 anos de ENA gerados pelo modelo PEN, a curva da média de cada cada mês em cada ano das séries sintéticas e também a curva da média mensal do conjunto histórico replicada nos 5 anos, para ser comparada com o comportamento da média dessas séries sintéticas geradas em todos esses 60 meses. Isso foi feito para os dois conjuntos históricos em cada subsistema.

Observa-se que a média dos cenários reproduziram melhor o comportamento da média histórica do conjunto de treinamento. Já o comportamento da média histórica do conjunto de validação não foi tão bem reproduzido, principalmente pelas séries sintéticas geradas pelo modelo PEN do subsistema Sul. Porém, em todos os subsistemas, a média dos conjuntos históricos ficaram dentro das envoltórias dos cenários. Assim, de uma maneira geral, pode-se concluir que para todos os subsistemas as envoltórias dos cenários acompanharam bem o desempenho das séries históricas de ENA.

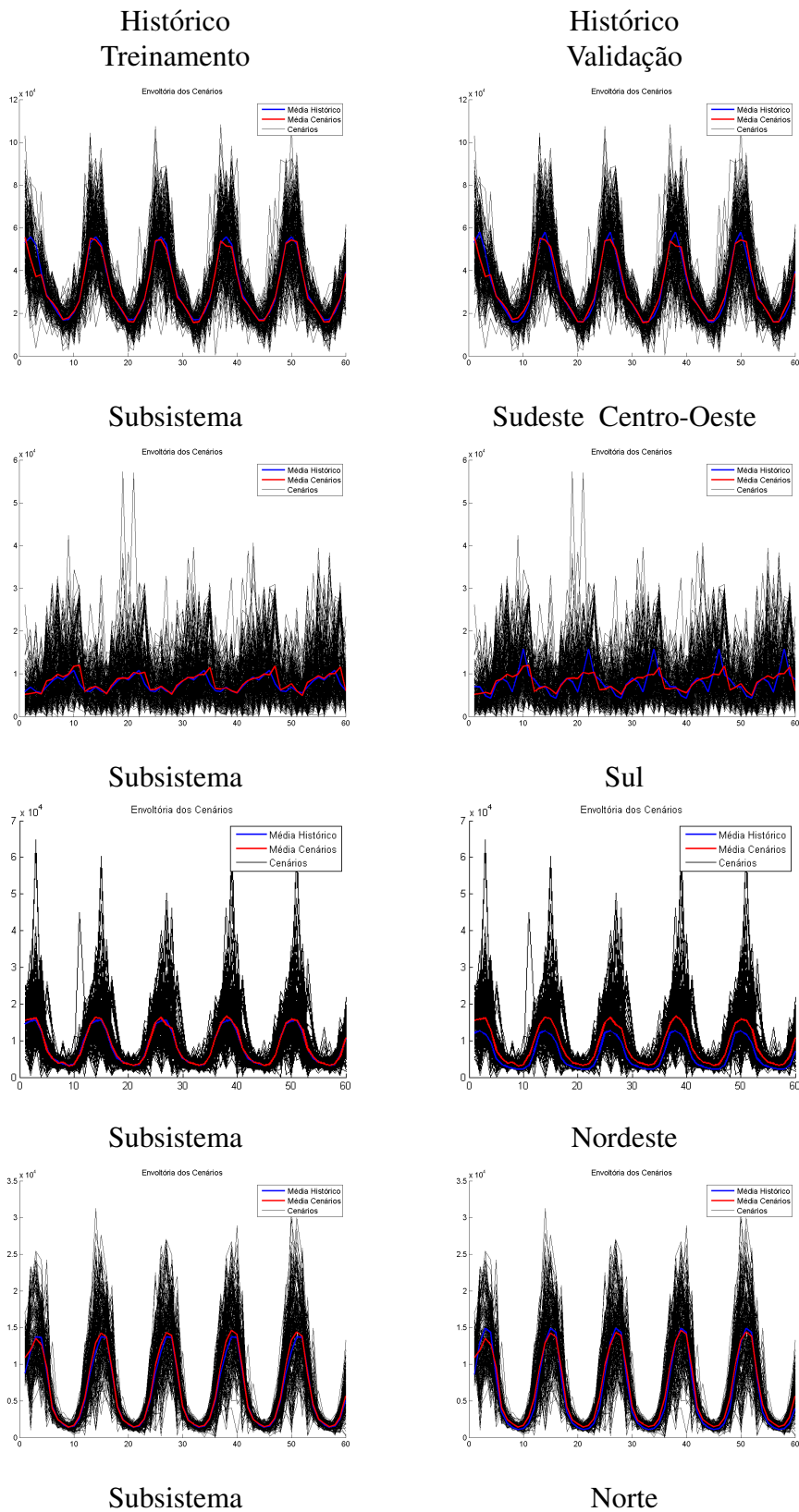


Figure 6. Envoltória dos cenários gerados no PEN

5. Conclusão

O objetivo desse trabalho foi a elaboração de um novo modelo de processo estocástico genérico, intrinsecamente não-linear, passível de aplicação em uma gama de problemas de fenômenos de comportamento estocástico e/ou com características periódicas de suas propriedades.

Dado que as redes neurais são modelos não-lineares, simples de entendimento e implementação, capazes de identificar e assimilar características de séries temporais históricas, tais como sazonalidade, periodicidade e tendência, decidiu-se utilizá-las como base do modelo proposto, denominado Processo Estocástico Neural (PEN). A meta desse modelo é gerar séries temporais sintéticas igualmente prováveis à série histórica, abordando qualquer período de tempo, na quantidade necessária.

Aplicou-se o PEN no tratamento das incertezas das séries de fluências mensais, chamadas de Energia Natural Afluente (ENA). As ENAs são séries não estacionária, devido aos períodos de cheia e seca do ano, e sazonais com períodos de 12 meses, as quais, geralmente, apresentam correlações periódicas. Através do PEN gerou-se um conjunto de séries sintéticas com o intuito de reproduzir as características básicas da série histórica. Gerou-se 200 séries sintéticas de 5 anos de ENA para cada subsistema do Sistema Interligado Nacional.

Em cada conjunto de séries sintéticas fez-se uma avaliação com alguns testes de aderência para verificar se as mesmas são estatisticamente similares às séries históricas de ENA. Verificou-se que as séries sintéticas geradas por esse modelo PEN apresentaram boas aderência ao conjunto de séries históricas e que as envoltórias desses cenários englobam as médias históricas de ENA. Com isso conclui-se que o modelo PEN é capaz de capturar o comportamento da série histórica e gerar séries sintéticas com características semelhantes.

Como trabalhos futuros é interessante utilizar redes neurais recorrentes no lugar das redes neurais MLP nas componentes estocásticas do PEN. Pois as redes neurais recorrentes são capazes de representar mapas dinâmicos não-lineares arbitrários, comumente encontradas em tarefas de predição de série temporais não-lineares [Narendra and Parthasarathy 1990], apresentando melhor desempenho que técnicas lineares tradicionais e redes neurais MLP [Lendasse 2004]. Uma vez que para processar séries temporais as redes neurais feedforward MLP podem ser adaptadas através de uma entrada com sinais de atrasos (regressor) e treinadas pelo algoritmo backpropagation padrão, esses modelos assim adaptados podem ser facilmente convertidas em arquiteturas recorrentes simples. Essa conversão é feita através de realimentações de ativações dos neurônios das camadas escondidas ou de saída, dando origem, respectivamente, às redes de Elman e de Jordan [Júnior 2006], sendo esses os modelos indicados para substituir as redes MLP do PEN. Outra idéia é substituir a rede neural MLP de cada componente estocástica do PEN por uma rede do tipo NARX. Pois, segundo Bengio [Bengio et al. 1994], aprender dependências de longo prazo com técnicas de gradiente-descendente é mais eficiente numa classe de RNAs conhecida como modelos NARX (Nonlinear AutoRegressive model with eXogenous inputs) do que em modelos recorrentes baseados na rede MLP, quando aplicado à identificação de sistemas de entrada-saída não-lineares [Júnior 2006].

References

- Ons - operador nacional do sistema elétrico. <http://www.ons.com.br>.
- Abelém, A. J. G. (1994). Redes neurais artificiais na previsão de séries temporais. Dissertação de mestrado, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.
- Batista, A. L. F. (2009). Modelos de séries temporais e redes neurais artificiais na previsão de vazão. Mestrado em engenharia de sistemas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, Minas Gerais.
- Bengio, Y., Simard, P., and Frasconi, P. (1994). Learning long-term dependencies with gradient descent is difficult. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(2):157–166.
- Fayal, M. A. A. (2008). Previsão de vazão por redes neurais artificiais e transformada wavelet. Dissertação de mestrado, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.
- Gutiérrez, J. L. C. (2003). Monitoramento da instrumentação da barragem de corumbá-i por redes neurais e modelos de box and jenkins. Dissertação de mestrado, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.
- Hagan, M. and Menhaj, M. (1994). Training feedforward networks with the marquardt algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks*,.
- Haykin, S. (2001). *Redes Neurais: Princípios e Prática*. Bookman, Porto Alegre, RS.
- Júnior, J. M. P. M. (2006). Redes neurais dinâmicas para predição e modelagem não-linear de séries temporais. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia de Teleinformática.
- Lendasse, A. (2004). Time series prediction competition the cats benchmark. In *International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN'04)*, volume S.I., pages 1615–1620.
- Luna, I., Ballini, R., and Soares, S. (2006). Técnica de identificação de modelos lineares e não-lineares de séries temporais. *Revista Controle e Automação*, 17(3):245–256.
- Müller, D. (2007). *Processos Estocásticos e Aplicações*, volume Coleção Económicas - 2.^a Série of *Direito Financeiro E Tributário*. Almedina.
- Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (1971). *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. Editora LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2^a edição edition.
- Narendra, K. S. and Parthasarathy, K. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1(1):4–27.
- Pereira, M. V. F. and Pinto, L. M. V. G. (1984). Operation planning of large-scale hydroelectric systems. In *Proc. 8th Power System Computation Cont.*
- Prudêncio, R. B. C. (2002). Projeto híbrido de redes neurais. Mestrado em ciências da computação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., and Williams, R. J. (1986). Learning representations by backpropagating errors. pages 533–536, *Nature (London)*, 323.

- Sanders, N. R. (1995). Managing the forecasting function. *Industrial Management and Data Systems*, 95(4):12–18.
- Tang, Z., Almeida, C., and Fishiwick, P. A. (1991). Time series forecasting using neural networks vs box-jenkins methodology. In *Simulation*, volume 57, pages 303–310.
- Vemuri, V. R. and Rodgers, R. D. (1994). Artificial neural networks: Forecasting time series. *IEEE Computer Society Press*.
- Zhao, H. (2009). A chaotic time series prediction based on neural network: Evidence from the shanghai composite index in china. In *Test and Measurement, 2009. ICTM '09. International Conference on*, volume 2, pages 382 –385.